

# Teorema de Pitágoras

Curso completo de Matemática — 9º ano do Ensino Fundamental

Alinhado às habilidades EF09MA13 e EF09MA14 da BNCC

---

## Sumário

|      |                                                 |    |
|------|-------------------------------------------------|----|
| 1    | Apresentação e objetivos de aprendizagem        | 1  |
| 2    | Triângulo retângulo e linguagem                 | 1  |
| 3    | Enunciado e interpretação geométrica            | 2  |
| 4    | Demonstração por semelhança                     | 3  |
| 5    | Demonstração por rearranjo de áreas             | 3  |
| 6    | Recíproca do Teorema de Pitágoras               | 4  |
| 7    | Classificação por comparação de quadrados       | 4  |
| 8    | Ternas pitagóricas                              | 5  |
| 9    | Cálculo de lados e uso de radicais              | 5  |
| 10   | Consequências em figuras planas                 | 6  |
| 11   | Distância no plano cartesiano                   | 7  |
| 12   | Aplicações cotidianas e espaciais               | 7  |
| 12.1 | Escadas, rampas e cabos . . . . .               | 7  |
| 12.2 | Diagonal de um paralelepípedo . . . . .         | 8  |
| 13   | Tecnologia, algoritmo e elaboração de problemas | 8  |
| 14   | Erros frequentes e controle de coerência        | 9  |
| 15   | Exercícios de consolidação                      | 9  |
| 15.1 | Bloco A — Conceitos . . . . .                   | 9  |
| 15.2 | Bloco B — Cálculo direto . . . . .              | 10 |
| 15.3 | Bloco C — Álgebra e aplicações . . . . .        | 10 |

|                                                 |           |
|-------------------------------------------------|-----------|
| 15.4 Bloco D — Análise e demonstração . . . . . | 11        |
| <b>16 Questões de aprofundamento</b>            | <b>11</b> |
| <b>17 Avaliação-síntese</b>                     | <b>11</b> |
| <b>18 Gabarito comentado</b>                    | <b>12</b> |
| 18.1 Bloco A . . . . .                          | 12        |
| 18.2 Bloco B . . . . .                          | 12        |
| 18.3 Bloco C . . . . .                          | 13        |
| 18.4 Bloco D . . . . .                          | 13        |
| 18.5 Questões de aprofundamento . . . . .       | 14        |
| 18.6 Avaliação-síntese . . . . .                | 14        |
| <b>19 Resumo final</b>                          | <b>15</b> |

# 1 Apresentação e objetivos de aprendizagem

O Teorema de Pitágoras relaciona comprimentos em triângulos retângulos e transforma problemas geométricos em equações. Sua importância não está apenas na fórmula: o teorema pode ser demonstrado de várias maneiras, possui uma recíproca e fundamenta a distância no plano cartesiano.

Ao concluir este curso, espera-se que o estudante seja capaz de:

- reconhecer catetos e hipotenusa pela posição do ângulo reto;
- enunciar, interpretar e demonstrar o Teorema de Pitágoras;
- utilizar a recíproca para reconhecer triângulos retângulos;
- classificar triângulos comparando quadrados dos lados;
- calcular medidas exatas e aproximações coerentes;
- reconhecer e gerar ternas pitagóricas;
- deduzir diagonais e alturas de figuras planas;
- calcular distâncias no plano cartesiano e em sólidos retangulares;
- resolver e elaborar problemas geométricos e cotidianos.

## Correspondência com a BNCC

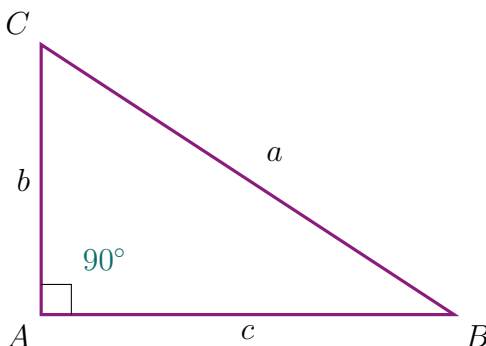
A habilidade **EF09MA13** inclui a demonstração do Teorema de Pitágoras por semelhança. A **EF09MA14** exige resolver e elaborar problemas de aplicação das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas e triângulos semelhantes; neste curso, essas ideias aparecem como fundamento e ferramenta em aplicações geométricas.

# 2 Triângulo retângulo e linguagem

## Definição 2.1: Triângulo retângulo

É o triângulo que possui um ângulo de  $90^\circ$ . Os lados que formam o ângulo reto são os **catetos**; o lado oposto é a **hipotenusa**.

Adotaremos  $a$  para a hipotenusa e  $b, c$  para os catetos.



### Teorema 2.1: A hipotenusa é o maior lado

Em um triângulo retângulo, a hipotenusa é maior que cada cateto.

### Identificação antes da fórmula

A hipotenusa não é o lado “inclinado” nem o lado desenhado na horizontal. É sempre o lado oposto ao ângulo reto. O desenho pode ser girado sem alterar os papéis dos lados.

## 3 Enunciado e interpretação geométrica

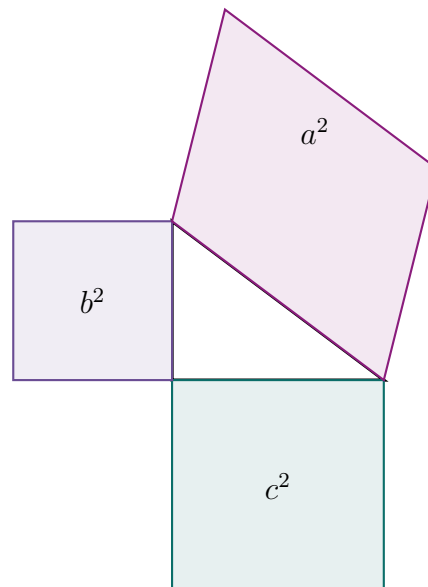
### Teorema 3.1: Teorema de Pitágoras

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

### Interpretação por áreas

$a^2$ ,  $b^2$  e  $c^2$  são as áreas dos quadrados construídos sobre os lados. Assim, a área do quadrado sobre a hipotenusa é a soma das áreas dos quadrados sobre os catetos.



### Exemplo

Se os catetos medem 6 e 8, então

$$a^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100.$$

Como  $a > 0$ ,  $a = \sqrt{100} = 10$ .

## 4 Demonstração por semelhança

No triângulo  $ABC$ , reto em  $A$ , trace a altura  $AD$  relativa à hipotenusa. Escreva  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ ,  $BD = m$  e  $DC = n$ .

### Teorema 4.1: Relações das projeções

$$c^2 = am, \quad b^2 = an, \quad a = m + n.$$

#### Demonstração

Os triângulos  $ABC$ ,  $DBA$  e  $DAC$  são semelhantes por AA. De  $\triangle ABC \sim \triangle DBA$ , obtemos  $a/c = c/m$ , logo  $c^2 = am$ . De  $\triangle ABC \sim \triangle DAC$ , obtemos  $a/b = b/n$ , logo  $b^2 = an$ . Por fim,  $BC = BD + DC$ , isto é,  $a = m + n$ .

### Teorema 4.2: Pitágoras por semelhança

As relações anteriores implicam  $a^2 = b^2 + c^2$ .

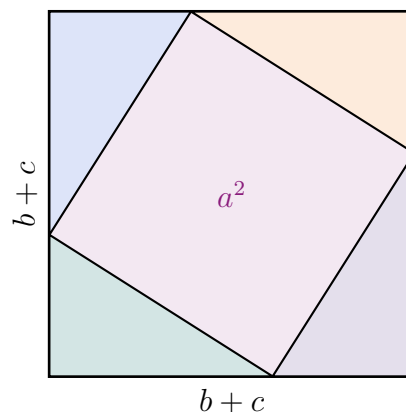
#### Demonstração

Somando as relações dos catetos,

$$b^2 + c^2 = an + am = a(n + m) = a \cdot a = a^2.$$

## 5 Demonstração por rearranjo de áreas

Considere quatro cópias de um triângulo retângulo de catetos  $b, c$  e hipotenusa  $a$ . Organize-as dentro de um quadrado de lado  $b + c$ ; sobra, no centro, um quadrado de lado  $a$ .



#### Demonstração

A área do quadrado maior é  $(b + c)^2$ . Ela também é a soma das áreas dos quatro triângulos e do quadrado central:

$$(b + c)^2 = 4 \left( \frac{bc}{2} \right) + a^2.$$

Desenvolvendo,

$$b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2.$$

Cancelando  $2bc$  nos dois lados, obtemos  $a^2 = b^2 + c^2$ .

### Observação

Uma figura sugere o resultado, mas a demonstração exige justificar as áreas e a igualdade algébrica. O desenho e o cálculo trabalham juntos.

## 6 Recíproca do Teorema de Pitágoras

### Teorema 6.1: Recíproca

Se, em um triângulo de maior lado  $a$ , vale

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

então o triângulo é retângulo, e o ângulo oposto a  $a$  mede  $90^\circ$ .

### Demonstração

Construa um triângulo retângulo com catetos  $b$  e  $c$ . Por Pitágoras, sua hipotenusa mede  $\sqrt{b^2 + c^2} = a$ . O triângulo construído e o triângulo dado possuem os mesmos três lados; são congruentes por LLL. Logo, o ângulo oposto a  $a$  no triângulo dado também é reto.

### Exemplo

Para os lados 8, 15 e 17,

$$8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 = 17^2.$$

Portanto, o triângulo é retângulo.

### Atenção

Na verificação da recíproca, o lado isolado deve ser o maior. Testar  $8^2 = 15^2 + 17^2$  não corresponde ao ângulo possivelmente reto.

## 7 Classificação por comparação de quadrados

### Teorema 7.1: Critério para classificar triângulos

Se  $a$  é o maior lado de um triângulo, então:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \implies \text{triângulo retângulo,} \\ a^2 &< b^2 + c^2 \implies \text{triângulo acutângulo,} \\ a^2 &> b^2 + c^2 \implies \text{triângulo obtusângulo.} \end{aligned}$$

### Justificativa geométrica

Fixe os lados  $b$  e  $c$  e varie o ângulo entre eles. Quando o ângulo é reto, o lado oposto mede  $\sqrt{b^2 + c^2}$ . Ao fechar o ângulo, ele se torna agudo e o lado oposto diminui; ao abrir o ângulo, ele se torna obtuso e o lado aumenta. Como  $a$  é o maior lado, seu ângulo oposto é o maior, e a comparação determina a classificação.

### Exemplo

Para  $(4, 5, 6)$ ,  $6^2 = 36 < 4^2 + 5^2 = 41$ : acutângulo. Para  $(3, 4, 6)$ ,  $6^2 = 36 > 3^2 + 4^2 = 25$ : obtusângulo.

## 8 Ternas pitagóricas

### Definição 8.1: Terna pitagórica

É uma terna de inteiros positivos  $(b, c, a)$  que satisfaz  $b^2 + c^2 = a^2$ .

Exemplos importantes são

$$(3, 4, 5), \quad (5, 12, 13), \quad (8, 15, 17), \quad (7, 24, 25).$$

Todo múltiplo comum de uma terna também é pitagórico, como  $(6, 8, 10)$ .

### Teorema 8.1: Fórmula de Euclides

Se  $p > q$  são inteiros positivos, então

$$b = p^2 - q^2, \quad c = 2pq, \quad a = p^2 + q^2$$

formam uma terna pitagórica.

### Demonstração

$$(p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = p^4 - 2p^2q^2 + q^4 + 4p^2q^2 = (p^2 + q^2)^2.$$

### Exemplo

Com  $p = 3$  e  $q = 2$ , obtemos  $b = 5$ ,  $c = 12$  e  $a = 13$ .

## 9 Cálculo de lados e uso de radicais

Se os catetos são conhecidos,

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Se a hipotenusa e um cateto são conhecidos,

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

### Resultado exato

Com catetos 5 e 7,

$$a = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}.$$

$\sqrt{74}$  é o valor exato; 8,60 é uma aproximação com duas casas decimais.

### Simplificação

Com catetos 6 e 12,

$$a = \sqrt{36 + 144} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}.$$

### Erro algébrico comum

Em geral,  $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ . Por exemplo,  $\sqrt{9+16} = 5$ , mas  $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$ .

## 10 Consequências em figuras planas

### Teorema 10.1: Diagonal do quadrado

Em um quadrado de lado  $\ell$ , a diagonal mede

$$d = \ell\sqrt{2}.$$

### Demonstração

A diagonal forma um triângulo retângulo de catetos  $\ell$  e  $\ell$ . Assim,  $d^2 = 2\ell^2$  e, como  $d > 0$ ,  $d = \ell\sqrt{2}$ .

### Teorema 10.2: Diagonal do retângulo

Em um retângulo de lados  $x$  e  $y$ ,

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

### Teorema 10.3: Altura do triângulo equilátero

Em um triângulo equilátero de lado  $\ell$ ,

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}.$$

### Demonstração

A altura divide a base ao meio e forma um triângulo retângulo de hipotenusa  $\ell$  e cateto  $\ell/2$ . Logo,

$$h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = \frac{3\ell^2}{4}.$$

Tomando a raiz positiva e usando  $A = \ell h/2$ , seguem as fórmulas.

## 11 Distância no plano cartesiano

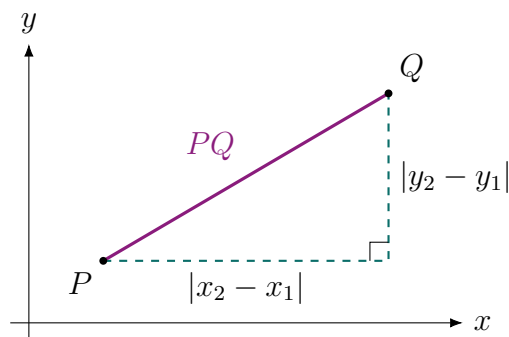
### Teorema 11.1: Distância entre dois pontos

Se  $P = (x_1, y_1)$  e  $Q = (x_2, y_2)$ , então

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

### Demonstração

Os deslocamentos horizontal e vertical têm comprimentos  $|x_2 - x_1|$  e  $|y_2 - y_1|$  e formam os catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é  $PQ$ . Ao elevar ao quadrado, os valores absolutos desaparecem.



### Exemplo

Entre  $P = (1, 2)$  e  $Q = (7, 10)$ ,

$$PQ = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

## 12 Aplicações cotidianas e espaciais

### 12.1 Escadas, rampas e cabos

Uma escada apoiada em parede vertical forma um triângulo retângulo com o chão. Uma rampa deve ser analisada por seu avanço horizontal e sua elevação; um cabo esticado pode ser a hipotenusa.

### Exemplo

Uma escada de 13 m alcança 12 m de altura. Se  $x$  é a distância da base à parede,

$$x^2 + 12^2 = 13^2 \implies x^2 = 25 \implies x = 5 \text{ m}.$$

## 12.2 Diagonal de um paralelepípedo

### Teorema 12.1: Diagonal espacial

Em um paralelepípedo retângulo de dimensões  $x, y, z$ , a diagonal espacial mede

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

### Demonstração

Primeiro, a diagonal da base satisfaz  $d^2 = x^2 + y^2$ . Depois,  $d, z$  e  $D$  formam outro triângulo retângulo:  $D^2 = d^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

### Exemplo

Para dimensões 3, 4 e 12,  $D = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13$ .

## 13 Tecnologia, algoritmo e elaboração de problemas

### Verificação em planilha

Crie colunas para  $b, c, a, b^2 + c^2, a^2$  e diferença  $a^2 - (b^2 + c^2)$ . Uma diferença nula indica triângulo retângulo; negativa, acutângulo; positiva, obtusângulo, desde que  $a$  seja o maior lado.

### Algoritmo de resolução

1. Confirme que há um triângulo retângulo ou use a recíproca.
2. Identifique o maior lado como hipotenusa.
3. Escreva  $a^2 = b^2 + c^2$  antes de substituir números.
4. Isole a incógnita, tire a raiz positiva e simplifique.
5. Conserve o valor exato; aproxime apenas ao final, se necessário.
6. Verifique unidade, ordem dos lados e plausibilidade.

Para elaborar um problema, escolha um contexto que realmente produza perpendicularidade, defina dados suficientes, estabeleça uma pergunta clara e resolva-o antes de apresentá-lo, verificando se as medidas são possíveis.

## 14 Erros frequentes e controle de coerência

### Erros que devem ser evitados

- aplicar Pitágoras a qualquer triângulo sem ângulo reto;
- tomar como hipotenusa um lado que não é o maior;
- escrever  $a = b + c$  ou  $a = \sqrt{b} + \sqrt{c}$ ;
- esquecer de elevar cada comprimento ao quadrado;
- manter a raiz negativa como medida;
- arredondar radicais antes do fim do cálculo;
- comparar  $a$  com  $b + c$  em vez de comparar os quadrados;
- usar unidades diferentes na mesma equação.

### Conjectura 14.1: Afirmação para testar

“Se conhecemos os três lados de qualquer triângulo, sempre podemos usar  $a^2 = b^2 + c^2$ .”

Falsa. A igualdade caracteriza triângulos retângulos. Para outros triângulos, ela falha e a comparação dos quadrados informa se o maior ângulo é agudo ou obtuso.

## 15 Exercícios de consolidação

### 15.1 Bloco A — Conceitos

1. Defina triângulo retângulo, catetos e hipotenusa.
2. Enuncie o Teorema de Pitágoras em palavras e em símbolos.
3. Interprete  $a^2 = b^2 + c^2$  por meio de áreas.
4. Por que a hipotenusa deve ser identificada antes da substituição?
5. Enuncie a recíproca do Teorema de Pitágoras.
6. Como classificar um triângulo comparando quadrados dos lados?
7. Defina terna pitagórica e dê dois exemplos.
8. Explique a diferença entre valor exato e aproximação decimal.
9. Deduza a diagonal de um quadrado de lado  $\ell$ .
10. Deduza a fórmula da distância entre dois pontos.
11. Por que se escolhe a raiz positiva ao calcular um comprimento?
12. Explique por que  $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$  é falsa em geral.

## 15.2 Bloco B — Cálculo direto

1. Calcule a hipotenusa de um triângulo de catetos 6 e 8.
2. Calcule o cateto desconhecido quando  $a = 13$  e o outro cateto mede 5.
3. Calcule a hipotenusa para catetos 7 e 24.
4. Calcule o cateto desconhecido quando  $a = 10$  e o outro cateto mede 6.
5. Determine a diagonal de um quadrado de lado 9.
6. Determine a diagonal de um retângulo  $5 \times 12$ .
7. Determine altura e área de um triângulo equilátero de lado 10.
8. Calcule a distância entre  $(1, 2)$  e  $(7, 10)$ .
9. Verifique se  $(9, 12, 15)$  é uma terna pitagórica.
10. Classifique o triângulo de lados  $(4, 5, 6)$ .
11. Classifique o triângulo de lados  $(3, 4, 6)$ .
12. Determine a diagonal espacial de um bloco  $3 \times 4 \times 12$ .

## 15.3 Bloco C — Álgebra e aplicações

1. Os catetos medem  $x$  e  $x + 7$ , e a hipotenusa mede 17. Determine  $x$ .
2. Um triângulo retângulo isósceles tem hipotenusa  $10\sqrt{2}$ . Determine os catetos.
3. Uma escada de 13 m alcança 12 m de altura. Determine o afastamento da parede.
4. Um cabo de 25 m liga o topo de um mastro de 20 m ao chão. Determine a distância horizontal.
5. Uma rampa avança 1 m e sobe 0,75 m. Determine seu comprimento.
6. A diagonal de um quadrado mede 14. Determine lado e área.
7. Um retângulo tem diagonal 25 e um lado 7. Determine o outro lado e a área.
8. Determine a distância da origem ao ponto  $(-8, 15)$ .
9. Uma tela retangular mede 36 cm por 48 cm. Determine a diagonal.
10. Um terreno retangular de 30 m por 40 m será atravessado pela diagonal. Qual economia há em relação a percorrer dois lados consecutivos?
11. Um triângulo retângulo tem hipotenusa 25 e cateto 15. Determine o outro cateto e a área.
12. Um aluno aproximou  $\sqrt{74}$  por 8,6 no início e elevou 8,6 ao quadrado. Explique a perda de exatidão.

## 15.4 Bloco D — Análise e demonstração

1. Demonstre Pitágoras por semelhança e projeções.
2. Demonstre Pitágoras pelo rearranjo de quatro triângulos.
3. Demonstre a recíproca usando congruência LLL.
4. Demonstre a fórmula da diagonal do quadrado.
5. Demonstre a fórmula da altura do triângulo equilátero.
6. Demonstre a fórmula da distância no plano cartesiano.
7. Verifique algebricamente a fórmula de Euclides para ternas pitagóricas.
8. Explique por que o critério de classificação exige que  $a$  seja o maior lado.

## 16 Questões de aprofundamento

1. Um triângulo retângulo tem perímetro 60 e lados proporcionais a  $5 : 12 : 13$ . Determine os lados e a área.
2. Prove que as diagonais de um retângulo têm o mesmo comprimento.
3. Mostre que os pontos  $A = (0, 0)$ ,  $B = (3, 4)$  e  $C = (7, 1)$  formam um triângulo retângulo e identifique o vértice reto.
4. Demonstre que um triângulo retângulo isósceles com catetos inteiros não pode ter hipotenusa inteira.
5. Use  $p = 5$  e  $q = 2$  na fórmula de Euclides; obtenha uma terna e verifique-a.
6. Uma folha retangular  $20 \times 30$  será cortada em linha reta entre vértices opostos. Compare o comprimento exato do corte com 36 cm.

## 17 Avaliação-síntese

1. Enuncie o Teorema de Pitágoras.
2. Identifique a hipotenusa em relação ao ângulo reto.
3. Calcule a hipotenusa para catetos 9 e 12.
4. Calcule um cateto quando a hipotenusa mede 17 e o outro cateto mede 8.
5. Verifique se  $(10, 24, 26)$  forma triângulo retângulo.
6. Classifique o triângulo de lados  $(5, 6, 8)$ .
7. Determine a diagonal de um quadrado de lado 6.
8. Determine a distância entre  $(-2, 1)$  e  $(4, 9)$ .

9. Uma escada de 10 m está a 6 m da parede. Qual altura alcança?
10. Explique a recíproca do teorema.
11. Demonstre por áreas a igualdade pitagórica.
12. Elabore um problema simples que use Pitágoras e apresente sua solução.

## 18 Gabarito comentado

### 18.1 Bloco A

1. Tem um ângulo de  $90^\circ$ ; os lados adjacentes são catetos e o oposto é a hipotenusa.
2. O quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos:  $a^2 = b^2 + c^2$ .
3. A área do quadrado sobre  $a$  equivale à soma das áreas dos quadrados sobre  $b$  e  $c$ .
4. Porque somente o lado oposto ao ângulo reto ocupa o termo isolado  $a^2$ .
5. Se o quadrado do maior lado é a soma dos quadrados dos outros, o triângulo é retângulo.
6. Para o maior lado  $a$ : igualdade indica retângulo;  $a^2 < \text{soma}$  indica acutângulo;  $a^2 > \text{soma}$  indica obtusângulo.
7. Inteiros positivos com  $b^2 + c^2 = a^2$ ; exemplos:  $(3, 4, 5)$  e  $(5, 12, 13)$ .
8. Exato preserva o valor, como  $\sqrt{74}$ ; aproximação, como 8,60, depende da precisão escolhida.
9.  $d^2 = \ell^2 + \ell^2$ , logo  $d = \ell\sqrt{2}$ .
10. Os deslocamentos horizontal e vertical são catetos; Pitágoras produz a fórmula.
11. Comprimentos são positivos.
12. Contraexemplo:  $\sqrt{9+16} = 5$ , enquanto  $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$ .

### 18.2 Bloco B

1.  $a = \sqrt{36 + 64} = 10$ .
2.  $b = \sqrt{169 - 25} = 12$ .
3.  $a = \sqrt{49 + 576} = 25$ .
4.  $b = \sqrt{100 - 36} = 8$ .
5.  $9\sqrt{2}$ .
6. 13.
7.  $h = 5\sqrt{3}$  e  $A = 25\sqrt{3}$ .
8.  $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ .

9. Sim:  $9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2$ .
10.  $6^2 < 4^2 + 5^2$ : acutângulo.
11.  $6^2 > 3^2 + 4^2$ : obtusângulo.
12.  $\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = 13$ .

### 18.3 Bloco C

1.  $x^2 + (x + 7)^2 = 289$ ;  $x = 8$  é a raiz positiva.
2. Se o cateto é  $x$ ,  $2x^2 = 200$ , logo  $x = 10$ .
3. 5 m.
4. 15 m.
5.  $\sqrt{1^2 + 0,75^2} = 1,25$  m.
6.  $\ell = 14/\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$  e  $A = 98$ .
7. Outro lado 24 e área 168.
8. 17.
9. 60 cm.
10. A diagonal mede 50 m; pelos lados, 70 m. Economia de 20 m.
11. Outro cateto 20 e área 150.
12.  $\sqrt{74}$  ao quadrado é exatamente 74, mas  $8,6^2 = 73,96$ ; o arredondamento introduz erro. Aproxima-se apenas ao final.

### 18.4 Bloco D

1.  $b^2 = an$ ,  $c^2 = am$  e  $m + n = a$ ; somando,  $b^2 + c^2 = a^2$ .
2.  $(b + c)^2 = 4(bc/2) + a^2$ ; expandindo e cancelando  $2bc$ , resulta  $a^2 = b^2 + c^2$ .
3. Construa um retângulo com catetos  $b, c$ ; sua hipotenusa é  $a$ . O triângulo dado é congruente a ele por LLL.
4. A diagonal forma catetos  $\ell, \ell$ :  $d^2 = 2\ell^2$ .
5. A altura divide a base em  $\ell/2$ ; então  $h^2 = \ell^2 - (\ell/2)^2 = 3\ell^2/4$ .
6. Aplicar Pitágoras aos deslocamentos  $|\Delta x|$  e  $|\Delta y|$ .
7.  $(p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = (p^2 + q^2)^2$ .
8. O maior ângulo se opõe ao maior lado; é ele que pode ser reto ou obtuso e determina a classificação.

## 18.5 Questões de aprofundamento

1. A soma das partes é 30, então o fator é 2: lados 10, 24, 26 e área 120.
2. Cada diagonal é hipotenusa de um triângulo com os mesmos catetos  $x, y$ ; ambas medem  $\sqrt{x^2 + y^2}$ .
3.  $AB^2 = 25$ ,  $BC^2 = 25$  e  $AC^2 = 50$ . Como  $AB^2 + BC^2 = AC^2$ , o triângulo é retângulo em  $B$ .
4. Se o cateto inteiro é  $n$ , a hipotenusa seria  $n\sqrt{2}$ . Como  $\sqrt{2}$  é irracional, esse produto não é inteiro para  $n > 0$ .
5.  $b = 21$ ,  $c = 20$ ,  $a = 29$ ;  $21^2 + 20^2 = 441 + 400 = 841 = 29^2$ .
6. O corte mede  $\sqrt{20^2 + 30^2} = 10\sqrt{13}$  cm. Como  $10\sqrt{13} \approx 36,06$ , é ligeiramente maior que 36 cm.

## 18.6 Avaliação-síntese

1. Em triângulo retângulo,  $a^2 = b^2 + c^2$ .
2. É o lado oposto ao ângulo de  $90^\circ$ .
3. 15.
4. 15.
5. Sim:  $10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676 = 26^2$ .
6.  $8^2 = 64 > 5^2 + 6^2 = 61$ : obtusângulo.
7.  $6\sqrt{2}$ .
8.  $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ .
9. 8 m.
10. Se o quadrado do maior lado iguala a soma dos outros, o triângulo é retângulo.
11. Deve apresentar o quadrado de lado  $b+c$ , quatro triângulos e a igualdade  $(b+c)^2 = 2bc + a^2$ .
12. Resposta pessoal. Deve haver perpendicularidade, dados suficientes, equação correta e unidade na resposta.

## 19 Resumo final

### Síntese

- Em triângulos retângulos,  $a^2 = b^2 + c^2$ , com  $a$  oposto ao ângulo reto.
- A igualdade admite demonstrações por semelhança e por rearranjo de áreas.
- A recíproca reconhece triângulos retângulos.
- Comparar  $a^2$  com  $b^2 + c^2$  classifica o triângulo.
- Ternas pitagóricas fornecem soluções inteiras.
- $d_{\text{quadrado}} = \ell\sqrt{2}$  e  $h_{\text{equilátero}} = \ell\sqrt{3}/2$ .
- No plano,  $PQ = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ .
- Valores exatos devem ser preservados até a aproximação final.

**Pitágoras conecta forma, medida, álgebra e distância.**