

Vistas Ortogonais e Perspectiva

Curso completo de Matemática — 9º ano do Ensino Fundamental

Alinhado à habilidade EF09MA17 da BNCC

Sumário

1	Apresentação e objetivos de aprendizagem	1
2	Objeto espacial e representação plana	1
3	Projeção ortogonal	2
4	As vistas ortogonais principais	3
5	Alinhamento, medidas e linhas	4
6	Sólidos formados por cubos	4
7	Reconstrução e ambiguidade	5
7.1	Estratégia de reconstrução	6
8	Desenho em perspectiva	6
8.1	Algoritmo para construir um bloco	7
9	Da vista à perspectiva	7
10	Escala, cotas e validação	8
10.1	Lista de verificação	8
11	Tecnologia digital e elaboração	9
12	Exercícios de consolidação	9
13	Aprofundamento e elaboração	10
14	Avaliação-síntese	11
15	Gabarito comentado	12
16	Síntese final	15

1 Apresentação e objetivos de aprendizagem

Uma fotografia, uma planta e um desenho técnico podem representar o mesmo objeto, mas não comunicam as mesmas informações. A fotografia sugere profundidade; a planta privilegia medidas; um conjunto de vistas ortogonais registra formas observadas em direções perpendiculares. Aprender a converter entre essas representações desenvolve visualização espacial, leitura de projetos e comunicação geométrica precisa.

Ao concluir o curso, espera-se que o estudante seja capaz de:

- distinguir objeto tridimensional, vista ortogonal e desenho em perspectiva;
- reconhecer vistas frontal, superior, lateral direita e lateral esquerda;
- relacionar largura, altura e profundidade entre diferentes vistas;
- desenhar vistas de prismas, composições de blocos e objetos simples;
- reconstruir possibilidades espaciais a partir de vistas planas;
- identificar arestas visíveis, ocultas e coincidentes na projeção;
- representar objetos em perspectiva usando malhas e direções coerentes;
- justificar quando um conjunto de vistas determina ou não um sólido único.

Correspondência com a BNCC

A habilidade **EF09MA17** propõe reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva. Por isso, o curso alterna sistematicamente três ações: *observar*, *projetar* e *reconstruir*. O desenho não será tratado como mera decoração, mas como linguagem matemática submetida a convenções verificáveis.

2 Objeto espacial e representação plana

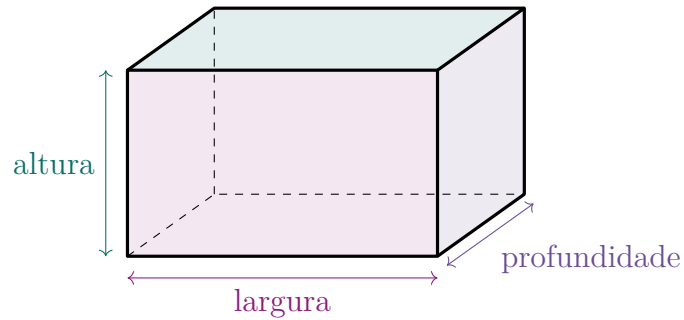
Definição 2.1: Objeto tridimensional

É uma figura que possui extensão em três direções independentes. Neste curso, essas direções serão chamadas de **largura**, **altura** e **profundidade**. A escolha de qual direção recebe cada nome depende da posição adotada como frente.

Definição 2.2: Representação plana

É um desenho produzido sobre um plano para comunicar informações de um objeto tridimensional. Toda representação seleciona informações: uma única folha não contém literalmente a profundidade do objeto.

Paralelepípedo em perspectiva



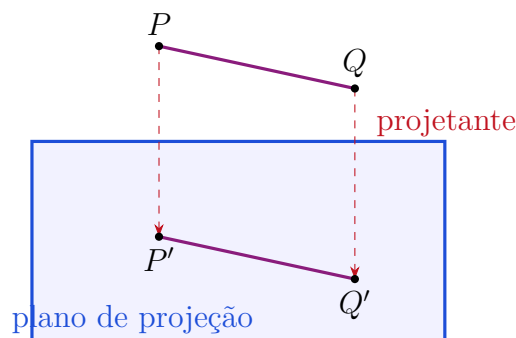
Orientação precisa ser declarada

Sem indicar a frente, os termos “largura” e “profundidade” podem ser trocados por uma rotação do objeto. Em qualquer problema, fixe primeiro o observador ou marque uma face como frontal.

3 Projeção ortogonal

Definição 3.1: Plano de projeção e projetantes

O **plano de projeção** é a superfície sobre a qual a vista será desenhada. Por cada ponto do objeto passa-se uma reta perpendicular a esse plano, chamada **projetante**. A interseção da projetante com o plano é a projeção ortogonal do ponto.



Teorema 3.1: O que a projeção preserva

Uma projeção ortogonal preserva diretamente o comprimento de segmentos paralelos ao plano de projeção. Segmentos perpendiculares ao plano são reduzidos a pontos; segmentos inclinados aparecem encurtados.

Demonstração

Se um segmento é paralelo ao plano, ele e sua imagem são lados opostos de um retângulo e têm a mesma medida. Se o segmento é perpendicular, todos os seus pontos chegam à mesma projeção. No caso inclinado, somente a componente paralela permanece visível, menor que o comprimento original.

Contorno aparente

A vista não é apenas uma coleção de arestas. Ela registra o **contorno aparente**: pontos diferentes do objeto podem coincidir na projeção, e uma aresta pode ficar encoberta por uma face situada à sua frente.

4 As vistas ortogonais principais

Adotaremos três eixos: x para largura, y para profundidade e z para altura. As vistas principais correspondem a observar o objeto ao longo de um desses eixos.

Teorema 4.1: Coordenadas conservadas nas vistas

Para um ponto espacial (x, y, z) :

- a **vista frontal** conserva (x, z) : largura e altura;
- a **vista superior** conserva (x, y) : largura e profundidade;
- a **vista lateral** conserva (y, z) : profundidade e altura.

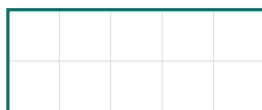
A coordenada na direção do olhar desaparece em cada caso.

Demonstração

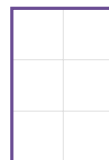
Na vista frontal, todas as projetantes são paralelas ao eixo y ; portanto, pontos que diferem apenas em profundidade chegam à mesma posição (x, z) . Os outros dois casos seguem pelo mesmo raciocínio, trocando a direção das projetantes.



frontal: 5×3



superior: 5×2



lateral: 2×3

Exemplo

Para um bloco retangular de largura 5, altura 3 e profundidade 2, a vista frontal é um retângulo 5×3 , a superior é 5×2 e a lateral é 2×3 . A largura aparece em frontal e superior; a altura, em frontal e lateral; a profundidade, em superior e lateral.

Lateral direita e lateral esquerda

As duas vistas laterais têm as mesmas dimensões externas, mas detalhes assimétricos podem aparecer invertidos ou ficar visíveis apenas de um lado. É necessário declarar de qual lado se observa.

5 Alinhamento, medidas e linhas

Em desenhos técnicos, as vistas são organizadas de modo que medidas comuns fiquem alinhadas. A vista superior é colocada em correspondência com a frontal; a lateral compartilha alturas com a frontal.

Teorema 5.1: Compatibilidade entre vistas

Num conjunto coerente de vistas ortogonais:

$$\text{largura}_{\text{frontal}} = \text{largura}_{\text{superior}}, \quad \text{altura}_{\text{frontal}} = \text{altura}_{\text{lateral}},$$

$$\text{profundidade}_{\text{superior}} = \text{profundidade}_{\text{lateral}}.$$

Se uma dessas igualdades falhar, as vistas não podem representar o mesmo objeto na orientação declarada.

Demonstração

Cada igualdade compara a mesma dimensão física conservada em dois planos de projeção. Alterar o ponto de observação não altera a medida real paralela aos dois planos correspondentes.

Definição 5.1: Tipos de linha

Em uma convenção simplificada, usamos linha contínua espessa para contornos e arestas visíveis; linha tracejada para arestas ocultas; e linha fina auxiliar para alinhamentos, construção e cotas.

Uma vista não é um desenho em perspectiva

Na vista ortogonal, direções paralelas ao plano permanecem paralelas e as medidas não diminuem com a distância do observador. A sensação de profundidade é obtida pela comparação entre vistas, não por linhas inclinadas decorativas.

6 Sólidos formados por cubos

Modelos feitos de cubos unitários permitem transformar visualização espacial em contagem. Se vários cubos ocupam a mesma posição da base, eles formam uma **torre**; sua altura é a quantidade de cubos empilhados.

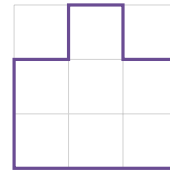
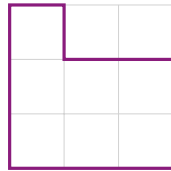
Definição 6.1: Matriz de alturas

Fixada uma base quadriculada, seja $h_{ij} \geq 0$ a altura da torre na célula da linha i e coluna j . A tabela $H = (h_{ij})$ é a matriz de alturas do modelo.

Considere

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2	1	0
3	2	1
0	1	2



superior: alturas frontal: (3, 2, 2) lateral: (2, 3, 2)

Teorema 6.1: Regra dos máximos

Para um modelo de torres verticais:

- a vista superior marca exatamente as células em que $h_{ij} > 0$;
- a altura da vista frontal em cada coluna da base é o maior h_{ij} encontrado ao longo da profundidade;
- a altura da vista lateral em cada linha da base é o maior h_{ij} encontrado ao longo da largura.

Demonstração

Na vista superior, uma torre não vazia encobre a mesma célula da base, qualquer que seja sua altura. Na vista frontal, torres que estão atrás umas das outras têm a mesma posição horizontal; a mais alta determina o contorno visível. A lateral segue o mesmo argumento, trocando largura e profundidade.

Exemplo

Na matriz apresentada, as alturas frontais são (3, 2, 2), pois os máximos das colunas são 3, 2 e 2. As alturas laterais são (2, 3, 2), máximos das linhas. O total de cubos, porém, é a soma de todas as entradas: $2 + 1 + 0 + 3 + 2 + 1 + 0 + 1 + 2 = 12$.

7 Reconstrução e ambiguidade

Reconstruir significa encontrar um ou mais objetos compatíveis com as vistas dadas. Compatibilidade não implica necessariamente unicidade.

Teorema 7.1: Uma única vista geralmente não determina o objeto

Objetos diferentes podem produzir a mesma vista ortogonal. Mesmo três vistas de contorno podem ser insuficientes quando existem cavidades internas ou disposições ocultas.

Demonstração

Um cubo e uma coluna de vários cubos alinhada com a direção do olhar podem projetar o mesmo quadrado. Como a projeção elimina uma coordenada, posições diferentes nessa direção coincidem. Cavidades totalmente internas também não alteram o contorno externo. Esses exemplos provam a não unicidade.

Silhueta não informa todas as torres

Conhecer os máximos de cada linha e coluna não revela automaticamente cada entrada da matriz de alturas. Para contar cubos com certeza, é preciso conhecer as alturas individuais ou receber condições adicionais, como “use o menor número possível de cubos”.

7.1 Estratégia de reconstrução

1. Fixe a orientação e identifique as três dimensões globais.
2. Use a vista superior para determinar posições ocupadas na base.
3. Use a frontal para limitar as alturas ao longo de cada coluna.
4. Use a lateral para limitar as alturas ao longo de cada linha.
5. Construa uma possibilidade e projete-a novamente nas três direções.
6. Se necessário, procure outra possibilidade para testar unicidade.

Atividade investigativa

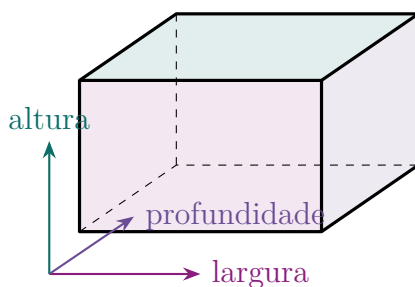
Com cubos de encaixe, construa dois modelos diferentes que tenham a mesma vista frontal. Acrescente a vista superior e verifique se a ambiguidade desaparece. Por fim, registre também a lateral e explique exatamente qual informação cada nova vista acrescentou.

8 Desenho em perspectiva

Definição 8.1: Perspectiva

É uma representação plana que procura comunicar simultaneamente largura, altura e profundidade. Diferentemente de uma vista ortogonal isolada, ela permite perceber várias faces do objeto numa única imagem.

Neste curso, usaremos principalmente uma perspectiva paralela sobre malha: arestas paralelas do objeto são desenhadas em três famílias de direções fixas. É um modelo próximo das perspectivas isométrica ou cavaleira, sem exigir a formalização técnica completa desses sistemas.



Teorema 8.1: Paralelismo coerente

Num desenho em perspectiva paralela, arestas paralelas do objeto devem permanecer paralelas no desenho. Todas as arestas de uma mesma direção espacial seguem a mesma direção gráfica e a mesma regra de escala.

Demonstração

A projeção paralela desloca todos os pontos segundo projetantes paralelas. Dois segmentos paralelos têm vetores proporcionais; suas imagens permanecem proporcionais e, portanto, paralelas, salvo quando são projetadas num único ponto ou segmento degenerado.

Arestas ocultas

Arestas encobertas podem ser omitidas quando a forma já está clara ou desenhadas com linha tracejada quando são necessárias à compreensão. Linhas visíveis e ocultas não devem ter o mesmo destaque.

8.1 Algoritmo para construir um bloco

1. Marque a face frontal com largura e altura escolhidas.
2. A partir de seus vértices, trace segmentos de profundidade paralelos e de mesmo comprimento gráfico.
3. Una os novos extremos preservando paralelismo com a face frontal.
4. Reforce o contorno visível e indique arestas ocultas com tracejado, se necessário.
5. Compare a largura, a altura e a profundidade representadas com as vistas ortogonais.

Perspectiva não autoriza medir qualquer segmento

O comprimento desenhado de uma aresta inclinada depende da convenção de perspectiva. Uma medida real só pode ser lida quando a escala e a direção correspondente foram declaradas. Aparência visual não substitui cota.

9 Da vista à perspectiva

Para construir uma perspectiva a partir das vistas, recupere primeiro as dimensões globais. Depois, transfira reentrâncias, degraus e alturas usando os alinhamentos comuns.

Teorema 9.1: Três pares de medidas compartilhadas

As vistas frontal e superior determinam em conjunto largura, altura e profundidade globais. A lateral permite verificar essas três medidas e localizar detalhes que se sobrepõem nas outras direções. Assim, cada dimensão aparece em exatamente duas vistas principais.

Demonstração

A frontal fornece largura e altura; a superior fornece largura e profundidade. Juntas, fornecem as três dimensões. Pela compatibilidade, a lateral deve repetir altura e profundidade. Detalhes internos ao contorno, porém, ainda podem exigir linhas ocultas ou informações adicionais.

Exemplo

Uma peça tem vista frontal em forma de degrau: largura total 6, altura 4, com a metade direita de altura 2. A vista superior é um retângulo 6×3 . Uma perspectiva compatível é um prisma de profundidade 3 cuja parte direita foi rebaixada de altura 4 para 2. Se a vista superior não mostra divisão de profundidade, o degrau estende-se por toda a profundidade nessa interpretação mais simples.

10 Escala, cotas e validação

Definição 10.1: Escala gráfica do desenho

Se uma unidade do desenho representa k unidades reais, o fator de escala linear é $1 : k$. Medidas lineares são divididas por k ao desenhar e multiplicadas por k ao recuperar o objeto real.

Exemplo

Na escala $1 : 20$, uma aresta real de 80 cm é desenhada com $80/20 = 4$ cm. Uma medida de 2,5 cm no desenho representa $2,5 \cdot 20 = 50$ cm.

Definição 10.2: Cota

Cota é a indicação numérica de uma medida real. Ela prevalece sobre uma estimativa feita diretamente no desenho, especialmente quando a reprodução pode ter sido ampliada ou reduzida.

10.1 Lista de verificação

Antes de concluir uma representação, verifique:

- a frente e o lado de observação estão identificados;
- dimensões compartilhadas coincidem entre as vistas;
- reentrâncias e degraus ocupam posições correspondentes;
- linhas visíveis e ocultas seguem convenções distintas;
- famílias de arestas paralelas permanecem coerentes na perspectiva;
- escala, unidade e cotas não entram em contradição;
- a perspectiva, ao ser projetada novamente, reproduz as vistas dadas.

11 Tecnologia digital e elaboração

Softwares de geometria, desenho técnico e modelagem tridimensional permitem girar um objeto e gerar vistas automaticamente. A tecnologia é mais produtiva quando o estudante prevê o resultado antes de acionar o comando.

Atividade investigativa

Modele uma composição de pelo menos oito cubos. Antes de usar a ferramenta de vistas, desenhe à mão a frontal, a superior e a lateral direita. Gere as vistas no software, compare contornos e linhas ocultas, corrija o modelo ou o desenho e registre a causa de cada divergência.

Elaborar um problema

Para criar uma questão bem determinada, forneça: orientação da frente, vistas suficientes, escala ou unidades e a informação solicitada. Se houver mais de uma resposta possível, diga explicitamente “apresente uma possibilidade” ou acrescente uma condição de unicidade.

12 Exercícios de consolidação

1. Quais são as três dimensões espaciais adotadas neste curso?
2. Explique por que uma representação plana não contém literalmente a profundidade.
3. Defina projeção ortogonal.
4. Como se posicionam as projetantes em relação ao plano de projeção?
5. O que ocorre com um segmento perpendicular ao plano de projeção?
6. O que a vista frontal conserva de um ponto (x, y, z) ?
7. O que a vista superior conserva?
8. O que a vista lateral conserva?
9. Um bloco mede 7 de largura, 4 de altura e 3 de profundidade. Dê as dimensões de sua vista frontal.
10. Dê as dimensões da vista superior do bloco anterior.
11. Dê as dimensões da vista lateral do mesmo bloco.
12. Qual dimensão é compartilhada pelas vistas frontal e superior?
13. Qual dimensão é compartilhada pelas vistas frontal e lateral?
14. Qual dimensão é compartilhada pelas vistas superior e lateral?
15. Uma frontal mede 6×5 e a superior, 6×2 . Quais são as dimensões globais do bloco?
16. A lateral proposta para o item anterior mede 3×5 . Ela é compatível? Justifique.

17. Diferencie linha visível e linha oculta.
18. Diferencie vista ortogonal e perspectiva.
19. Por que é necessário declarar a face frontal?
20. Um cubo é observado perpendicularmente a uma face. Qual é o contorno de sua vista?
21. Uma fileira horizontal de quatro cubos unitários é vista de frente. Descreva a frontal.
22. A mesma fileira é alinhada na direção da profundidade. Descreva a frontal.
23. Uma torre de cinco cubos é vista de cima. Descreva a superior.
24. Para $H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, quantos cubos há no modelo?
25. Determine as alturas da vista frontal da matriz do item anterior, tomando as colunas como posições horizontais.
26. Determine as alturas da vista lateral, tomando as linhas como posições de profundidade.
27. Quais células aparecem ocupadas na vista superior do item 24?
28. Explique por que a vista superior comum não revela a altura das torres.
29. Para $H = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, determine total de cubos, frontal e lateral.
30. Para $H = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, determine o total de cubos.
31. Determine as alturas frontais da matriz do item anterior.
32. Determine as alturas laterais da mesma matriz.
33. Duas peças diferentes podem ter a mesma vista frontal? Dê uma justificativa.
34. Por que três contornos externos podem não revelar uma cavidade interna?
35. Cite as três famílias de direções usadas ao desenhar um bloco em perspectiva paralela.
36. Como devem ser desenhadas arestas espaciais paralelas numa perspectiva paralela?
37. Em que situação uma aresta oculta pode ser tracejada?
38. Na escala 1 : 10, quanto mede no desenho uma aresta real de 35 cm?
39. Na escala 1 : 25, o que representa uma medida desenhada de 4 cm?
40. Explique por que uma cota prevalece sobre a medida feita com régua na impressão.

13 Aprofundamento e elaboração

41. Demonstre, por um retângulo formado pelas projetantes, que um segmento paralelo ao plano mantém seu comprimento.

42. Explique algebricamente por que a vista frontal elimina y e conserva (x, z) .
43. Verifique a compatibilidade: frontal 8×5 , superior 8×4 e lateral 4×5 .
44. Corrija apenas uma medida para tornar compatíveis: frontal 9×6 , superior 9×3 , lateral 4×6 .
45. Para $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, determine total de cubos, vista frontal e vista lateral.
46. Encontre uma matriz 2×2 com entradas positivas, frontal $(3, 2)$, lateral $(3, 2)$ e o menor número possível de cubos.
47. Mostre duas matrizes 2×2 distintas que tenham frontal $(2, 2)$ e lateral $(2, 2)$.
48. Um modelo tem base superior totalmente ocupada 2×3 , frontal $(2, 3, 1)$ e laterais com máximos $(3, 2)$. Proponha uma matriz de alturas compatível.
49. Explique por que a soma das alturas da vista frontal não fornece, em geral, o total de cubos.
50. Crie um objeto em forma de degrau com largura 6, profundidade 2 e alturas 4 e 2 em duas faixas de largura 3. Descreva suas três vistas.
51. Escreva um algoritmo para reconstruir uma composição de cubos a partir de vista superior numerada, frontal e lateral.
52. Elabore um problema com vistas ortogonais que admita exatamente duas soluções e explique como verificá-las.

14 Avaliação-síntese

53. Um paralelepípedo mede 10 cm de largura, 6 cm de altura e 4 cm de profundidade. Dê as dimensões das três vistas principais.
54. Uma peça tem frontal 7×5 , superior 7×3 e lateral 3×4 . As vistas são compatíveis? Corrija se necessário.
55. Para $H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, determine o número de cubos.
56. Determine as alturas frontais e laterais da matriz anterior.
57. Descreva a vista superior não numerada da mesma composição.
58. Na escala 1 : 50, uma peça de 2,5 m deve ser desenhada com quantos centímetros?
59. Justifique rigorosamente por que uma única vista não determina, em geral, um sólido.
60. Explique como frontal e superior fornecem as três dimensões globais e qual é a função de verificação da lateral.
61. Apresente cinco passos ordenados para desenhar um bloco em perspectiva a partir de suas vistas.

62. Proponha e justifique um protocolo digital para validar vistas desenhadas manualmente.

15 Gabarito comentado

1. Largura, altura e profundidade.
2. Porque o suporte é bidimensional; a terceira dimensão precisa ser codificada por vistas, linhas inclinadas, escala, sombreado ou outra convenção.
3. É a projeção produzida por retas projetantes perpendiculares ao plano de representação.
4. São perpendiculares ao plano e paralelas entre si.
5. Todos os seus pontos projetam-se na mesma posição; ele é reduzido a um ponto.
6. Conserva (x, z) : largura e altura.
7. Conserva (x, y) : largura e profundidade.
8. Conserva (y, z) : profundidade e altura.
9. 7×4 .
10. 7×3 .
11. 3×4 .
12. A largura.
13. A altura.
14. A profundidade.
15. Largura 6, altura 5 e profundidade 2.
16. Não. A profundidade lateral deveria ser 2, e não 3; a lateral compatível mede 2×5 .
17. Linha contínua espessa representa contorno ou aresta visível; tracejada representa aresta encoberta relevante.
18. A vista ortogonal mostra duas dimensões numa direção perpendicular; a perspectiva reúne três direções e sugere profundidade numa imagem.
19. Porque uma rotação pode trocar largura e profundidade e modificar quais detalhes são frontais ou laterais.
20. Um quadrado congruente à face observada.
21. Um retângulo 4×1 , dividido ou não em quatro quadrados conforme se representem as arestas entre cubos.
22. Um quadrado 1×1 : os quatro cubos se sobrepõem na projeção frontal.
23. Um quadrado 1×1 : a altura desaparece na projeção superior.
24. $1 + 2 + 3 + 0 = 6$ cubos.

25. Máximos das colunas: $(3, 2)$.
26. Máximos das linhas: $(2, 3)$.
27. Todas, exceto a célula de altura 0.
28. Porque todas as alturas positivas ocupam o mesmo quadrado da base quando observadas de cima.
29. Total 8; frontal $(2, 2)$; lateral $(2, 2)$.
30. $0 + 4 + 1 + 2 + 1 + 3 = 11$ cubos.
31. Máximos das colunas: $(2, 4, 3)$.
32. Máximos das linhas: $(4, 3)$.
33. Sim. A projeção elimina a profundidade; elementos situados em profundidades diferentes podem produzir o mesmo contorno frontal.
34. Porque uma cavidade fechada não altera os pontos extremos que formam os contornos projetados.
35. Direções gráficas de largura, altura e profundidade.
36. Devem permanecer paralelas e obedecer à mesma regra de escala na direção correspondente.
37. Quando está encoberta, mas é necessária para compreender a forma ou a posição de um detalhe.
38. $35/10 = 3,5$ cm.
39. $4 \cdot 25 = 100$ cm.
40. Porque a impressão pode ser redimensionada; a cota registra a medida real declarada pelo projeto.
41. As projetantes pelos extremos são paralelas, perpendiculares ao plano e têm igual distância até ele. Com o segmento e sua projeção, formam um retângulo; lados opostos são congruentes.
42. Projetar frontalmente equivale a enviar (x, y, z) em (x, z) . Variar apenas y não altera a imagem; logo, y é eliminado.
43. Sim: largura 8 coincide, altura 5 coincide e profundidade 4 coincide.
44. A profundidade deve coincidir. Corrigindo a lateral para 3×6 , todas as vistas se tornam compatíveis.
45. Total $2 + 0 + 1 + 1 + 3 + 2 + 0 + 2 + 1 = 12$; frontal $(2, 3, 2)$; lateral $(2, 3, 2)$.
46. Uma possibilidade mínima é $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Os máximos são os pedidos e a soma é 7. Cada máximo exigido precisa aparecer; a disposição diagonal permite compartilhá-los sem elevar outra célula.
47. Por exemplo, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Em ambas, máximos de linhas e colunas são $(2, 2)$.

48. Uma possibilidade é $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. As colunas têm máximos $(2, 3, 1)$, as linhas têm máximos $(3, 2)$ e todas as células são positivas.
49. A frontal registra apenas o maior valor em cada coluna e oculta as demais torres. A soma desses máximos ignora cubos situados atrás.
50. Frontal: degrau de largura total 6, com alturas 4 e 2 em faixas de largura 3. Superior: retângulo 6×2 com a divisão em $3 + 3$. Lateral: retângulo 2×4 , pois a parte alta encobre a baixa.
51. Entrada: orientação e vistas. Registrar células ocupadas e alturas dadas; impor a cada célula os limites dos máximos frontal e lateral; construir uma matriz candidata; recalculá-los; comparar as três vistas; repetir ou listar alternativas.
52. Resposta pessoal. Deve apresentar dados suficientes, duas construções distintas e a reprojeção de ambas, provando que satisfazem exatamente as condições; também deve justificar por que não existe uma terceira.
53. Frontal 10×6 ; superior 10×4 ; lateral 4×6 .
54. Não: a altura frontal é 5 e a lateral indica 4. Corrigir a lateral para 3×5 ou, alternativamente, alterar a altura frontal para 4; a primeira correção preserva as duas vistas já concordantes em largura.
55. $1 + 3 + 0 + 2 + 2 + 4 = 12$ cubos.
56. Frontal: máximos das colunas $(2, 3, 4)$; lateral: máximos das linhas $(3, 4)$.
57. Cinco células ocupadas; somente a terceira célula da primeira linha, correspondente ao zero, fica vazia.
58. $2,5 \text{ m} = 250 \text{ cm}$; no desenho, $250/50 = 5 \text{ cm}$.
59. A projeção elimina uma coordenada. Assim, pontos ou blocos distintos alinhados com a direção do olhar coincidem; por exemplo, um cubo e uma fileira de cubos em profundidade têm a mesma frontal quadrada.
60. A frontal fornece largura e altura; a superior fornece largura e profundidade. Juntas dão as três dimensões. A lateral repete altura e profundidade e verifica coerência, além de revelar detalhes sobrepostos.
61. Fixar orientação; recuperar dimensões; desenhar a face frontal; traçar profundidades paralelas e coerentes; fechar faces, distinguir arestas visíveis e ocultas e reprojetar para validar.
62. Modelar o objeto; prever e desenhar manualmente as três vistas; gerar projeções ortogonais no software; comparar contornos, medidas e linhas ocultas; investigar divergências; corrigir e repetir após girar ou alterar o modelo.

16 Síntese final

Síntese

Com largura em x , profundidade em y e altura em z :

$\text{frontal} : (x, y, z) \mapsto (x, z), \quad \text{superior} : (x, y, z) \mapsto (x, y),$

$\text{lateral} : (x, y, z) \mapsto (y, z).$

Cada vista elimina a coordenada paralela ao olhar e conserva duas dimensões. Em modelos de cubos, a superior identifica posições ocupadas, enquanto frontal e lateral registram máximos de alturas. A perspectiva reúne as três direções numa imagem, mantendo paralelismo e convenções de visibilidade. Uma representação correta deve ser compatível, cotada, orientada e validada por reprojeção.