

Teorema de Tales e Proporcionalidade

Curso completo de Matemática — 9º ano do Ensino Fundamental

Alinhado à habilidade EF09MA14 da BNCC

Sumário

1	Apresentação e objetivos de aprendizagem	1
2	Razão, proporção e correspondência	1
3	Feixe de paralelas e transversais	2
4	Teorema de Tales: forma geral	2
5	Forma triangular do Teorema de Tales	3
6	Recíproca e prova de paralelismo	4
7	Divisão proporcional de segmentos	5
8	Equações e estratégia de resolução	5
9	Escalas, mapas e modelos	6
10	Medições indiretas	6
10.1	Sombras	6
10.2	Visada, espelhos e alinhamentos	7
10.3	Topografia elementar	7
11	Extensão: Teorema da Bissetriz Interna	7
12	Tecnologia e investigação	7
13	Erros frequentes e controle de coerência	8
14	Exercícios de consolidação	8
14.1	Bloco A — Conceitos	8
14.2	Bloco B — Cálculo direto	9
14.3	Bloco C — Álgebra e aplicações	9

14.4 Bloco D — Análise e demonstração	10
15 Questões de aprofundamento	10
16 Avaliação-síntese	10
17 Gabarito comentado	11
17.1 Bloco A	11
17.2 Bloco B	11
17.3 Bloco C	12
17.4 Bloco D	12
17.5 Questões de aprofundamento	13
17.6 Avaliação-síntese	13
18 Resumo final	14

1 Apresentação e objetivos de aprendizagem

Quando retas paralelas cortam duas ou mais transversais, os segmentos correspondentes aparecem na mesma proporção. Essa ideia, conhecida como Teorema de Tales, conecta paralelismo, semelhança e escala e permite calcular medidas que não podem ser obtidas diretamente.

Ao concluir este curso, espera-se que o estudante seja capaz de:

- reconhecer feixes de paralelas, transversais e segmentos correspondentes;
- enunciar e demonstrar o Teorema de Tales;
- aplicar a forma triangular e a forma geral do teorema;
- utilizar a recíproca para provar paralelismo;
- dividir segmentos em partes proporcionais;
- resolver equações com razões de segmentos;
- interpretar escalas, plantas, mapas e ampliações;
- realizar medições indiretas por sombras, visada e alinhamento;
- elaborar problemas e validar a coerência dos resultados.

Correspondência com a BNCC

Este curso desenvolve a habilidade **EF09MA14**: resolver e elaborar problemas de aplicação do Teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

2 Razão, proporção e correspondência

Definição 2.1: Razão

Para $a, b > 0$, a razão de a para b é a/b . Ao comparar comprimentos, suas medidas devem estar na mesma unidade.

Definição 2.2: Proporção

É uma igualdade entre razões:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad b, d \neq 0.$$

Sua propriedade fundamental é $ad = bc$.

Exemplo

$$\frac{3}{5} = \frac{x}{20} \implies 5x = 60 \implies x = 12.$$

Definição 2.3: Segmentos correspondentes

São segmentos determinados pelo mesmo par de retas paralelas, cada um sobre uma transversal diferente. A ordem das paralelas determina a correspondência.

Mesmo sentido nas razões

Se uma razão é “primeiro segmento dividido pelo segundo”, a outra deve manter o mesmo sentido. Misturar a/b com d/c inverte apenas uma das razões e produz uma equação incorreta.

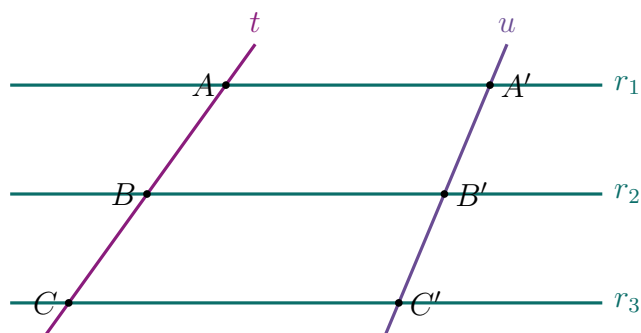
3 Feixe de paralelas e transversais

Definição 3.1: Feixe de retas paralelas

É um conjunto de duas ou mais retas distintas e paralelas entre si.

Definição 3.2: Reta transversal

É uma reta que intersecta duas ou mais retas de um conjunto em pontos distintos. Também é chamada secante ao feixe.



Os pares AB e $A'B'$ correspondem; o mesmo vale para BC e $B'C'$.

4 Teorema de Tales: forma geral

Teorema 4.1: Teorema de Tales

Um feixe de retas paralelas determina, sobre duas transversais, segmentos correspondentes proporcionais. Na figura anterior,

$$\boxed{\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}}.$$

Também valem, quando definidos,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} \quad \text{e} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}.$$

Demonstração a partir da semelhança

Suponha inicialmente que as transversais se encontrem em O . Para cada paralela, os triângulos com vértice O são semelhantes por AA. Existe, então, um mesmo fator k que transforma as distâncias medidas em uma transversal nas distâncias correspondentes da outra. Subtraindo distâncias até paralelas consecutivas, obtemos

$$A'B' = k AB, \quad B'C' = k BC.$$

Logo, $A'B'/B'C' = AB/BC$. Se as transversais forem paralelas, introduz-se uma terceira transversal auxiliar; aplicando o caso anterior duas vezes, a mesma proporcionalidade é obtida.

Observação

O paralelismo é a hipótese que mantém constante o fator entre as transversais. Sem ele, os segmentos podem assumir razões arbitrárias.

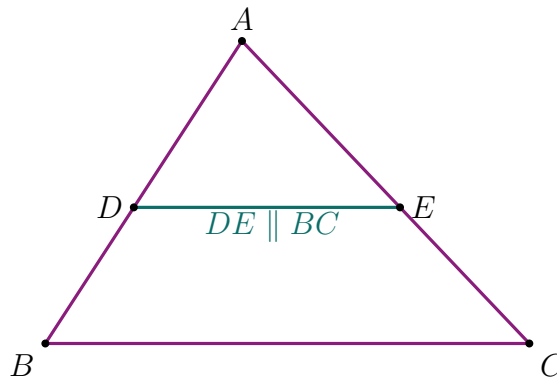
Exemplo

Três paralelas determinam segmentos 4 e 6 em uma transversal e x e 9 na outra. Então

$$\frac{4}{6} = \frac{x}{9} \implies x = 6.$$

5 Forma triangular do Teorema de Tales

No triângulo ABC , considere $D \in AB$ e $E \in AC$, com $DE \parallel BC$.



Teorema 5.1: Tales no triângulo

Nas condições anteriores,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

e

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

Demonstração

Como $DE \parallel BC$, os ângulos correspondentes são congruentes e o ângulo A é comum. Logo, $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ por AA, o que fornece a primeira cadeia de razões.

Para a segunda, escreva $AB = AD + DB$ e $AC = AE + EC$. Da igualdade $AD/AB = AE/AC$,

$$\frac{AD}{AD + DB} = \frac{AE}{AE + EC}.$$

Multiplicando em cruz e cancelando $AD \cdot AE$, resulta $AD \cdot EC = AE \cdot DB$, equivalente a $AD/DB = AE/EC$.

Exemplo

Se $AD = 6$, $DB = 4$ e $AE = 9$, então

$$\frac{6}{4} = \frac{9}{EC} \implies EC = 6.$$

6 Recíproca e prova de paralelismo

Teorema 6.1: Recíproca do Teorema de Tales

No triângulo ABC , se $D \in AB$, $E \in AC$ e

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC},$$

então $DE \parallel BC$.

Demonstração

Por D , trace a paralela a BC , que encontra AC em E' . Pelo Teorema de Tales,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}.$$

Por hipótese, essa razão também é AE/EC . Em um segmento fixo AC , existe um único ponto interior que realiza uma razão positiva dada. Portanto, $E' = E$, e a reta DE é paralela a BC .

Atenção

Uma igualdade de apenas um par de comprimentos, como $AD = AE$, não prova paralelismo. A recíproca exige a proporcionalidade das divisões nos dois lados.

7 Divisão proporcional de segmentos

Teorema 7.1: Divisão em uma razão dada

Se um segmento de comprimento L é dividido em partes x e y na razão $p : q$, então

$$x = \frac{p}{p+q}L, \quad y = \frac{q}{p+q}L.$$

Demonstração

Da razão $x/y = p/q$, existe $k > 0$ tal que $x = pk$ e $y = qk$. Como $x + y = L$, temos $(p + q)k = L$; logo, $k = L/(p + q)$.

Exemplo

Dividir 30 na razão $2 : 3$ produz

$$\frac{2}{5} \cdot 30 = 12, \quad \frac{3}{5} \cdot 30 = 18.$$

Construção com paralelas

Para dividir um segmento AB em cinco partes iguais, trace uma semirreta com origem em A , marque nela cinco segmentos congruentes, uma o quinto ponto a B e trace paralelas por cada ponto intermediário. Pelo Teorema de Tales, as interseções dividem AB em cinco partes iguais.

8 Equações e estratégia de resolução

Roteiro seguro

1. Confirme e registre quais retas são paralelas.
2. Marque as duas transversais e a ordem das interseções.
3. Associe segmentos determinados pelo mesmo par de paralelas.
4. Monte razões no mesmo sentido.
5. Resolva a proporção e descarte comprimentos não positivos.
6. Verifique a soma das partes e a plausibilidade do fator.

Incógnita em segmentos parciais

Se

$$\frac{x+1}{6} = \frac{x+3}{9},$$

então $9(x+1) = 6(x+3)$, de onde $3x = 9$ e $x = 3$. A verificação fornece $4/6 = 6/9 = 2/3$.

Razão entre parte e total

Se $DE \parallel BC$, $AD = 6$, $AB = 15$ e $AC = 20$, então

$$\frac{AE}{20} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5},$$

portanto $AE = 8$.

9 Escalas, mapas e modelos

Definição 9.1: Escala numérica

Na escala $1 : n$, uma unidade no desenho representa n unidades reais, depois de ambas serem expressas na mesma unidade.

Exemplo

Em uma planta na escala $1 : 500$, 6,4 cm representam

$$6,4 \cdot 500 = 3200 \text{ cm} = 32 \text{ m}.$$

Teorema 9.1: Composição de escalas

Se uma transformação tem fator k_1 e a seguinte tem fator k_2 , o fator total é $k_1 k_2$.

Conversão de unidades

Uma escala é uma razão sem unidade. Não compare centímetros no mapa com metros reais antes de converter uma das medidas.

10 Medições indiretas

10.1 Sombras

Raios solares aproximadamente paralelos produzem triângulos semelhantes. Se um objeto de altura h projeta sombra s e outro de altura H projeta sombra S , então

$$\frac{H}{S} = \frac{h}{s}.$$

Exemplo

Uma haste de 1,5 m projeta sombra de 2 m; uma árvore projeta sombra de 12 m. Assim, $H/12 = 1,5/2$ e $H = 9$ m.

10.2 Visada, espelhos e alinhamentos

Linhas de visão e reflexos podem criar triângulos semelhantes. Para aplicar a proporcionalidade, é necessário justificar os ângulos iguais: perpendicularidade com o chão, raios paralelos ou igualdade entre ângulos de incidência e reflexão.

10.3 Topografia elementar

Margens, ruas e obstáculos podem impedir a medição direta. Constrói-se um triângulo auxiliar acessível e uma linha paralela à direção inacessível; o Teorema de Tales transporta a razão para a medida procurada.

11 Extensão: Teorema da Bissetriz Interna

Teorema 11.1: Teorema da bissetriz interna

No triângulo ABC , se AD é bissetriz de $\angle A$ e $D \in BC$, então

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Demonstração

Por C , trace uma paralela a AD que encontre o prolongamento de AB em E . As relações de ângulos mostram que $\triangle ACE$ é isósceles, com $AE = AC$. O Teorema de Tales aplicado às transversais BC e BE , cortadas pelas paralelas AD e CE , fornece $BD/DC = AB/AE$. Substituindo $AE = AC$, obtém-se o resultado.

Observação

Esta seção é uma extensão: mostra como paralelismo e proporcionalidade também fundamentam outros teoremas importantes.

12 Tecnologia e investigação

Geometria dinâmica

Construa $\triangle ABC$, marque $D \in AB$ e trace por D a paralela a BC , encontrando AC em E . Exiba AD/DB , AE/EC , AD/AB e AE/AC . Arraste A, B, C, D e observe as igualdades. Depois, retire a condição de paralelismo e verifique que elas deixam de ser invariantes.

Experimento e prova

A invariância numérica apoia a conjectura, mas a demonstração por semelhança explica por que o resultado vale para todas as configurações permitidas.

13 Erros frequentes e controle de coerência

Erros que devem ser evitados

- aplicar Tales sem retas paralelas;
- comparar segmentos que não são correspondentes;
- inverter somente uma das razões;
- confundir parte/parte com parte/total;
- esquecer que $AB = AD + DB$ e $AC = AE + EC$;
- ignorar unidades em problemas de escala;
- aceitar valores negativos para comprimentos;
- confiar na aparência de um desenho fora de escala.

Conjectura 13.1: Afirmação para testar

“Duas transversais quaisquer sempre determinam segmentos proporcionais.”

Falsa. A proporcionalidade constante decorre de um feixe de paralelas. Sem essa hipótese, mover uma das retas altera apenas alguns segmentos e destrói as razões.

14 Exercícios de consolidação

14.1 Bloco A — Conceitos

1. Defina razão e proporção.
2. Defina feixe de paralelas e reta transversal.
3. O que são segmentos correspondentes?
4. Enuncie o Teorema de Tales na forma geral.
5. Enuncie a forma triangular do teorema.
6. Justifique por que $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ quando $DE \parallel BC$.
7. Enuncie a recíproca do Teorema de Tales.
8. Explique a diferença entre razão parte/parte e parte/total.
9. Como dividir um segmento L na razão $p : q$?
10. Defina escala $1 : n$.
11. Por que as unidades devem ser iguais em uma escala?
12. Explique por que o paralelismo é indispensável.

14.2 Bloco B — Cálculo direto

1. Resolva $3/5 = x/20$.
2. Se $AD = 4$, $DB = 6$ e $AE = 8$, determine EC .
3. Se $DE \parallel BC$, $AD = 6$, $AB = 15$ e $AC = 20$, determine AE .
4. Se $AE = 7$, $EC = 3$ e $AD = 14$, determine DB .
5. Se $DE = 8$, $BC = 20$ e $AD = 6$, determine AB .
6. Se $AD = 5$, $DB = 7$ e $EC = 14$, determine AE .
7. Paralelas determinam segmentos 2, 3 em uma transversal e 4, x na outra. Determine x .
8. Segmentos correspondentes medem 5, 8 e x , 12, 8. Determine x .
9. Divida 30 na razão 2 : 3.
10. Em escala 1 : 500, determine a medida real de 6,4 cm em metros.
11. Uma haste de 1,5 m tem sombra de 2 m. Determine a altura de uma árvore com sombra de 12 m.
12. Resolva $(x + 1)/6 = (x + 3)/9$.

14.3 Bloco C — Álgebra e aplicações

1. Se $AD = 3x - 1$, $DB = x + 1$, $AE = 10$ e $EC = 5$, determine x .
2. Se $AD = 6$, $AB = x$, $AE = 9$ e $AC = 15$, determine x .
3. Se $DE = x + 2$, $BC = 20$, $AD = 6$ e $AB = 15$, determine x .
4. Resolva $x/(x + 2) = 6/9$.
5. Em um mapa na escala 1 : 25 000, uma distância mede 7,2 cm. Determine a distância real em quilômetros.
6. Uma maquete em escala 1 : 50 apresenta altura de 24 cm. Determine a altura real em metros.
7. Uma avenida possui três ruas paralelas. Em um lado, os quarteirões medem 80 e 120 m; no outro, o primeiro mede 100 m. Determine o segundo.
8. Uma pessoa de 1,8 m projeta sombra de 1,2 m. Um prédio projeta sombra de 18 m. Determine sua altura.
9. Os olhos de uma pessoa estão a 1,6 m; ela está a 2 m de um espelho, e uma torre está a 25 m dele. Determine a altura da torre.
10. Em $\triangle ABC$, $DE \parallel BC$, $AD = 8$, $DB = 4$ e $DE = 10$. Determine BC .
11. Divida 84 na razão 3 : 4.
12. Três intervalos correspondentes medem 2, 3, 5 numa transversal e 4, 6, x na outra. Determine x e verifique a constância.

14.4 Bloco D — Análise e demonstração

1. Demonstre a forma triangular de Tales por AA.
2. Deduza $AD/DB = AE/EC$ a partir de $AD/AB = AE/AC$.
3. Demonstre a recíproca do Teorema de Tales.
4. Demonstre a fórmula de divisão de L na razão $p : q$.
5. Explique a demonstração do caso geral usando transversais concorrentes.
6. Prove que paralelas igualmente espaçadas determinam segmentos iguais em qualquer transversal.
7. Demonstre o Teorema da Bissetriz Interna com uma paralela auxiliar.
8. Construa um contraexemplo verbal para o uso de Tales sem paralelismo.

15 Questões de aprofundamento

1. Em $\triangle ABC$, $DE \parallel BC$, $AD : DB = 2 : 3$, $AB = 25$, $AC = 35$ e $BC = 20$. Determine AD , DB , AE , EC , DE .
2. Quatro paralelas determinam três segmentos na razão $2 : 3 : 5$. Se o total na outra transversal é 40, determine os três segmentos.
3. Uma bissetriz interna divide o lado oposto em 12 e 18. Se o menor lado adjacente mede 10, determine o maior.
4. Em $\triangle ABC$, $DE \parallel BC$ e $AD/AB = 3/5$. Determine as razões entre perímetros e entre áreas de ADE e ABC .
5. Resolva $(2x - 1)/(x + 2) = 5/4$ e verifique se as medidas resultantes são positivas.
6. Explique por que segmentos iguais em uma transversal não garantem segmentos iguais na outra se as retas de corte não forem paralelas.

16 Avaliação-síntese

1. Enuncie o Teorema de Tales.
2. Identifique a hipótese geométrica indispensável.
3. Resolva $4/7 = x/21$.
4. Se $AD = 6$, $DB = 9$, $AE = 8$, determine EC .
5. Se $DE \parallel BC$, $AD = 5$, $AB = 8$ e $BC = 24$, determine DE .
6. Explique como a semelhança demonstra a forma triangular.
7. Divida 96 na razão $5 : 3$.

8. Em escala 1 : 2000, quanto representam 3,5 cm em metros?
9. Uma haste de 2 m projeta sombra de 1,6 m. Determine a altura de um poste cuja sombra mede 10 m.
10. Enuncie e explique a recíproca.
11. Analise o erro em $AD/DB = EC/AE$ quando os segmentos são correspondentes na mesma ordem.
12. Elabore e resolva um problema simples envolvendo paralelas e transversais.

17 Gabarito comentado

17.1 Bloco A

1. Razão é um quociente; proporção é igualdade entre duas razões.
2. Feixe: retas paralelas; transversal: reta que as intersecta.
3. São determinados pelo mesmo par de paralelas em transversais diferentes.
4. Paralelas cortadas por transversais determinam segmentos correspondentes proporcionais.
5. Se $DE \parallel BC$, então $AD/AB = AE/AC = DE/BC$ e $AD/DB = AE/EC$.
6. Ângulo A comum e ângulos correspondentes congruentes: AA.
7. Divisões proporcionais de dois lados implicam paralelismo do segmento interno ao terceiro lado.
8. Parte/parte compara divisões internas; parte/total compara uma divisão ao lado inteiro.
9. $pL/(p+q)$ e $qL/(p+q)$.
10. Uma unidade no desenho representa n unidades reais.
11. Para que a razão seja adimensional e a conversão correta.
12. É o paralelismo que mantém o fator de proporcionalidade constante.

17.2 Bloco B

1. $x = 12$.
2. $4/6 = 8/EC$, logo $EC = 12$.
3. $AE/20 = 6/15$, logo $AE = 8$.
4. $14/DB = 7/3$, logo $DB = 6$.
5. $8/20 = 6/AB$, logo $AB = 15$.
6. $5/7 = AE/14$, logo $AE = 10$.

7. $2/3 = 4/x$, $\log_0 x = 6$.
8. $5/8 = x/12,8$, $\log_0 x = 8$.
9. 12 e 18.
10. $6,4 \cdot 500 = 3200 \text{ cm} = 32 \text{ m}$.
11. $H/12 = 1,5/2$, $\log_0 H = 9 \text{ m}$.
12. $9x + 9 = 6x + 18$, $\log_0 x = 3$.

17.3 Bloco C

1. $(3x - 1)/(x + 1) = 10/5 = 2$, $\log_0 x = 3$.
2. $6/x = 9/15$, $\log_0 x = 10$.
3. $(x + 2)/20 = 6/15$, $\log_0 x = 6$.
4. $9x = 6x + 12$, $\log_0 x = 4$.
5. $7,2 \cdot 25\,000 = 180\,000 \text{ cm} = 1,8 \text{ km}$.
6. $24 \cdot 50 = 1200 \text{ cm} = 12 \text{ m}$.
7. $80/120 = 100/x$, $\log_0 x = 150 \text{ m}$.
8. $H/18 = 1,8/1,2$, $\log_0 H = 27 \text{ m}$.
9. $H/25 = 1,6/2$, $\log_0 H = 20 \text{ m}$.
10. $AB = 12$ e $DE/BC = AD/AB = 8/12$; $\log_0 BC = 15$.
11. 36 e 48.
12. O fator é 2: $x = 10$; as razões $4/2$, $6/3$ e $10/5$ valem 2.

17.4 Bloco D

1. $DE \parallel BC$ produz dois pares de ângulos congruentes; logo, $ADE \sim ABC$ e os lados são proporcionais.
2. Substituir $AB = AD + DB$ e $AC = AE + EC$, multiplicar em cruz e cancelar $AD \cdot AE$.
3. Trace por D a paralela a BC e use a unicidade do ponto que divide AC na razão dada.
4. Escreva $x = pk$, $y = qk$ e use $x + y = L$.
5. Triângulos de vértice comum e bases paralelas são semelhantes; o mesmo fator multiplica distâncias e suas diferenças.
6. Intervalos iguais em uma transversal têm razão 1; por Tales, os correspondentes também têm razão 1.
7. A paralela auxiliar cria um triângulo isósceles e Tales fornece $BD/DC = AB/AC$.

8. Basta mover uma reta não paralela: um intervalo muda sem obrigar o correspondente a mudar na mesma proporção.

17.5 Questões de aprofundamento

1. $AD = 10$, $DB = 15$; fator $AD/AB = 2/5$, então $AE = 14$, $EC = 21$ e $DE = 8$.
2. A soma das partes é 10; fator 4. Segmentos 8, 12, 20.
3. $12/18 = 10/x$, logo $x = 15$.
4. Razão de perímetros $3/5$; razão de áreas $(3/5)^2 = 9/25$.
5. $4(2x - 1) = 5(x + 2)$, então $8x - 4 = 5x + 10$ e $x = 14/3$. As expressões são positivas.
6. Sem paralelismo, não há fator único entre as transversais; a igualdade em uma delas não é transportada para a outra.

17.6 Avaliação-síntese

1. Paralelas cortadas por transversais determinam segmentos correspondentes proporcionais.
2. As retas do feixe devem ser paralelas.
3. $x = 12$.
4. $6/9 = 8/EC$, logo $EC = 12$.
5. $DE/24 = 5/8$, logo $DE = 15$.
6. A paralela produz ângulos correspondentes congruentes; AA implica proporcionalidade dos lados.
7. 60 e 36.
8. $3,5 \cdot 2000 = 7000$ cm = 70 m.
9. $H/10 = 2/1,6$, logo $H = 12,5$ m.
10. Se dois lados são divididos na mesma razão, o segmento que une os pontos é paralelo ao terceiro lado.
11. EC/AE inverte apenas a segunda razão; o correto é $AD/DB = AE/EC$.
12. Resposta pessoal, com paralelismo explícito, razões correspondentes, solução positiva e unidade.

18 Resumo final

Síntese

- Feixes de paralelas determinam segmentos proporcionais nas transversais.
- No triângulo, $DE \parallel BC$ implica $ADE \sim ABC$.
- $AD/AB = AE/AC = DE/BC$ e $AD/DB = AE/EC$.
- A recíproca transforma proporcionalidade em prova de paralelismo.
- Dividir L em $p : q$ produz $pL/(p + q)$ e $qL/(p + q)$.
- Escalas exigem unidades iguais e razões no mesmo sentido.
- Sombras, mapas e medições indiretas são aplicações da mesma estrutura.
- Toda solução deve confirmar paralelismo, correspondência e positividade.

Paralelismo preserva razões e torna distâncias inacessíveis calculáveis.