

Semelhança de Triângulos

Curso completo de Matemática — 9º ano do Ensino Fundamental

Alinhado à habilidade EF09MA12 da BNCC

Sumário

1	Apresentação e objetivos de aprendizagem	1
2	Pré-requisitos: razão, proporção e ângulos	1
3	Figuras semelhantes	2
4	Triângulos semelhantes e correspondência	3
5	Congruência e semelhança	4
6	Paralelas e o triângulo fundamental	4
7	Critério Ângulo–Ângulo (AA)	5
8	Critério Lado–Ângulo–Lado (LAL)	5
9	Critério Lado–Lado–Lado (LLL)	6
10	Condições necessárias e suficientes	7
11	Perímetros, áreas e outras grandezas	7
12	Método de resolução de problemas	8
13	Aplicações da semelhança	9
13.1	Sombras e alturas inacessíveis	9
13.2	Espelhos e visada	9
13.3	Mapas, plantas e maquetes	9
13.4	Fotografias e telas	10
14	Homotetia e construção de figuras semelhantes	10
15	Erros frequentes e análise crítica	11

16 Exercícios de consolidação	11
16.1 Bloco A — Conceitos	11
16.2 Bloco B — Cálculo direto	12
16.3 Bloco C — Álgebra e aplicações	12
16.4 Bloco D — Análise e demonstração	13
17 Questões de aprofundamento	13
18 Avaliação-síntese	14
19 Gabarito comentado	14
19.1 Bloco A	14
19.2 Bloco B	15
19.3 Bloco C	15
19.4 Bloco D	16
19.5 Questões de aprofundamento	16
19.6 Avaliação-síntese	17
20 Resumo final	17

1 Apresentação e objetivos de aprendizagem

Duas figuras podem ter tamanhos diferentes e, ainda assim, conservar a mesma forma. Nos triângulos, essa ideia é especialmente poderosa: determinadas informações sobre ângulos e lados garantem que todos os demais elementos estejam na mesma proporção. A semelhança permite medir alturas inacessíveis, interpretar escalas, ampliar imagens e justificar muitas propriedades geométricas.

Ao concluir este curso, espera-se que o estudante seja capaz de:

- reconhecer figuras semelhantes e estabelecer correspondências corretas;
- distinguir semelhança de congruência;
- calcular e interpretar a razão de semelhança;
- verificar os critérios AA, LAL e LLL;
- demonstrar propriedades fundamentais em linguagem adequada ao 9º ano;
- calcular lados, perímetros e áreas de triângulos semelhantes;
- construir triângulos semelhantes com régua, compasso ou software;
- resolver problemas de escala, sombra, fotografia e medidas indiretas;
- analisar argumentos e identificar correspondências incorretas.

Correspondência com a BNCC

Este curso desenvolve a habilidade **EF09MA12**: reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes. As aplicações e demonstrações consolidam a habilidade sem exigir a memorização isolada dos critérios.

2 Pré-requisitos: razão, proporção e ângulos

Definição 2.1: Razão

Dados dois números reais positivos a e b , a razão de a para b é o quociente a/b . Em geometria, uma razão entre comprimentos deve comparar medidas escritas na mesma unidade.

Definição 2.2: Proporção

Uma proporção é uma igualdade entre duas razões:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad b \neq 0, d \neq 0.$$

Pela propriedade fundamental, $ad = bc$.

Exemplo

As razões $6/9$ e $10/15$ formam uma proporção, pois ambas valem $2/3$. Equivalentemente, $6 \cdot 15 = 9 \cdot 10 = 90$.

Teorema 2.1: Soma dos ângulos internos de um triângulo

Em todo triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é 180° .

Demonstração

Por um vértice, trace uma reta paralela ao lado oposto. Os outros dois ângulos internos aparecem nessa reta como ângulos alternos internos. Os três ângulos formam um ângulo raso e, portanto, somam 180° .

Teorema 2.2: Terceiro ângulo

Se dois ângulos de um triângulo são respectivamente congruentes a dois ângulos de outro triângulo, então os terceiros ângulos também são congruentes.

Demonstração

Se os ângulos conhecidos medem α e β , em ambos os triângulos o terceiro mede $180^\circ - \alpha - \beta$.

3 Figuras semelhantes

Definição 3.1: Polígonos semelhantes

Dois polígonos são semelhantes quando:

- i) seus ângulos correspondentes são congruentes; e
- ii) seus lados correspondentes são proporcionais.

As duas condições devem ser satisfeitas simultaneamente.

Notação

O símbolo $\sim$ significa “é semelhante a”. A escrita $ABCD \sim EFGH$ declara as correspondências $A \leftrightarrow E$, $B \leftrightarrow F$, $C \leftrightarrow G$ e $D \leftrightarrow H$.

Definição 3.2: Razão de semelhança

Se duas figuras são semelhantes, a razão constante entre um comprimento da segunda figura e o comprimento correspondente da primeira é a razão de semelhança, ou fator de escala:

$$k = \frac{\text{comprimento na segunda figura}}{\text{comprimento correspondente na primeira figura}}.$$

Ampliação e redução

Se $k > 1$, a segunda figura é uma ampliação; se $0 < k < 1$, é uma redução; se $k = 1$, as figuras possuem o mesmo tamanho.

Mesma forma não é apenas aparência

Um quadrado e um retângulo não quadrado têm quatro ângulos retos, mas não são semelhantes: no quadrado, a razão entre lados consecutivos é 1; no retângulo, essa razão pode ser diferente de 1.

4 Triângulos semelhantes e correspondência

Definição 4.1: Triângulos semelhantes

Os triângulos ABC e DEF são semelhantes quando seus ângulos correspondentes são congruentes e seus lados correspondentes são proporcionais. Escrevemos

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

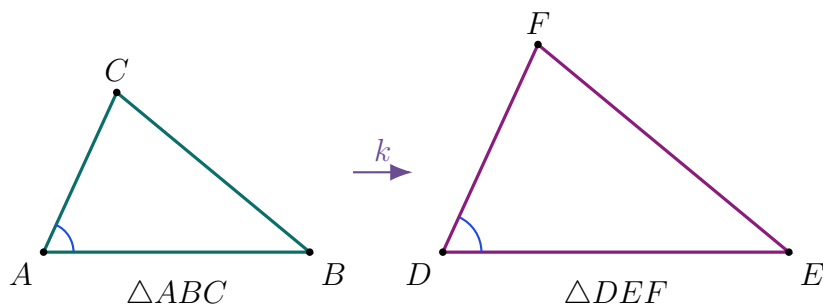
Nessa ordem, $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$ e $C \leftrightarrow F$.

Consequentemente,

$$\angle A \cong \angle D, \quad \angle B \cong \angle E, \quad \angle C \cong \angle F$$

e

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = k.$$



Exemplo

Se $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $AB = 4$, $BC = 5$, $AC = 6$ e $DE = 10$, então $k = DE/AB = 10/4 = 2,5$. Logo,

$$EF = 2,5 \cdot 5 = 12,5, \quad DF = 2,5 \cdot 6 = 15.$$

A ordem dos vértices contém informação

Não se deve comparar lados pela posição visual. Primeiro, associe ângulos congruentes; depois, escreva os vértices na ordem correspondente. Em $\triangle ABC \sim \triangle FDE$, o lado AB corresponde a FD , e não necessariamente a DE .

5 Congruência e semelhança

Definição 5.1: Triângulos congruentes

Dois triângulos são congruentes quando possuem a mesma forma e o mesmo tamanho. Se sobrepostos por um movimento rígido, coincidem ponto a ponto.

Teorema 5.1: Congruência como caso particular

Triângulos congruentes são semelhantes com razão $k = 1$.

Demonstração

Na congruência, ângulos correspondentes têm medidas iguais e lados correspondentes têm comprimentos iguais. Assim, cada razão entre lados correspondentes vale 1.

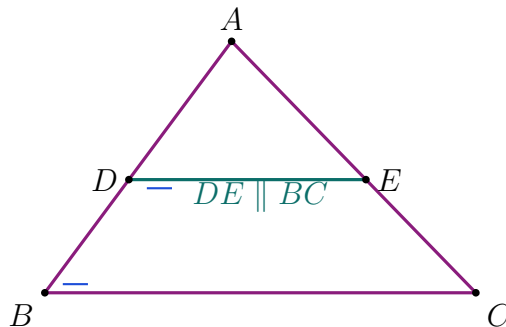
A recíproca é falsa: triângulos semelhantes com $k \neq 1$ têm a mesma forma, mas tamanhos diferentes, e por isso não são congruentes.

6 Paralelas e o triângulo fundamental

Teorema 6.1: Paralela a um lado do triângulo

No triângulo ABC , sejam $D \in \overline{AB}$ e $E \in \overline{AC}$. Se $DE \parallel BC$, então

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC.$$



Demonstração

O ângulo A é comum. Como $DE \parallel BC$, os ângulos ADE e ABC são correspondentes e congruentes; o mesmo vale para AED e ACB . Portanto, os triângulos têm ângulos correspondentes congruentes e, pelo critério AA que será formalizado a seguir, são semelhantes.

Teorema 6.2: Proporcionalidade determinada pela paralela

Nas condições anteriores,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

Exemplo

Se $DE \parallel BC$, $AD = 4$, $AB = 10$ e $AC = 15$, então

$$\frac{AE}{15} = \frac{4}{10} \implies AE = 6.$$

7 Critério Ângulo–Ângulo (AA)

Teorema 7.1: Critério AA

Se dois ângulos de um triângulo são respectivamente congruentes a dois ângulos de outro triângulo, então os triângulos são semelhantes.

Demonstração

Considere $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ com $\angle A \cong \angle D$ e $\angle B \cong \angle E$. Pelo teorema do terceiro ângulo, $\angle C \cong \angle F$.

Escolha, sobre os lados de $\angle D$, pontos G e H tais que $DG = AB$ e $DH = AC$. Pelo caso LAL de congruência, $\triangle DGH \cong \triangle ABC$. Logo, $\angle G \cong \angle B \cong \angle E$, o que implica $GH \parallel EF$. A proporcionalidade determinada por essa paralela mostra que os lados de $\triangle DGH$ e $\triangle DEF$ são proporcionais. Como $\triangle DGH$ tem as mesmas medidas de $\triangle ABC$, os triângulos ABC e DEF são semelhantes.

Por que dois ângulos bastam?

O terceiro ângulo não é livre: ele fica determinado pela soma de 180° . Por isso, “AAA” não é um critério diferente; AA já contém toda a informação angular necessária.

Exemplo

Um triângulo tem ângulos 48° , 72° e 60° . Outro tem ângulos 72° , 60° e 48° . Eles são semelhantes por AA, desde que a correspondência seja organizada pelas medidas, e não pela ordem em que foram informadas.

8 Critério Lado–Ângulo–Lado (LAL)

Teorema 8.1: Critério LAL de semelhança

Se dois lados de um triângulo são proporcionais a dois lados de outro e os ângulos compreendidos entre esses lados são congruentes, então os triângulos são semelhantes.

Em símbolos, se

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = k \quad \text{e} \quad \angle A \cong \angle D,$$

então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Demonstração

Construa um triângulo DGH com $DG = AB$, $DH = AC$ e $\angle GDH = \angle A$. Pelo caso LAL de congruência, $\triangle DGH \cong \triangle ABC$. Como $DE/DG = DF/DH = k$, os pontos E e F são obtidos pela mesma ampliação, de centro D , aplicada a G e H . Essa ampliação preserva ângulos e multiplica todos os comprimentos por k . Portanto, $\triangle DEF \sim \triangle DGH \sim \triangle ABC$.

Exemplo

Os lados que formam um ângulo de 50° medem 4 e 6 em um triângulo, e 10 e 15 em outro. Como $10/4 = 15/6 = 2,5$ e os ângulos compreendidos são iguais, os triângulos são semelhantes por LAL.

O ângulo deve ser o compreendido

Conhecer dois lados proporcionais e um ângulo não compreendido entre eles pode ser insuficiente. Essa configuração, chamada às vezes de LLA, pode produzir dois triângulos diferentes e não é critério geral de semelhança.

9 Critério Lado–Lado–Lado (LLL)

Teorema 9.1: Critério LLL de semelhança

Se os três pares de lados correspondentes de dois triângulos são proporcionais, então os triângulos são semelhantes.

Isto é, se

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = k,$$

então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Demonstração

Amplie ou reduza $\triangle ABC$ pelo fator k , obtendo $\triangle A'B'C'$. Seus lados medem kAB , kBC e kAC , exatamente as medidas DE , EF e DF . Pelo caso LLL de congruência, $\triangle A'B'C' \cong \triangle DEF$. Como $\triangle A'B'C'$ é uma cópia em escala de $\triangle ABC$, conclui-se que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Exemplo

Os triângulos de lados $(6, 9, 12)$ e $(8, 12, 16)$ são semelhantes, pois

$$\frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}.$$

Compare lados homólogos

Ordenar os três lados do menor para o maior em cada triângulo ajuda a encontrar a correspondência: menor com menor, intermediário com intermediário e maior com maior.

10 Condições necessárias e suficientes

Uma condição é *necessária* quando toda semelhança deve satisfazê-la. É *suficiente* quando sua verificação garante a semelhança.

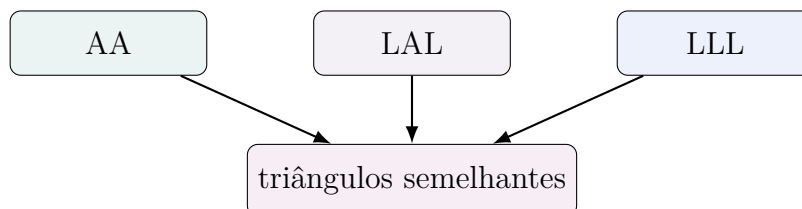
Teorema 10.1: Caracterização completa

Para dois triângulos, são equivalentes:

- a) os triângulos são semelhantes;
- b) seus ângulos correspondentes são congruentes;
- c) seus lados correspondentes são proporcionais;
- d) algum dos critérios AA, LAL ou LLL é satisfeito.

Observação

AA, LAL e LLL são atalhos rigorosos. Não precisamos medir todos os seis elementos de cada triângulo: cada critério fornece informação suficiente para deduzir as demais correspondências.



11 Perímetros, áreas e outras grandezas

Teorema 11.1: Razão entre perímetros

Se a razão de semelhança da primeira para a segunda figura é k , então

$$\frac{P_2}{P_1} = k.$$

Demonstração

Se os lados da primeira figura são $a_1, \dots, a_n$, os correspondentes da segunda são $ka_1, \dots, ka_n$. Logo,

$$P_2 = ka_1 + \dots + ka_n = k(a_1 + \dots + a_n) = kP_1.$$

Teorema 11.2: Razão entre áreas

Se dois triângulos semelhantes têm razão de semelhança k , então

$$\frac{A_2}{A_1} = k^2.$$

Demonstração

Bases correspondentes ficam multiplicadas por k . As alturas correspondentes também, pois são comprimentos da mesma construção em figuras semelhantes. Assim,

$$A_2 = \frac{(kb)(kh)}{2} = k^2 \frac{bh}{2} = k^2 A_1.$$

Exemplo

Se $k = 3$, os comprimentos e perímetros ficam 3 vezes maiores, mas as áreas ficam $3^2 = 9$ vezes maiores. Se o primeiro triângulo tem área 20 cm^2 , o segundo tem área 180 cm^2 .

Atenção

Não se multiplica área por k . Área é bidimensional: existem dois fatores lineares, base e altura, e por isso aparece k^2 .

12 Método de resolução de problemas

Roteiro seguro

1. Identifique os dois triângulos e marque os dados.
2. Justifique a semelhança por AA, LAL ou LLL.
3. Determine a correspondência entre os vértices.
4. Escreva os triângulos na ordem correspondente.
5. Monte razões sempre no mesmo sentido.
6. Resolva a proporção e verifique unidade e plausibilidade.

Incógnita em lados correspondentes

Se $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $AB = x + 1$, $DE = 12$, $BC = 5$ e $EF = 10$, então

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} \implies \frac{12}{x+1} = \frac{10}{5} = 2.$$

Logo, $x + 1 = 6$ e $x = 5$. A verificação confirma que $12/6 = 10/5 = 2$.

Segmento paralelo

Em $\triangle ABC$, tome $D \in AB$ e $E \in AC$, com $DE \parallel BC$. Se $AD = 6$, $DB = 3$ e $DE = 8$, então $AB = 9$. Pela semelhança,

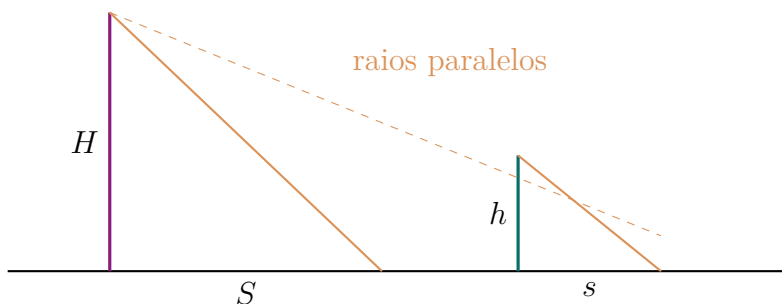
$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Portanto, $BC = 12$.

13 Aplicações da semelhança

13.1 Sombras e alturas inacessíveis

Sob raios solares aproximadamente paralelos, objetos verticais e suas sombras formam triângulos retângulos com o mesmo ângulo de incidência da luz; portanto, são semelhantes por AA.



Logo,

$$\frac{H}{S} = \frac{h}{s}.$$

Se uma pessoa de 1,60 m projeta sombra de 2 m e uma árvore projeta sombra de 7,5 m, então $H/7,5 = 1,6/2$, de onde $H = 6$ m.

13.2 Espelhos e visada

Um pequeno espelho horizontal pode permitir medir uma altura. Quando a pessoa vê o topo do objeto no espelho, os ângulos de incidência e reflexão são iguais. Os dois triângulos retângulos são semelhantes, e relacionamos altura dos olhos, distâncias ao espelho e altura procurada.

13.3 Mapas, plantas e maquetes

Na escala $1 : n$, uma unidade no desenho corresponde a n unidades reais. Uma planta em escala $1 : 200$ transforma 3,5 cm em $700 \text{ cm} = 7 \text{ m}$.

13.4 Fotografias e telas

Para redimensionar uma imagem sem deformá-la, largura e altura devem ser multiplicadas pelo mesmo fator. Uma fotografia 10×15 ampliada para ter lado maior igual a 24 tem $k = 24/15 = 1,6$ e lado menor 16.

Deformação

Alterar apenas a largura ou apenas a altura muda a razão entre os lados. A nova imagem deixa de ser semelhante à original, ainda que o conteúdo continue reconhecível.

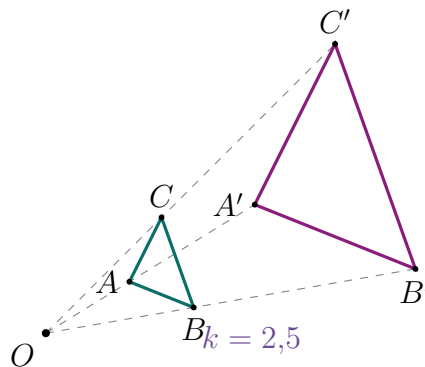
14 Homotetia e construção de figuras semelhantes

Definição 14.1: Homotetia

Fixados um centro O e um fator $k > 0$, a homotetia envia cada ponto P ao ponto P' da semirreta OP tal que $OP' = kOP$.

Teorema 14.1: Propriedades da homotetia

Uma homotetia de fator $k > 0$ multiplica todos os comprimentos por k , preserva as medidas dos ângulos e transforma retas que não passam pelo centro em retas paralelas. A imagem de um triângulo é semelhante ao original.



No plano cartesiano, quando o centro é a origem, a regra é simples:

$$(x, y) \mapsto (kx, ky).$$

Construção com régua e compasso

Desenhe um triângulo ABC e escolha $k = 3/2$. A partir de A , construa raios que passem por B e C . Sobre eles, marque B' e C' com $AB' = \frac{3}{2}AB$ e $AC' = \frac{3}{2}AC$. Una B' a C' . Meça os ângulos e compare $B'C'$ com BC . Repita em um software de geometria dinâmica e arraste os vértices para verificar que a razão permanece constante.

15 Erros frequentes e análise crítica

Erros que devem ser evitados

- concluir semelhança apenas porque os triângulos “parecem iguais”;
- escrever razões com sentidos diferentes, como $DE/AB = BC/EF$;
- comparar lados não correspondentes;
- usar LAL com um ângulo que não está entre os lados considerados;
- confundir razão linear k com razão de áreas k^2 ;
- supor que todos os retângulos ou todos os triângulos isósceles são semelhantes;
- confiar em desenho fora de escala para decidir medidas ou congruências.

Conjectura 15.1: Afirmação para testar

“Quaisquer dois retângulos são semelhantes porque todos os seus ângulos são retos.”

A afirmação é falsa. Os ângulos coincidem, mas os lados devem ser proporcionais. Um retângulo 2×3 tem razão $3/2$, enquanto um retângulo 2×5 tem razão $5/2$.

Teste final de coerência

Depois do cálculo, pergunte: o fator obtido é positivo? Uma ampliação realmente produziu lados maiores? Todas as razões correspondentes têm o mesmo valor? A razão entre áreas foi tratada ao quadrado? A unidade da resposta é adequada?

16 Exercícios de consolidação

16.1 Bloco A — Conceitos

1. Defina polígonos semelhantes por meio de suas duas condições.
2. Explique o significado da escrita $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.
3. Na semelhança anterior, indique os três pares de lados correspondentes.
4. Interprete geometricamente os casos $k > 1$, $0 < k < 1$ e $k = 1$.
5. Todo par de triângulos congruentes é semelhante? Justifique.
6. Enuncie o critério AA.
7. Enuncie o critério LAL e destaque qual ângulo deve ser usado.
8. Enuncie o critério LLL.
9. Qual é a razão entre os perímetros de figuras semelhantes de fator k ?
10. Qual é a razão entre suas áreas? Explique o expoente.

11. Todos os triângulos equiláteros são semelhantes? E todos os isósceles?
12. Ter a mesma área é suficiente para garantir semelhança? Justifique.

16.2 Bloco B — Cálculo direto

1. Verifique se os triângulos de lados $(3, 4, 5)$ e $(6, 8, 10)$ são semelhantes e determine k do primeiro para o segundo.
2. Um triângulo de lados $(5, 7, 8)$ é ampliado com $k = 3$. Determine os novos lados.
3. Se $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $AB = 6$, $BC = 8$, $AC = 10$ e $DE = 9$, determine EF e DF .
4. Uma redução tem fator 0,4. Qual é a imagem de um segmento de 25 cm?
5. O perímetro de um triângulo é 36 cm. Determine o perímetro de um semelhante com $k = 1,5$.
6. A área de um triângulo é 20 cm². Determine a área de um semelhante com $k = 3$.
7. A razão linear, do menor para o maior, é $7/5$. Se a área do menor é 100 cm², calcule a área do maior.
8. Verifique o critério LAL para lados 4 e 6, lados correspondentes 10 e 15, e ângulos compreendidos de 40°.
9. Verifique o critério LLL para os triângulos $(6, 9, 12)$ e $(8, 12, 16)$.
10. Dois triângulos têm, respectivamente, ângulos $(48^\circ, 72^\circ, x)$ e $(72^\circ, 60^\circ, 48^\circ)$. Determine x e justifique a semelhança.
11. Em $\triangle ABC$, $DE \parallel BC$, $AD = 4$, $AB = 10$ e $AC = 15$. Determine AE .
12. Uma pessoa de 1,60 m projeta sombra de 2 m. No mesmo instante, uma árvore projeta sombra de 7,5 m. Determine a altura da árvore.

16.3 Bloco C — Álgebra e aplicações

1. Se $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $AB = x + 1$, $DE = 12$, $BC = 5$ e $EF = 10$, determine x .
2. Se $AB = 9$, $DE = 12$, $AC = x + 2$ e $DF = 16$, determine x .
3. Lados correspondentes medem x e $x + 2$ no primeiro triângulo, 6 e 9 no segundo. Determine x .
4. Dois triângulos semelhantes têm razão $k = 2,5$. Se o maior tem perímetro 70 cm, determine o perímetro do menor.
5. A área do maior de dois triângulos semelhantes é 225 cm² e $k = 1,5$ do menor para o maior. Determine a área do menor.
6. Em uma planta na escala 1 : 200, uma parede mede 3,5 cm. Determine seu comprimento real em metros.

7. Uma fotografia 10×15 cm é ampliada sem deformação para que o lado maior meça 24 cm. Determine o lado menor.
8. Uma pessoa de 1,75 m projeta sombra de 1,40 m. Um poste projeta sombra de 3,20 m. Determine a altura do poste.
9. Os olhos de uma pessoa estão a 1,60 m do chão. Ela está a 2 m de um espelho horizontal; o prédio está a 15 m do espelho. Determine a altura do prédio.
10. Em $\triangle ABC$, $DE \parallel BC$, $AD = 6$, $DB = 3$ e $DE = 8$. Determine BC .
11. Na homotetia de centro na origem e fator 3, determine as imagens de $A = (2, 1)$ e $B = (-1, 2)$.
12. Um mapa em escala 1 : 50 000 indica distância de 8,4 cm. Determine a distância real em quilômetros.

16.4 Bloco D — Análise e demonstração

1. Demonstre que quaisquer dois triângulos equiláteros são semelhantes.
2. Demonstre que dois triângulos isósceles com ângulos dos vértices congruentes são semelhantes.
3. Dê um contraexemplo para a afirmação “quaisquer dois retângulos são semelhantes”.
4. Se $\triangle A \sim \triangle B$ com fator k_1 e $\triangle B \sim \triangle C$ com fator k_2 , demonstre que o fator de A para C é $k_1 k_2$.
5. Demonstre que a razão entre perímetros de polígonos semelhantes é k .
6. Demonstre que a razão entre áreas de triângulos semelhantes é k^2 .
7. Em um triângulo, o segmento que une os pontos médios de dois lados é paralelo ao terceiro. Use semelhança para concluir que seu comprimento é a metade do terceiro lado.
8. Explique, com um argumento ou desenho, por que dois lados proporcionais e um ângulo não compreendido não formam um critério geral.

17 Questões de aprofundamento

1. No triângulo ABC , $D \in AB$, $E \in AC$ e $DE \parallel BC$. Se $AD : DB = 3 : 2$ e $BC = 25$, determine DE .
2. Dois triângulos semelhantes têm razão entre áreas igual a 3. Determine a razão exata entre os comprimentos correspondentes e explique por que ela não é 3.
3. Uma figura é ampliada por $3/2$ e depois reduzida por $4/5$. Determine o fator total e classifique a transformação final.
4. Dois triângulos semelhantes têm perímetros cuja diferença é 18 cm e razão de semelhança $5/3$ do menor para o maior. Determine os dois perímetros.

5. Uma maquete em escala 1 : 50 representa um reservatório. Se a área de uma face na maquete é 24 cm^2 , determine a área real correspondente em metros quadrados.
6. Um estudante afirma que triângulos de lados (4, 6, 8) e (6, 9, 13) são semelhantes porque os dois primeiros pares estão na razão $3/2$. Analise a afirmação.

18 Avaliação-síntese

1. Defina triângulos semelhantes.
2. Se $\triangle PQR \sim \triangle XYZ$, escreva as correspondências de vértices e lados.
3. Um triângulo possui ângulos 35° , 65° e 80° ; outro possui 80° , 35° e 65° . Qual critério garante a semelhança?
4. Dois triângulos têm ângulos compreendidos iguais; os lados adjacentes medem 6 e 10 no primeiro e 9 e 15 no segundo. Justifique a semelhança e determine k .
5. Verifique se os triângulos de lados (5, 7, 9) e (10, 14, 18) são semelhantes.
6. Em triângulos semelhantes, $x/12 = 7/21$. Determine x .
7. Um bastão de 1,2 m projeta sombra de 0,8 m. Uma torre projeta sombra de 18 m. Determine a altura da torre.
8. Em escala 1 : 250, um comprimento mede 6,4 cm. Determine o comprimento real em metros.
9. Um triângulo de perímetro 24 cm e área 18 cm^2 é ampliado com $k = 2$. Determine o novo perímetro e a nova área.
10. Explique a relação entre congruência e semelhança.
11. Prove que dois triângulos retângulos que possuem um ângulo agudo congruente são semelhantes.
12. Avalie: “Se dois triângulos têm um par de ângulos congruentes, então são semelhantes.” Corrija a afirmação.

19 Gabarito comentado

19.1 Bloco A

1. Ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais.
2. A ordem informa $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$ e $C \leftrightarrow F$.
3. $AB \leftrightarrow DE$, $BC \leftrightarrow EF$ e $AC \leftrightarrow DF$.
4. $k > 1$: ampliação; $0 < k < 1$: redução; $k = 1$: mesmo tamanho.
5. Sim. Na congruência, todos os lados correspondentes são iguais, portanto $k = 1$.

6. Dois pares de ângulos correspondentes congruentes garantem semelhança.
7. Dois pares de lados proporcionais e os ângulos compreendidos congruentes garantem semelhança.
8. Três pares de lados correspondentes proporcionais garantem semelhança.
9. $P_2/P_1 = k$.
10. $A_2/A_1 = k^2$, pois base e altura são multiplicadas por k .
11. Todos os equiláteros são semelhantes por AA. Isósceles não necessariamente, pois o ângulo do vértice pode variar.
12. Não. Por exemplo, triângulos com bases e alturas diferentes podem ter a mesma área e ângulos distintos.

19.2 Bloco B

1. Sim, por LLL: $6/3 = 8/4 = 10/5 = 2$. Logo, $k = 2$.
2. $(15, 21, 24)$.
3. $k = 9/6 = 3/2$. Assim, $EF = 12$ e $DF = 15$.
4. $0,4 \cdot 25 = 10$ cm.
5. $1,5 \cdot 36 = 54$ cm.
6. $A_2 = 3^2 \cdot 20 = 180$ cm².
7. $A_2 = (7/5)^2 \cdot 100 = 196$ cm².
8. $10/4 = 15/6 = 2,5$ e os ângulos compreendidos são iguais: LAL.
9. $8/6 = 12/9 = 16/12 = 4/3$: semelhantes por LLL.
10. $x = 180^\circ - 48^\circ - 72^\circ = 60^\circ$. Os pares angulares coincidem: AA.
11. $AE/15 = 4/10$, portanto $AE = 6$.
12. $H/7,5 = 1,6/2$, portanto $H = 6$ m.

19.3 Bloco C

1. $12/(x+1) = 10/5 = 2$, então $x = 5$.
2. $12/9 = 16/(x+2)$. Logo, $4/3 = 16/(x+2)$, $x+2 = 12$ e $x = 10$.
3. $x/6 = (x+2)/9$. Assim, $9x = 6x + 12$ e $x = 4$.
4. $P_{\text{menor}} = 70/2,5 = 28$ cm.
5. $225 = 1,5^2 A_{\text{menor}}$, então $A_{\text{menor}} = 100$ cm².
6. $3,5 \cdot 200 = 700$ cm = 7 m.

7. $k = 24/15 = 1,6$; lado menor $= 10 \cdot 1,6 = 16$ cm.
8. $H/3,2 = 1,75/1,4 = 1,25$, logo $H = 4$ m.
9. $H/15 = 1,6/2$, portanto $H = 12$ m.
10. $AB = 9$ e $DE/BC = AD/AB = 6/9$. Assim, $8/BC = 2/3$ e $BC = 12$.
11. $A' = (6, 3)$ e $B' = (-3, 6)$.
12. $8,4 \cdot 50\,000 = 420\,000$ cm $= 4,2$ km.

19.4 Bloco D

1. Todo equilátero tem três ângulos de 60° ; quaisquer dois satisfazem AA.
2. Se os ângulos dos vértices são iguais, cada ângulo da base mede metade de 180° menos esse valor. Logo, há dois pares de ângulos iguais: AA.
3. Retângulos 2×3 e 2×5 : todos os ângulos são retos, mas $3/2 \neq 5/2$.
4. Cada comprimento é primeiro multiplicado por k_1 e depois por k_2 ; o resultado é $k_2(k_1a) = (k_1k_2)a$.
5. Somando os lados $ka_1, \dots, ka_n$, obtemos $P_2 = kP_1$.
6. Base e altura correspondentes tornam-se kb e kh ; assim, $A_2 = (kb)(kh)/2 = k^2A_1$.
7. O triângulo menor e o original são semelhantes por AA. Como cada lado até o ponto médio é metade do correspondente, $k = 1/2$; logo, o segmento paralelo mede metade do terceiro lado.
8. O ângulo conhecido pode ficar diante de um lado que admite duas posições para o terceiro vértice. Assim, podem surgir dois triângulos não semelhantes; falta controlar o ângulo compreendido.

19.5 Questões de aprofundamento

1. Como $AD : DB = 3 : 2$, temos $AD/AB = 3/5$. Logo, $DE/BC = 3/5$ e $DE = 15$.
2. $A_2/A_1 = k^2 = 3$, portanto $k = \sqrt{3}$. A razão de áreas contém dois fatores lineares.
3. $k = (3/2)(4/5) = 6/5 = 1,2$; o resultado final é uma ampliação.
4. Seja P o menor. Então $(5/3)P - P = 18$, ou $(2/3)P = 18$. Logo, os perímetros são 27 cm e 45 cm.
5. A razão linear real/maquete é 50, então a razão de áreas é 2500. Área real: $24 \cdot 2500 = 60\,000$ cm² $= 6$ m².
6. A afirmação é falsa. Embora $6/4 = 9/6 = 3/2$, seria necessário $13/8 = 3/2$, mas $13/8 = 1,625$. O critério LLL não é satisfeito.

19.6 Avaliação-síntese

1. Têm ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais.
2. $P \leftrightarrow X, Q \leftrightarrow Y, R \leftrightarrow Z; PQ \leftrightarrow XY, QR \leftrightarrow YZ, PR \leftrightarrow XZ$.
3. AA, pois há pelo menos dois pares de ângulos congruentes.
4. $9/6 = 15/10 = 3/2$ e os ângulos compreendidos são iguais: LAL, com $k = 3/2$.
5. Sim. $10/5 = 14/7 = 18/9 = 2$: LLL.
6. $x/12 = 1/3$, logo $x = 4$.
7. $H/18 = 1,2/0,8 = 1,5$, então $H = 27$ m.
8. $6,4 \cdot 250 = 1600$ cm = 16 m.
9. Perímetro = $2 \cdot 24 = 48$ cm; área = $2^2 \cdot 18 = 72$ cm².
10. Congruência é semelhança com $k = 1$. Toda congruência implica semelhança, mas a recíproca só vale quando $k = 1$.
11. Ambos têm um ângulo reto e um par de ângulos agudos congruentes. Portanto, satisfazem AA.
12. Falsa: um único par não basta. A correção é exigir dois pares de ângulos correspondentes congruentes, conforme AA.

20 Resumo final

Síntese

- $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ fixa a correspondência $A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E, C \leftrightarrow F$.
- Lados correspondentes satisfazem $DE/AB = EF/BC = DF/AC = k$.
- Critério AA: dois pares de ângulos congruentes.
- Critério LAL: dois pares de lados proporcionais e ângulo compreendido congruente.
- Critério LLL: três pares de lados proporcionais.
- Perímetros variam por k ; áreas, por k^2 .
- Congruência é o caso particular $k = 1$.
- Em problemas, justifique o critério, organize a correspondência e mantenha o mesmo sentido nas razões.

Semelhança é a linguagem matemática que torna a escala mensurável.