

Eventos Dependentes e Independentes

Curso completo de Matemática — 9º ano do Ensino Fundamental

Alinhado à habilidade EF09MA20 da BNCC

Sumário

1	Apresentação e objetivos de aprendizagem	1
2	Experimentos, resultados e eventos	1
3	Probabilidade em casos equiprováveis	2
4	Operações com eventos	3
5	Experimentos sucessivos e árvores	4
6	Probabilidade condicional	5
7	Independência e dependência	6
8	Retiradas com e sem reposição	7
9	Simulação, frequência e modelagem	7
10	Exatidão, validação e estratégia	8
10.1	Algoritmo de resolução	8
11	Exercícios de consolidação	9
12	Aprofundamento e elaboração	10
13	Avaliação-síntese	11
14	Gabarito comentado	11
15	Síntese final	14

1 Apresentação e objetivos de aprendizagem

Probabilidade é a linguagem matemática da incerteza. Ela não prevê o resultado individual de um lançamento de dado, mas descreve, por meio de um modelo, quão plausíveis são os resultados e como uma informação nova pode alterar essa plausibilidade. Em experimentos sucessivos, a pergunta decisiva é: saber o que ocorreu antes modifica a probabilidade do que ocorrerá depois?

Ao concluir o curso, espera-se que o estudante seja capaz de:

- identificar experimento aleatório, resultado, espaço amostral e evento;
- calcular probabilidades em espaços amostrais equiprováveis;
- operar com complemento, união e interseção de eventos;
- representar experimentos sucessivos por tabelas e diagramas de árvore;
- interpretar e calcular probabilidades condicionais;
- reconhecer eventos dependentes e independentes;
- aplicar corretamente as regras da adição e da multiplicação;
- comparar retiradas com e sem reposição;
- simular experimentos e confrontar frequências com valores teóricos;
- elaborar e validar problemas probabilísticos.

Correspondência com a BNCC

A habilidade **EF09MA20** propõe reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência nos dois casos. Por isso, o curso enfatiza condicionamento, experimentos sucessivos, árvores de probabilidades, reposição e simulação digital.

2 Experimentos, resultados e eventos

Definição 2.1: Experimento aleatório

É um procedimento repetível cujos resultados possíveis podem ser descritos, mas cujo resultado de uma realização individual não é conhecido com certeza antes da execução.

Definição 2.2: Espaço amostral e evento

O **espaço amostral**, indicado por Ω , é o conjunto de todos os resultados possíveis do modelo. Um **evento** é qualquer subconjunto $A \subseteq \Omega$. O evento ocorre quando o resultado observado pertence a A .

Exemplo

No lançamento de um dado comum,

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

O evento “obter número par” é $A = \{2, 4, 6\}$; o evento “obter número maior que 4” é $B = \{5, 6\}$.

Eventos especiais

O evento impossível é $\emptyset$ e tem probabilidade 0. O evento certo é Ω e tem probabilidade 1. Um evento com um único resultado é chamado **elementar** ou **simples**.

O espaço amostral depende do modelo

Ao lançar duas moedas, registrar apenas o número de caras produz $\{0, 1, 2\}$, mas esses três valores não são equiprováveis. Registrando a ordem, obtém-se $\{CC, CK, KC, KK\}$, cujos quatro resultados são equiprováveis para moedas justas e lançamentos independentes.

3 Probabilidade em casos equiprováveis

Definição 3.1: Probabilidade

Uma probabilidade associa a cada evento A um número $\mathbb{P}(A)$ entre 0 e 1, satisfazendo $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ e a adição das probabilidades de eventos disjuntos.

Teorema 3.1: Regra de Laplace

Se Ω é finito e todos os seus resultados são equiprováveis, então

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

para todo evento $A \subseteq \Omega$.

Demonstração

Se Ω possui N resultados equiprováveis, cada resultado tem probabilidade $1/N$, pois as N probabilidades iguais somam 1. Se A contém k resultados disjuntos, então $\mathbb{P}(A) = k(1/N) = k/N$.

Exemplo

Em um dado justo, o evento $B = \{5, 6\}$ possui dois resultados favoráveis entre seis possíveis:

$$\mathbb{P}(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Contar só funciona após justificar equiprobabilidade

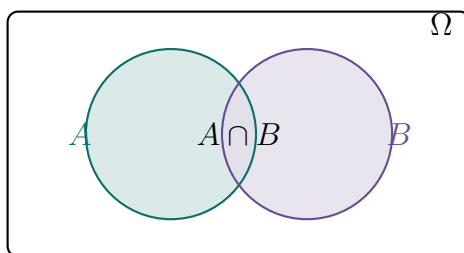
A fórmula $n(A)/n(\Omega)$ não deve ser aplicada a resultados com chances diferentes. Num saco com fichas de cores em quantidades distintas, as cores não são equiprováveis, embora as fichas individuais possam ser.

4 Operações com eventos

Definição 4.1: Complemento, união e interseção

Para eventos A e B :

- A^c é o evento “ A não ocorre”;
- $A \cup B$ é o evento “ocorre A ou B , inclusive ambos”;
- $A \cap B$ é o evento “ocorrem A e B ”;
- A e B são **mutuamente exclusivos** ou **disjuntos** quando $A \cap B = \emptyset$.



Teorema 4.1: Regra do complemento

Para todo evento A ,

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

Demonstração

Os eventos A e A^c são disjuntos e sua união é Ω . Logo, $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Teorema 4.2: Regra geral da adição

Para quaisquer eventos A e B ,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Se forem disjuntos, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ e as probabilidades apenas se somam.

Demonstração

Ao somar $\mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(B)$, a região $A \cap B$ é contada duas vezes. Subtrair $\mathbb{P}(A \cap B)$ corrige a duplicação.

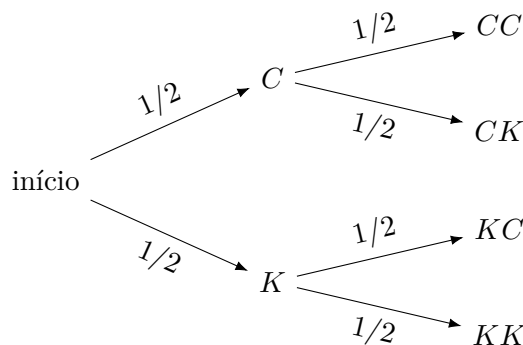
Exemplo

Num dado, sejam $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{3, 6\}$. Como $A \cap B = \{6\}$,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

5 Experimentos sucessivos e árvores

Quando um experimento possui etapas, cada caminho completo de uma árvore representa um resultado. A probabilidade escrita num ramo é calculada considerando tudo o que já ocorreu antes desse ramo.



Teorema 5.1: Regra dos caminhos

Em uma árvore de probabilidades:

- multiplicam-se as probabilidades ao longo de um caminho completo;
- somam-se as probabilidades de caminhos distintos que realizam o mesmo evento.

Demonstração

Cada ramo posterior descreve uma parte dos casos que chegaram ao nó anterior; por isso, a proporção conjunta é um produto. Caminhos completos distintos são resultados disjuntos; por isso, suas probabilidades são somadas.

Exemplo

Em dois lançamentos independentes de uma moeda justa,

$$\mathbb{P}(CC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(\text{exatamente uma cara}) = \mathbb{P}(CK) + \mathbb{P}(KC) = \frac{1}{2}.$$

6 Probabilidade condicional

Definição 6.1: Probabilidade condicional

Se $\mathbb{P}(A) > 0$, a probabilidade de B sabendo que A ocorreu é

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

O símbolo “ $\mid$ ” deve ser lido como “dado que” ou “sabendo que”.

Demonstração

Após saber que A ocorreu, o novo universo de referência é A . A parte desse novo universo que também realiza B é $A \cap B$. Em um modelo equiprovável,

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{n(A \cap B) / n(\Omega)}{n(A) / n(\Omega)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Exemplo

Um dado foi lançado e sabe-se que o resultado é maior que 3. O novo espaço é $\{4, 5, 6\}$. A probabilidade de o resultado ser par é

$$\mathbb{P}(\text{par} \mid > 3) = \frac{2}{3},$$

pois 4 e 6 são os dois resultados pares entre os três ainda possíveis.

Teorema 6.1: Regra geral da multiplicação

Se $\mathbb{P}(A) > 0$, então

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A).$$

Analogamente, se $\mathbb{P}(B) > 0$, então $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A \mid B)$.

Demonstração

Basta multiplicar os dois lados da definição $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(A \cap B) / \mathbb{P}(A)$ por $\mathbb{P}(A)$.

7 Independência e dependência

Definição 7.1: Eventos independentes

Dois eventos A e B são **independentes** quando

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Se $\mathbb{P}(A) > 0$, isso equivale a $\mathbb{P}(B | A) = \mathbb{P}(B)$. Quando a igualdade falha, os eventos são **dependentes**.

Teorema 7.1: Produto para eventos independentes

Se A e B são independentes, então

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Além disso, A é independente de B^c , A^c é independente de B e A^c é independente de B^c .

Demonstração

A primeira igualdade é a própria definição. Para o primeiro complemento,

$$\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)[1 - \mathbb{P}(B)] = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c).$$

Os demais casos seguem pelo mesmo argumento.

Disjuntos não significa independentes

Eventos disjuntos não podem ocorrer juntos. Eventos independentes podem ocorrer juntos, mas a ocorrência de um não altera a chance do outro. Se A e B são disjuntos e possuem probabilidades positivas, então $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$, enquanto $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) > 0$; portanto, eles são dependentes.

Exemplo

Lance um dado e uma moeda. Seja A = “o dado é par” e B = “a moeda mostra cara”. Como os mecanismos não se influenciam,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Já num único dado, “resultado par” e “resultado maior que 3” não são independentes, pois $\mathbb{P}(\text{par}) = 1/2$, mas $\mathbb{P}(\text{par} | > 3) = 2/3$.

8 Retiradas com e sem reposição

Sem reposição: dependência

Uma urna contém 3 fichas vermelhas e 2 azuis. Em duas retiradas sem reposição,

$$\mathbb{P}(VV) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}.$$

Depois de sair uma vermelha, restam 2 vermelhas entre 4 fichas. A primeira retirada altera a composição da urna e, portanto, a segunda probabilidade.

Com reposição: independência

Na mesma urna, repondo a primeira ficha antes da segunda retirada,

$$\mathbb{P}(VV) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}.$$

A composição volta a ser a original; por isso, o resultado da primeira retirada não altera a distribuição da segunda.

Teorema 8.1: Exatamente um sucesso em duas tentativas

Se duas tentativas independentes têm a mesma probabilidade p de sucesso, então

$$\mathbb{P}(\text{exatamente um sucesso}) = 2p(1 - p).$$

Demonstração

O evento ocorre pelos caminhos disjuntos sucesso-fracasso ou fracasso-sucesso. Cada caminho tem probabilidade $p(1 - p)$; somando-os, obtém-se $2p(1 - p)$.

Reposição não é a única fonte de independência

Reposição costuma produzir independência em retiradas aleatórias, mas independência é uma propriedade do modelo probabilístico, não uma palavra-chave. Sempre verifique se $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ ou se a informação de um evento preserva a probabilidade do outro.

9 Simulação, frequência e modelagem

Definição 9.1: Frequência relativa

Se um evento A ocorre f_A vezes em N repetições, sua frequência relativa é

$$\hat{p}_A = \frac{f_A}{N}.$$

Ela é uma estimativa experimental da probabilidade do evento.

Teorema 9.1: Estabilização das frequências

Em repetições numerosas de um mesmo experimento sob condições estáveis, a frequência relativa de um evento tende a se aproximar de sua probabilidade teórica.

O que o resultado não afirma

A frequência não precisa aproximar-se de forma monotônica, nem uma sequência curta precisa reproduzir exatamente a probabilidade. A estabilização é um comportamento de longo prazo e não torna previsível o próximo resultado.

Atividade investigativa

Numa planilha, simule duas retiradas de uma urna com 3 fichas vermelhas e 2 azuis. Faça uma versão com reposição e outra sem reposição. Em pelo menos 1000 repetições, estime $\mathbb{P}(VV)$ e compare com $9/25$ e $3/10$. Registre também $\hat{\mathbb{P}}(V_2 | V_1)$ e compare-a com $\mathbb{P}(V_2)$ em cada modelo.

Independência não deve ser presumida por conveniência

Resultados em dias consecutivos, componentes de uma mesma máquina, respostas de uma mesma pessoa e medidas ambientais podem compartilhar causas. Multiplicar probabilidades só é válido após justificar independência ou usar probabilidades condicionais adequadas.

10 Exatidão, validação e estratégia

10.1 Algoritmo de resolução

1. Descreva o experimento e declare o que cada etapa registra.
2. Construa Ω , uma tabela ou uma árvore; identifique equiprobabilidade.
3. Traduza a pergunta em eventos e determine se há complemento, união ou interseção.
4. Em etapas sucessivas, atualize as probabilidades após cada resultado.
5. Use $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B | A)$; substitua a condicional por $\mathbb{P}(B)$ somente se houver independência.
6. Multiplique ao longo dos caminhos e some caminhos disjuntos favoráveis.
7. Verifique se o resultado pertence a $[0, 1]$ e se complementares somam 1.

Três diagnósticos de independência

Quando as expressões estiverem definidas, são equivalentes:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \quad \mathbb{P}(B | A) = \mathbb{P}(B), \quad \mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A).$$

Uma igualdade deve ser verificada com valores exatos ou tolerância numérica declarada.

11 Exercícios de consolidação

1. Defina experimento aleatório.
2. Dê um exemplo de experimento determinístico e outro de experimento aleatório.
3. Escreva o espaço amostral do lançamento de uma moeda.
4. Escreva o espaço amostral ordenado de dois lançamentos de uma moeda.
5. Num dado, escreva o evento $A = \text{“obter número par”}$.
6. Identifique o evento certo e o impossível num espaço amostral Ω .
7. Calcule a probabilidade de obter número maior que 4 em um dado justo.
8. Sorteie-se um número de 1 a 10. Calcule a probabilidade de ele ser múltiplo de 3.
9. Em duas moedas justas, calcule a probabilidade de sair exatamente uma cara.
10. Em dois lançamentos de um dado, calcule a probabilidade de sair ao menos um 6.
11. Se $\mathbb{P}(A) = 0,38$, determine $\mathbb{P}(A^c)$.
12. Se $\mathbb{P}(A) = 0,40$, $\mathbb{P}(B) = 0,35$ e $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,10$, determine $\mathbb{P}(A \cup B)$.
13. Dois eventos disjuntos têm probabilidades 0,28 e 0,31. Determine a probabilidade da união.
14. Dois eventos disjuntos de probabilidades positivas podem ser independentes? Justifique.
15. Complete uma árvore de dois lançamentos de moeda justa com as probabilidades dos ramos.
16. Use a árvore anterior para calcular $\mathbb{P}(CC)$.
17. Calcule a probabilidade de ao menos uma cara em dois lançamentos.
18. Lança-se um dado e uma moeda independentes. Calcule a probabilidade de sair número par e coroa.
19. Uma roleta tem quatro setores iguais, um deles vermelho. Lança-se também um dado. Calcule a probabilidade de vermelho e número maior que 4, supondo independência.
20. Sorteie-se um número de 1 a 12. Sabendo que ele é par, calcule a probabilidade de ser maior que 8.
21. Num dado, sabendo que o resultado é maior que 3, determine a probabilidade de ele ser par.
22. Se $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,18$ e $\mathbb{P}(A) = 0,30$, calcule $\mathbb{P}(B \mid A)$.
23. Se $\mathbb{P}(A) = 0,40$, $\mathbb{P}(B) = 0,50$ e $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,20$, verifique se A e B são independentes.
24. Repita o item anterior quando $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,12$.
25. Eventos independentes têm probabilidades 0,60 e 0,40. Calcule a probabilidade da interseção.

26. Para os eventos do item anterior, calcule a probabilidade da união.
27. Uma urna contém 3 fichas vermelhas e 2 azuis. Em duas retiradas sem reposição, calcule $\mathbb{P}(VV)$.
28. Repita o item anterior com reposição.
29. Na urna do item 27, calcule a probabilidade de sair uma ficha de cada cor, sem reposição.
30. Explique por que as retiradas sem reposição são dependentes.
31. Uma urna contém 4 fichas brancas e 6 pretas. Em duas retiradas sem reposição, calcule a probabilidade de ambas serem pretas.
32. Na urna anterior, calcule a probabilidade de sair ao menos uma branca.
33. De um baralho de 52 cartas, retiram-se duas sem reposição. Calcule a probabilidade de ambas serem ases.
34. Repita o item anterior com reposição.
35. Uma peça tem probabilidade 0,02 de ser defeituosa. Para duas peças independentes, calcule a probabilidade de ambas serem boas.
36. No modelo anterior, calcule a probabilidade de exatamente uma ser defeituosa.
37. Se a probabilidade de chuva em cada um de dois dias fosse 0,30 e os eventos fossem independentes, qual seria a probabilidade de chover nos dois dias?
38. Explique por que a independência entre chuvas de dias consecutivos pode ser uma hipótese inadequada.
39. Descreva como estimar a probabilidade de cara por meio de 500 lançamentos simulados.
40. Uma frequência relativa deve aproximar-se monotonicamente da probabilidade teórica? Explique.

12 Aprofundamento e elaboração

41. Demonstre a regra do complemento a partir de $A \cup A^c = \Omega$.
42. Demonstre a regra geral da adição decompondo $A \cup B$ em regiões disjuntas.
43. Deduza a regra da multiplicação a partir da definição de probabilidade condicional.
44. Prove que dois eventos disjuntos com probabilidades positivas são dependentes.
45. Em três lançamentos de moeda justa, calcule a probabilidade de exatamente duas caras.
46. Calcule a probabilidade de ao menos uma cara em três lançamentos.
47. Uma urna contém 5 fichas vermelhas e 3 azuis. Retiram-se três sem reposição. Calcule a probabilidade de todas serem vermelhas.
48. Na urna anterior, calcule a probabilidade de saírem exatamente duas vermelhas e uma azul.

49. Uma questão tem quatro alternativas, apenas uma correta. Um estudante responde ao acaso cinco questões independentes. Calcule a probabilidade de acertar todas.
50. No modelo anterior, calcule a probabilidade de acertar ao menos uma.
51. Uma condição ocorre em 1% da população. Um teste detecta 90% das pessoas com a condição e dá resultado positivo em 5% das pessoas sem ela. Por uma árvore, calcule a probabilidade de uma pessoa ter a condição sabendo que o teste foi positivo.
52. Elabore uma simulação que compare a probabilidade teórica e a frequência de exatamente uma ficha vermelha em duas retiradas com reposição.

13 Avaliação-síntese

53. Dois dados justos são lançados. Calcule a probabilidade de a soma ser 8.
54. Num dado, $A = \text{“múltiplo de 2”}$ e $B = \text{“múltiplo de 3”}$. Calcule $\mathbb{P}(A \cup B)$.
55. Eventos independentes têm probabilidades 0,70 e 0,20. Calcule a probabilidade de nenhum ocorrer.
56. Em uma turma de 30 estudantes, 18 praticam esporte, 12 estudam música e 8 fazem ambos. Sabendo que um estudante pratica esporte, calcule a probabilidade de ele estudar música.
57. Uma urna contém 6 fichas vermelhas e 4 azuis. Em duas retiradas sem reposição, calcule a probabilidade de as cores serem diferentes.
58. Repita o item anterior com reposição.
59. Justifique, por uma probabilidade condicional, por que as retiradas do item 57 são dependentes.
60. Um componente falha com probabilidade 0,10. Em três componentes independentes, calcule a probabilidade de exatamente um falhar.
61. Um procedimento tem probabilidade 0,80 de sucesso em cada uma de três tentativas independentes. Calcule a probabilidade de ao menos um sucesso.
62. Proponha um procedimento digital para distinguir empiricamente retiradas com e sem reposição e validar as probabilidades calculadas.

14 Gabarito comentado

1. Procedimento repetível com resultados possíveis conhecidos, mas resultado individual incerto antes da execução.
2. Determinístico: calcular $2 + 3$; aleatório: lançar um dado e registrar a face.
3. $\Omega = \{C, K\}$.
4. $\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}$.

5. $A = \{2, 4, 6\}$.
6. Certo: Ω ; impossível: $\emptyset$.
7. Resultados 5 e 6: $\mathbb{P} = 2/6 = 1/3$.
8. Múltiplos 3, 6, 9: $\mathbb{P} = 3/10$.
9. Caminhos CK e KC : $2/4 = 1/2$.
10. Pelo complemento, $1 - (5/6)^2 = 1 - 25/36 = 11/36$.
11. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - 0,38 = 0,62$.
12. $0,40 + 0,35 - 0,10 = 0,65$.
13. Como a interseção é vazia, $0,28 + 0,31 = 0,59$.
14. Não. A interseção tem probabilidade 0, mas o produto das probabilidades é positivo.
15. De cada nó partem cara e coroa, ambas com probabilidade $1/2$.
16. $\mathbb{P}(CC) = (1/2)(1/2) = 1/4$.
17. $1 - \mathbb{P}(KK) = 1 - 1/4 = 3/4$.
18. $(3/6)(1/2) = 1/4$.
19. $(1/4)(2/6) = 1/12$.
20. Entre $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, os favoráveis são 10 e 12: $2/6 = 1/3$.
21. Entre $\{4, 5, 6\}$, os pares são 4 e 6: $2/3$.
22. $\mathbb{P}(B \mid A) = 0,18/0,30 = 0,60$.
23. Sim: $0,40 \cdot 0,50 = 0,20 = \mathbb{P}(A \cap B)$.
24. Não: $0,40 \cdot 0,50 = 0,20 \neq 0,12$; são dependentes.
25. $0,60 \cdot 0,40 = 0,24$.
26. $0,60 + 0,40 - 0,24 = 0,76$.
27. $\mathbb{P}(VV) = (3/5)(2/4) = 3/10$.
28. $\mathbb{P}(VV) = (3/5)^2 = 9/25$.
29. $\mathbb{P}(VA) + \mathbb{P}(AV) = (3/5)(2/4) + (2/5)(3/4) = 3/5$.
30. A primeira ficha não é devolvida; ela altera o total e a quantidade de cada cor disponíveis na segunda retirada.
31. $\mathbb{P}(PP) = (6/10)(5/9) = 1/3$.
32. Pelo complemento, $1 - \mathbb{P}(PP) = 1 - 1/3 = 2/3$.
33. $(4/52)(3/51) = 1/221$.

34. $(4/52)^2 = (1/13)^2 = 1/169$.
35. Cada peça é boa com probabilidade 0,98; logo, $0,98^2 = 0,9604$.
36. Dois caminhos: $2(0,02)(0,98) = 0,0392$.
37. Sob a hipótese declarada, $0,30^2 = 0,09$.
38. Dias próximos podem compartilhar as mesmas massas de ar e condições atmosféricas; conhecer um dia pode alterar a chance do seguinte.
39. Gerar 500 valores equiprováveis para cara ou coroa, contar as caras e calcular $f_C/500$; comparar com $1/2$.
40. Não. Ela pode oscilar para cima e para baixo; espera-se estabilização aproximada em longo prazo.
41. Como A e A^c são disjuntos e formam Ω , $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = 1$, então $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
42. Decomponha em $A \setminus B$, $B \setminus A$ e $A \cap B$. Somar $\mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(B)$ conta a interseção duas vezes; subtraí-la uma vez produz a união.
43. De $\mathbb{P}(B | A) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(A)$, multiplique por $\mathbb{P}(A)$: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B | A)$.
44. Se são disjuntos, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$. Como $\mathbb{P}(A) > 0$ e $\mathbb{P}(B) > 0$, $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) > 0$; a igualdade de independência falha.
45. Há $\binom{3}{2} = 3$ posições para as caras e cada caminho vale $(1/2)^3$; logo, $3/8$.
46. $1 - \mathbb{P}(KKK) = 1 - (1/2)^3 = 7/8$.
47. $(5/8)(4/7)(3/6) = 5/28$.
48. Pela contagem, $\binom{5}{2}\binom{3}{1}/\binom{8}{3} = 30/56 = 15/28$. A soma dos três caminhos possíveis produz o mesmo valor.
49. $(1/4)^5 = 1/1024$.
50. Pelo complemento, $1 - (3/4)^5 = 1 - 243/1024 = 781/1024$.
51. $\mathbb{P}(D \cap +) = 0,01 \cdot 0,90 = 0,009$. Já $\mathbb{P}(D^c \cap +) = 0,99 \cdot 0,05 = 0,0495$. Assim, $\mathbb{P}(D | +) = 0,009/(0,009 + 0,0495) = 2/13 \approx 15,38\%$.
52. Simular pares de retiradas repondo a ficha; contar os casos com exatamente uma vermelha e dividir pelo total. Comparar a frequência com $2(3/5)(2/5) = 12/25$ e aumentar o número de repetições.
53. Há 36 pares ordenados. As somas 8 são $(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$; portanto, $5/36$.
54. $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6\}$ e $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$; logo, $4/6 = 2/3$.
55. Os complementos também são independentes: $(1 - 0,70)(1 - 0,20) = 0,30 \cdot 0,80 = 0,24$.
56. Entre os 18 que praticam esporte, 8 estudam música: $8/18 = 4/9$.
57. $\mathbb{P}(VA) + \mathbb{P}(AV) = (6/10)(4/9) + (4/10)(6/9) = 48/90 = 8/15$.
58. Com reposição, $2(6/10)(4/10) = 48/100 = 12/25$.

59. Sem reposição, $\mathbb{P}(V_2) = 6/10$, mas $\mathbb{P}(V_2 \mid V_1) = 5/9$. Como $5/9 \neq 3/5$, as retiradas são dependentes.
60. Escolha qual dos três falha: $\binom{3}{1}(0,10)(0,90)^2 = 0,243$.
61. Pelo complemento, $1 - (1 - 0,80)^3 = 1 - 0,2^3 = 0,992$.
62. Programar os dois modelos com a mesma urna e muitas repetições; registrar pares de cores, estimar frequências conjuntas e condicionais, comparar com os valores teóricos e verificar que só com reposição $\hat{\mathbb{P}}(V_2 \mid V_1)$ se aproxima de $\hat{\mathbb{P}}(V_2)$.

15 Síntese final

Síntese

Em qualquer experimento sucessivo, a regra segura é

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A)}.$$

Somente quando A e B são independentes pode-se substituir $\mathbb{P}(B \mid A)$ por $\mathbb{P}(B)$ e escrever $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Eventos disjuntos de probabilidades positivas são dependentes, não independentes. Em árvores, multiplique ao longo de cada caminho e some caminhos disjuntos; em simulações, compare frequências com o modelo teórico sem confundir estabilidade de longo prazo com previsão do próximo resultado.