

Ponto Médio e Distância no Plano Cartesiano

Curso completo de Matemática — 9º ano do Ensino Fundamental

Alinhado à habilidade EF09MA16 da BNCC

Sumário

1	Apresentação e objetivos de aprendizagem	1
2	Plano cartesiano e coordenadas	1
3	Deslocamentos e variações de coordenadas	2
4	Distâncias na malha cartesiana	3
4.1	Segmentos horizontais e verticais	3
4.2	Dois pontos quaisquer	3
4.3	Valor exato e aproximação	4
5	Ponto médio de um segmento	4
6	Mediatriz e equidistância	6
7	Perímetros de figuras no plano	6
8	Áreas de figuras no plano	7
8.1	Base e altura paralelas aos eixos	7
8.2	Decomposição e subtração	7
9	Reconhecimento de figuras por coordenadas	8
10	Transformações e invariância	8
11	Algoritmos e tecnologia digital	9
11.1	Algoritmo geométrico para a distância	9
11.2	Algoritmo geométrico para o ponto médio	9
12	Exercícios de consolidação	10
13	Aprofundamento e elaboração	11

14 Avaliação-síntese	12
15 Gabarito comentado	12
16 Síntese final	14

1 Apresentação e objetivos de aprendizagem

Coordenadas transformam uma figura geométrica em informação numérica. Contudo, os números só adquirem significado quando são relacionados a deslocamentos, comprimentos, pontos médios, perímetros e áreas. Neste curso, a malha cartesiana será o ponto de partida; as expressões algébricas aparecerão depois, como síntese de raciocínios geométricos já compreendidos.

Ao concluir o curso, espera-se que o estudante seja capaz de:

- localizar e interpretar pontos no plano cartesiano;
- descrever deslocamentos horizontais e verticais entre pontos;
- determinar distâncias por contagem, decomposição e Teorema de Pitágoras;
- construir e determinar o ponto médio de um segmento;
- distinguir variação de coordenada, comprimento e distância percorrida;
- calcular perímetros e áreas de figuras representadas por coordenadas;
- classificar triângulos e quadriláteros usando medidas e pontos médios;
- elaborar algoritmos geométricos e validar resultados com tecnologia digital.

Correspondência com a BNCC

A habilidade **EF09MA16** propõe determinar o ponto médio de um segmento e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas suas coordenadas, **sem o uso inicial de fórmulas**, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, perímetros e áreas de figuras planas no plano cartesiano. Por isso, cada fórmula deste curso será deduzida de uma construção ou de um teorema anterior, e não apresentada como regra isolada.

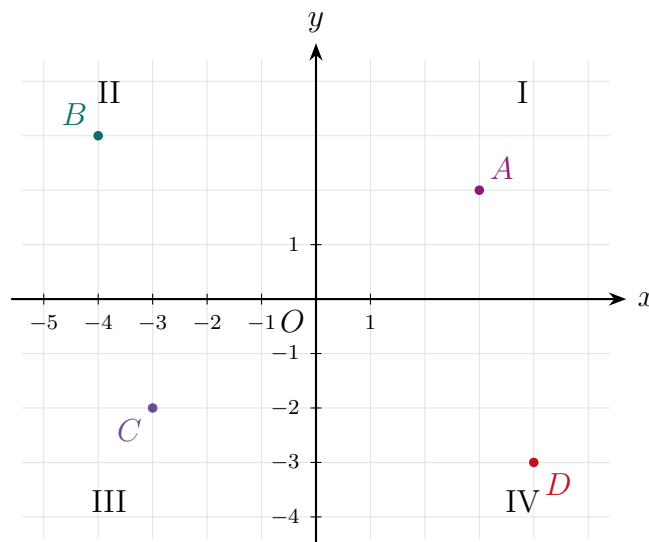
2 Plano cartesiano e coordenadas

Definição 2.1: Plano cartesiano

É o plano determinado por dois eixos numéricos perpendiculares: o eixo horizontal x , chamado eixo das abscissas, e o eixo vertical y , chamado eixo das ordenadas. Sua interseção é a origem $O = (0, 0)$.

Definição 2.2: Par ordenado

Um ponto P é representado por $P = (x_P, y_P)$. A primeira coordenada informa a posição horizontal; a segunda, a posição vertical. A ordem não pode ser trocada.



Os sinais das coordenadas determinam os quadrantes: I $(+, +)$, II $(-, +)$, III $(-, -)$ e IV $(+, -)$. Pontos sobre os eixos não pertencem a quadrante algum.

Erros de leitura frequentes

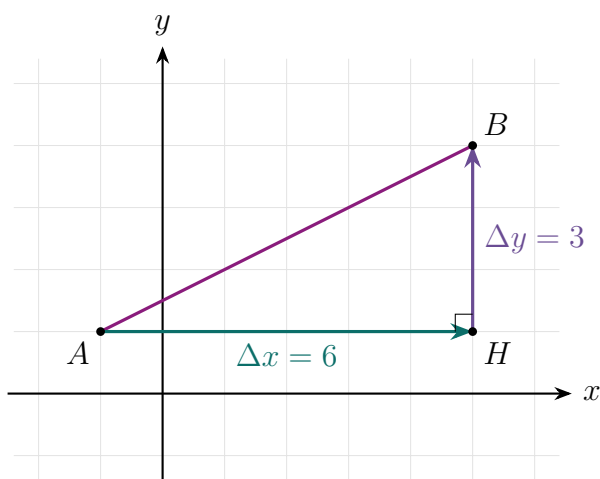
O ponto $(2, -5)$ não é o mesmo que $(-5, 2)$. Além disso, uma coordenada negativa indica posição em relação à origem; não significa que um comprimento seja negativo.

3 Deslocamentos e variações de coordenadas

Considere $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$. Para ir de A a B , a variação horizontal é $\Delta x = x_B - x_A$ e a vertical é $\Delta y = y_B - y_A$. O sinal registra direção: $\Delta x > 0$ indica deslocamento para a direita; $\Delta y < 0$, deslocamento para baixo.

Variação não é distância

Δx e Δy são deslocamentos orientados e podem ser negativos. Os comprimentos horizontal e vertical correspondentes são $|\Delta x|$ e $|\Delta y|$, sempre não negativos.



Exemplo

De $A = (-1, 1)$ até $B = (5, 4)$, andamos 6 unidades para a direita e 3 para cima. Um caminho formado apenas por trechos horizontais e verticais mede $6 + 3 = 9$, mas o segmento reto AB é menor; ele será calculado pelo Teorema de Pitágoras.

4 Distâncias na malha cartesiana

4.1 Segmentos horizontais e verticais

Teorema 4.1: Distância em uma linha horizontal ou vertical

Se $A = (x_A, y)$ e $B = (x_B, y)$ estão na mesma horizontal, então $AB = |x_B - x_A|$. Se $A = (x, y_A)$ e $B = (x, y_B)$ estão na mesma vertical, então $AB = |y_B - y_A|$.

Demonstração

Na mesma horizontal, o comprimento é a quantidade de unidades entre as marcações x_A e x_B do eixo x . A diferença absoluta conta essas unidades independentemente do sentido. O argumento vertical é idêntico.

Exemplo

Os pontos $P = (-4, 3)$ e $Q = (2, 3)$ estão na mesma horizontal. Contando os intervalos $[-4, -3], \dots, [1, 2]$, obtemos $PQ = 6$.

4.2 Dois pontos quaisquer

Se os pontos não estão na mesma horizontal nem na mesma vertical, complete um triângulo retângulo cujos catetos sejam paralelos aos eixos. Seus comprimentos são $|\Delta x|$ e $|\Delta y|$.

Teorema 4.2: Distância por decomposição retangular

Para $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, a distância AB é a hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos $|x_B - x_A|$ e $|y_B - y_A|$. Portanto,

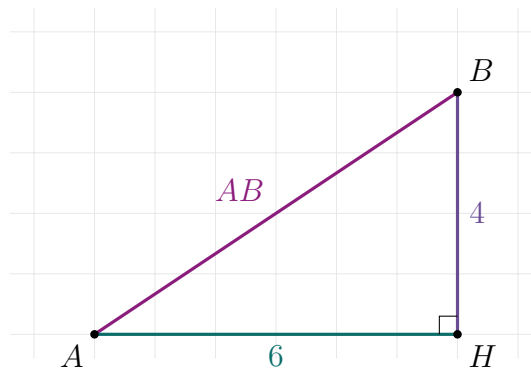
$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

Como extensão algébrica,

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Demonstração

Trace por A uma horizontal e por B uma vertical, encontrando $H = (x_B, y_A)$. Então $AH = |x_B - x_A|$, $HB = |y_B - y_A|$ e $\angle AHB = 90^\circ$. O Teorema de Pitágoras fornece $AB^2 = AH^2 + HB^2$, exatamente a igualdade apresentada.



Exemplo

Para $A = (2, 1)$ e $B = (8, 9)$, os catetos medem 6 e 8. Assim,

$$AB^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \implies AB = 10.$$

O cálculo nasce do triângulo na malha; a expressão com coordenadas apenas registra esse raciocínio.

Distância reta e caminho pelos eixos

A soma $|\Delta x| + |\Delta y|$ mede um caminho que só permite movimentos horizontais e verticais. A distância geométrica entre os pontos é o comprimento do segmento reto e, em geral, vale $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Elas coincidem apenas quando uma das variações é zero.

4.3 Valor exato e aproximação

Se a raiz não é exata, deve-se preservar primeiro a forma radical. Por exemplo, entre $(0, 0)$ e $(3, 2)$,

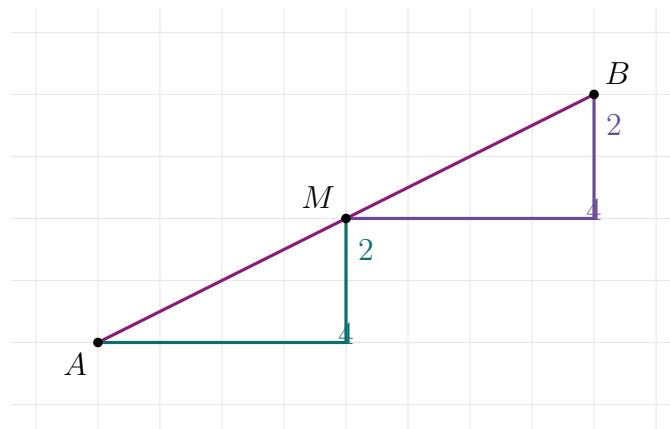
$$d = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \approx 3,61.$$

A igualdade vale para $\sqrt{13}$; o decimal é uma aproximação e deve ser acompanhado do símbolo $\approx$.

5 Ponto médio de um segmento

Definição 5.1: Ponto médio

O ponto médio M de $\overline{AB}$ é o único ponto do segmento que satisfaz $AM = MB$. Ele divide o segmento em duas partes congruentes.



De $A = (-2, 1)$ até $B = (6, 5)$, o deslocamento total é $(8, 4)$. Metade desse deslocamento é $(4, 2)$; somando-a a A , chegamos a $M = (2, 3)$. O mesmo ponto é obtido recuando metade do deslocamento a partir de B .

Teorema 5.1: Coordenadas do ponto médio

Se $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, então

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$

Demonstração

O deslocamento de A a B é $(x_B - x_A, y_B - y_A)$. Avançando metade em cada direção,

$$x_M = x_A + \frac{x_B - x_A}{2} = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = y_A + \frac{y_B - y_A}{2} = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Além disso, os deslocamentos de A a M e de M a B são iguais; logo $AM = MB$.

Exemplo

Para $A = (-6, 1)$ e $B = (2, 5)$,

$$M = \left(\frac{-6 + 2}{2}, \frac{1 + 5}{2} \right) = (-2, 3).$$

Na malha, isso corresponde a avançar 4 unidades à direita e 2 para cima a partir de A .

Recuperar um extremo

Se M é o ponto médio e um extremo é conhecido, o outro pode ser obtido repetindo o mesmo deslocamento. Algebricamente, $B = 2M - A$, coordenada por coordenada.

6 Mediatriz e equidistância

Definição 6.1: Mediatriz

A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento que passa por seu ponto médio.

Teorema 6.1: Lugar geométrico dos pontos equidistantes

Um ponto P está na mediatriz de $\overline{AB}$ se, e somente se, $PA = PB$.

Demonstração

Se P pertence à mediatriz e M é o ponto médio, os triângulos PMA e PMB têm PM comum, $AM = MB$ e ângulos retos em M ; são congruentes por LAL, logo $PA = PB$. Reciprocamente, se $PA = PB$, os triângulos formados com M são congruentes por LLL, e os ângulos adjacentes em M são iguais e suplementares; portanto, ambos são retos e P pertence à mediatriz.

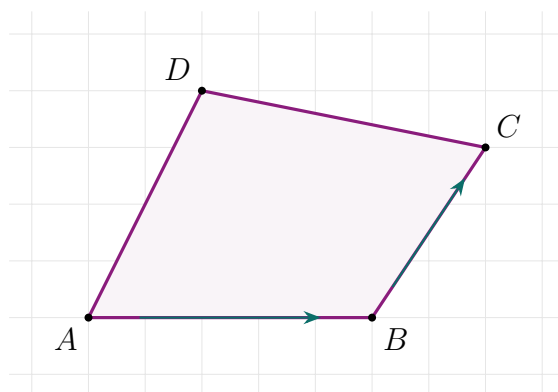
Exemplo

Para $A = (-2, 0)$ e $B = (2, 0)$, o ponto médio é $(0, 0)$ e o segmento é horizontal. Sua mediatriz é o eixo y . Qualquer $P = (0, t)$ satisfaz

$$PA^2 = 2^2 + t^2 = PB^2.$$

7 Perímetros de figuras no plano

O perímetro de um polígono é a soma das distâncias entre vértices consecutivos, incluindo o lado que fecha a figura. A ordem dos vértices deve acompanhar o contorno.



Exemplo

O retângulo de vértices $(1, 1)$, $(7, 1)$, $(7, 5)$ e $(1, 5)$ tem lados 6 e 4. Logo $P = 6+4+6+4 = 20$ unidades.

Diagonais não entram no perímetro

Somente os lados do contorno são somados. Uma diagonal pode ser útil para decompor a figura ou verificar sua forma, mas não pertence ao perímetro.

8 Áreas de figuras no plano

8.1 Base e altura paralelas aos eixos

Quando base e altura são paralelas aos eixos, suas medidas são obtidas por contagem de unidades. Assim, continuam válidas as fórmulas geométricas usuais:

$$A_{\text{ret}} = bh, \quad A_{\Delta} = \frac{bh}{2}, \quad A_{\text{paralelogramo}} = bh.$$

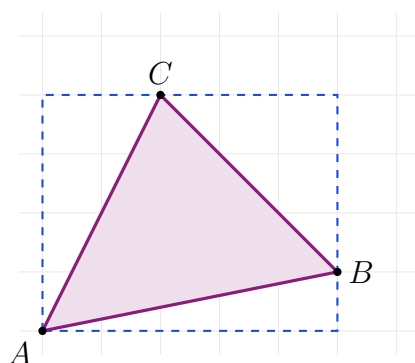
Exemplo

O triângulo de vértices $(1, 1)$, $(7, 1)$ e $(4, 5)$ tem base horizontal 6 e altura 4. Portanto, sua área é $6 \cdot 4/2 = 12$ unidades quadradas.

8.2 Decomposição e subtração

Uma figura inclinada pode ser dividida em triângulos e retângulos ou colocada dentro de um retângulo maior. Nesse segundo método,

$$A_{\text{figura}} = A_{\text{retângulo externo}} - \sum A_{\text{regiões externas}}.$$



Extensão: determinante de área

Depois de compreender a decomposição, a área do triângulo $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ pode ser sintetizada por

$$A = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|.$$

A expressão mede a diferença entre duas áreas orientadas. Ela é uma extensão; na EF09MA16, a decomposição geométrica permanece o método central.

9 Reconhecimento de figuras por coordenadas

Coordenadas permitem testar propriedades sem depender da aparência do desenho.

Teorema 9.1: Critérios métricos úteis

Em uma figura plana:

- lados com a mesma distância têm o mesmo comprimento;
- segmentos horizontais e verticais são perpendiculares;
- dois segmentos com o mesmo deslocamento são paralelos e congruentes;
- se as diagonais de um quadrilátero têm o mesmo ponto médio, o quadrilátero é um paralelogramo;
- um triângulo é retângulo quando o quadrado do maior lado é a soma dos quadrados dos outros dois.

Diagonais que se bisseam

Se M é ponto médio de AC e de BD , então os deslocamentos $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{MC}$ são iguais, assim como $\overrightarrow{BM}$ e $\overrightarrow{MD}$. Subtraindo esses deslocamentos, obtemos $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Logo, os lados opostos são paralelos e congruentes: o quadrilátero é paralelogramo.

Exemplo

Para $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$ e $C = (0, 4)$, temos $AB = AC = 4$ e $BC^2 = 4^2 + 4^2 = 32$. Como $AB \perp AC$, o triângulo é retângulo e isósceles.

10 Transformações e invariância

Teorema 10.1: Translação preserva distâncias e pontos médios

Se o mesmo vetor (u, v) é somado a todos os pontos, distâncias, ângulos, perímetros, áreas e relações de ponto médio permanecem inalterados.

Demonstração

Se $A' = (x_A + u, y_A + v)$ e $B' = (x_B + u, y_B + v)$, então

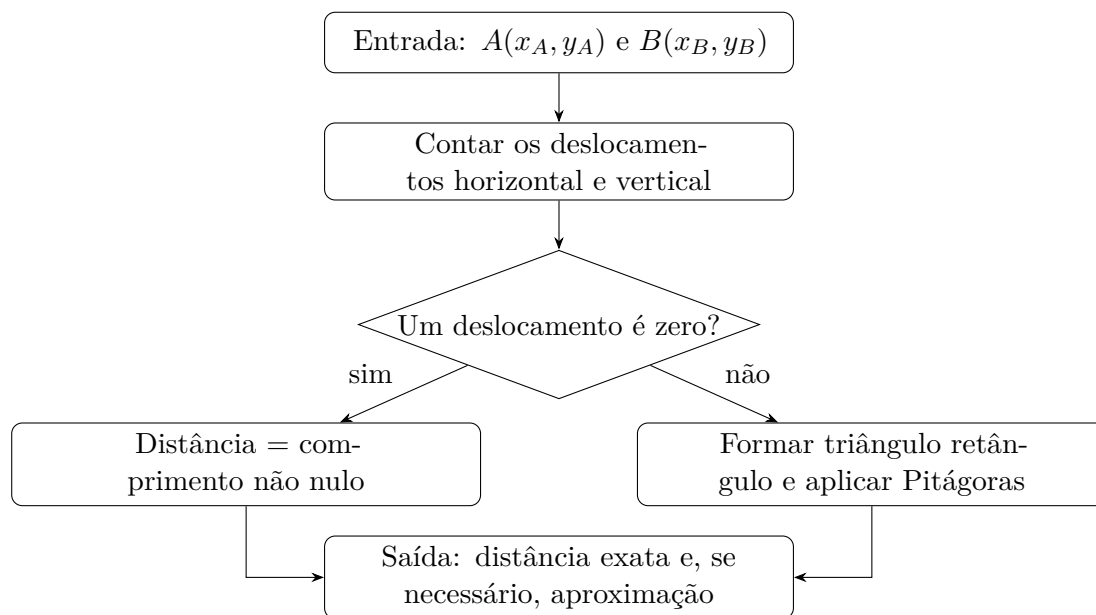
$$x_{B'} - x_{A'} = x_B - x_A, \quad y_{B'} - y_{A'} = y_B - y_A.$$

As variações que determinam a distância não mudam. Além disso, o ponto médio é deslocado pelo mesmo vetor, pois a média de $x_A + u$ e $x_B + u$ é $(x_A + x_B)/2 + u$, e analogamente para y .

Reflexões nos eixos também preservam distâncias: em relação ao eixo x , $(x, y) \mapsto (x, -y)$; em relação ao eixo y , $(x, y) \mapsto (-x, y)$.

11 Algoritmos e tecnologia digital

11.1 Algoritmo geométrico para a distância



11.2 Algoritmo geométrico para o ponto médio

1. **Entrada:** extremos A e B representados na malha.
2. Contar o deslocamento horizontal e o vertical de A até B .
3. Dividir cada deslocamento por 2.
4. A partir de A , executar os dois meios deslocamentos.
5. **Saída:** ponto M .
6. **Validação:** verificar na malha ou por Pitágoras que $AM = MB$.

Atividade investigativa

Em um software de geometria dinâmica, crie dois pontos livres A e B , o segmento AB e seu ponto médio M . Exiba as medidas AM e MB e arraste os extremos. Depois, construa a mediatriz e marque um ponto P sobre ela; compare PA e PB . Registre quais relações permanecem invariantes.

Tecnologia não substitui justificativa

Uma calculadora ou um software pode confirmar valores em muitos casos. A demonstração explica por que o procedimento funciona para todos os pares de pontos admissíveis e também revela hipóteses, como a ordem correta dos vértices de um polígono.

12 Exercícios de consolidação

1. Quais são as coordenadas da origem?
2. No ponto $P = (-4, 3)$, identifique abscissa e ordenada.
3. Indique os quadrantes de $A = (2, 5)$, $B = (-3, 4)$, $C = (-2, -1)$ e $D = (4, -6)$.
4. Os pontos $(0, -7)$ e $(5, 0)$ pertencem a quais eixos?
5. Descreva o deslocamento de $A = (1, 2)$ para $B = (6, 2)$.
6. Determine a distância entre $(-4, 3)$ e $(2, 3)$.
7. Determine a distância entre $(5, -2)$ e $(5, 7)$.
8. Explique por que se usa valor absoluto nas distâncias horizontais e verticais.
9. Para $A = (-1, 2)$ e $B = (3, 5)$, determine Δx e Δy .
10. Determine a distância entre os pontos do item anterior.
11. Determine a distância entre $A = (2, 1)$ e $B = (8, 9)$.
12. Determine a distância exata entre $(0, 0)$ e $(3, 2)$.
13. Aproxime a resposta anterior para duas casas decimais.
14. Compare o caminho pelos eixos e o segmento reto entre $(0, 0)$ e $(3, 2)$.
15. Qual é a distância de um ponto a ele mesmo? Justifique.
16. Explique por que $AB = BA$ para quaisquer pontos A e B .
17. Determine o ponto médio de $(2, 4)$ e $(8, 10)$.
18. Determine o ponto médio de $(-6, 1)$ e $(2, 5)$.
19. Se $A = (1, 3)$ e $M = (4, 5)$ é o ponto médio de AB , determine B .
20. Explique geometricamente por que o ponto médio usa metade de cada deslocamento.
21. Para $A = (-2, 0)$ e $B = (4, 8)$, determine M e verifique que $AM = MB$.
22. Defina mediatriz de um segmento.
23. Explique por que um ponto equidistante dos extremos pertence à mediatriz.
24. Calcule o perímetro do retângulo $(1, 1)$, $(7, 1)$, $(7, 5)$, $(1, 5)$.
25. Calcule a área do retângulo do item anterior.
26. Para o triângulo $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(6, 4)$, determine perímetro exato e área.
27. Determine a diagonal do quadrado $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 3)$, $(0, 3)$.
28. Determine o perímetro e a área do quadrado anterior.

29. No paralelogramo $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$, $C = (6, 3)$, $D = (2, 3)$, determine perímetro e área.
30. Classifique o triângulo $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 4)$ quanto aos lados e ângulos.
31. Classifique o triângulo $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 4)$ quanto aos lados e ângulos.
32. Os pontos $A = (-2, 1)$, $B = (2, 3)$ e $C = (6, 5)$ são colineares? Qual é a posição de B em AC ?
33. Translade $P = (-1, 4)$ pelo vetor $(5, -2)$.
34. Explique por que uma translação preserva distâncias.
35. Reflita $(3, -5)$ em relação ao eixo x .
36. Determine a distância entre $(3, -5)$ e sua reflexão no eixo x .
37. Determine o centro do retângulo de vértices $(1, 1)$, $(7, 1)$, $(7, 5)$ e $(1, 5)$.
38. O que se pode concluir de um quadrilátero convexo cujas diagonais têm o mesmo ponto médio?
39. Calcule a área do triângulo $(1, 1)$, $(5, 1)$, $(3, 4)$.
40. Identifique e corrija o erro: para $A = (-5, 2)$ e $B = (3, -4)$, um estudante afirmou que o ponto médio é $(-2, -2)$.

13 Aprofundamento e elaboração

41. Demonstre a expressão algébrica da distância a partir do Teorema de Pitágoras.
42. Demonstre as coordenadas do ponto médio usando metade do deslocamento.
43. Descreva o lugar geométrico dos pontos equidistantes de $A = (-2, 0)$ e $B = (2, 0)$.
44. Um ponto $P = (x, 3)$ é equidistante de $A = (0, 0)$ e $B = (6, 0)$. Determine x .
45. $A = (1, 1)$, $B = (5, 2)$ e $C = (7, 6)$ são vértices consecutivos de um paralelogramo. Determine D .
46. Para o retângulo $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(6, 2)$, $(0, 2)$, determine centro, diagonais, perímetro e área.
47. O triângulo $A = (1, 1)$, $B = (7, 1)$, $C = (4, 5)$ é isósceles? Determine perímetro e área.
48. No losango $A = (0, 3)$, $B = (4, 0)$, $C = (0, -3)$, $D = (-4, 0)$, determine lados, diagonais, perímetro e área.
49. Calcule por subtração de áreas a área do triângulo $A = (1, 1)$, $B = (6, 2)$, $C = (3, 5)$.
50. Compare o caminho ortogonal e a distância reta entre $A = (-2, -1)$ e $B = (4, 3)$.
51. Escreva um algoritmo textual para construir o ponto médio de um segmento numa malha sem usar a fórmula pronta.
52. Proponha um teste por arraste para verificar uma construção digital de ponto médio e mediatriz.

14 Avaliação-síntese

53. Para $A = (-3, 2)$ e $B = (5, 8)$, determine Δx , Δy e AB .
54. Determine o ponto médio do segmento do item anterior.
55. Se $A = (-4, 1)$ e $M = (2, 3)$ é o ponto médio de AB , determine B .
56. No triângulo $A = (0, 0)$, $B = (8, 0)$, $C = (8, 6)$, determine lados, perímetro e área.
57. Para o retângulo $A = (-2, -1)$, $B = (4, -1)$, $C = (4, 3)$, $D = (-2, 3)$, determine centro, perímetro, área e comprimento das diagonais.
58. Classifique o triângulo $P = (-3, 0)$, $Q = (0, 4)$, $R = (3, 0)$ e determine perímetro e área.
59. Demonstre, usando diferenças de coordenadas, que uma translação preserva distâncias.
60. Verifique que $P = (2, 3)$ e $Q = (2, -5)$ são equidistantes de $A = (0, 0)$ e $B = (4, 0)$; relacione o resultado à mediatriz.
61. Determine a área e o perímetro exato do triângulo $A = (1, 1)$, $B = (7, 1)$, $C = (4, 6)$.
62. Apresente um algoritmo completo, com entrada, passos, saída e validação, para calcular o perímetro de um polígono dado por coordenadas.

15 Gabarito comentado

1. $O = (0, 0)$.
2. Abscissa -4 e ordenada 3 .
3. A : I; B : II; C : III; D : IV.
4. $(0, -7)$ está no eixo y ; $(5, 0)$, no eixo x .
5. Cinco unidades para a direita; não há deslocamento vertical.
6. $|2 - (-4)| = 6$.
7. $|7 - (-2)| = 9$.
8. Porque o comprimento é não negativo e independe do sentido do deslocamento.
9. $\Delta x = 3 - (-1) = 4$ e $\Delta y = 5 - 2 = 3$.
10. Os catetos medem 4 e 3 ; logo $AB = 5$.
11. Catetos 6 e 8 : $AB = \sqrt{36 + 64} = 10$.
12. $d = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.
13. $\sqrt{13} \approx 3,61$.
14. O caminho pelos eixos mede $3 + 2 = 5$; o segmento reto mede $\sqrt{13} \approx 3,61$.
15. Zero, pois não há deslocamento horizontal nem vertical.

16. Trocar A por B muda os sinais das variações, mas seus quadrados permanecem iguais.
17. $M = ((2 + 8)/2, (4 + 10)/2) = (5, 7)$.
18. $M = (-2, 3)$.
19. O deslocamento $A \rightarrow M$ é $(3, 2)$; repetindo-o, $B = (7, 7)$.
20. O ponto médio deve executar exatamente metade do deslocamento total em cada direção.
21. $M = (1, 4)$. Os deslocamentos até M são $(3, 4)$ e ambos os comprimentos valem 5.
22. Reta perpendicular ao segmento que passa por seu ponto médio.
23. Pelo teorema da mediatriz: os triângulos formados com o ponto médio são congruentes.
24. Lados 6 e 4; $P = 2(6 + 4) = 20$.
25. $A = 6 \cdot 4 = 24$.
26. Lados 6, 4 e $\sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$; $P = 10 + 2\sqrt{41}$ e $A = 6 \cdot 4/2 = 12$.
27. $d = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$.
28. $P = 12$ e $A = 9$.
29. $AB = CD = 4$ e $BC = DA = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$; $P = 8 + 2\sqrt{13}$ e $A = 4 \cdot 3 = 12$.
30. Dois catetos iguais e perpendiculares: retângulo isósceles.
31. Lados 3, 4 e 5: retângulo escaleno.
32. Sim. Os deslocamentos $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow C$ são ambos $(4, 2)$; portanto, B é ponto médio de AC .
33. $P' = (-1 + 5, 4 - 2) = (4, 2)$.
34. O mesmo vetor somado aos extremos cancela-se ao calcular as diferenças de coordenadas.
35. $(3, 5)$.
36. Os pontos têm a mesma abscissa; a distância vertical é $|5 - (-5)| = 10$.
37. É o ponto médio de qualquer diagonal: $(4, 3)$.
38. Ele é um paralelogramo, pois as diagonais se bissectam.
39. Base 4, altura 3: $A = 4 \cdot 3/2 = 6$.
40. O erro foi não calcular a média corretamente. $M = ((-5 + 3)/2, (2 - 4)/2) = (-1, -1)$.
41. Construir o ponto auxiliar (x_B, y_A) produz catetos $|x_B - x_A|$ e $|y_B - y_A|$; Pitágoras fornece $d^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$.
42. Avançar metade de $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ a partir de A fornece $((x_A + x_B)/2, (y_A + y_B)/2)$.
43. A mediatriz de AB : o eixo y , isto é, a reta $x = 0$.
44. Igualando os quadrados das distâncias: $x^2 + 9 = (x - 6)^2 + 9$, então $x = 3$.

45. Para lados consecutivos, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = (2, 4)$; logo $D = (3, 5)$.
46. Centro $(3, 1)$; cada diagonal mede $\sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$; $P = 16$ e $A = 12$.
47. $AC = BC = 5$ e $AB = 6$: isósceles. $P = 16$ e $A = 6 \cdot 4/2 = 12$.
48. Todos os lados medem 5; diagonais $AC = 6$ e $BD = 8$; $P = 20$ e $A = 6 \cdot 8/2 = 24$.
49. Retângulo externo: $5 \cdot 4 = 20$. Regiões externas: $5/2$, $9/2$ e 4 ; logo $A = 20 - 11 = 9$.
50. O caminho ortogonal mede $6 + 4 = 10$; a distância reta é $\sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13} \approx 7,21$.
51. Entrada A, B ; contar os dois deslocamentos, dividir cada um ao meio e executá-los a partir de A ; saída M ; validar $AM = MB$.
52. Arrastar A e B e verificar continuamente $AM = MB$, perpendicularidade da mediatriz e $PA = PB$ para um ponto P sobre ela.
53. $\Delta x = 8$, $\Delta y = 6$ e $AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.
54. $M = ((-3 + 5)/2, (2 + 8)/2) = (1, 5)$.
55. $B = 2M - A = (8, 5)$.
56. Lados 8, 6 e 10; $P = 24$ e $A = 8 \cdot 6/2 = 24$.
57. Centro $(1, 1)$; $P = 20$; $A = 24$; diagonais $\sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$.
58. $PQ = QR = 5$ e $PR = 6$: isósceles. $P = 16$ e $A = 6 \cdot 4/2 = 12$.
59. Para $A' = A + (u, v)$ e $B' = B + (u, v)$, as diferenças são $x_{B'} - x_{A'} = x_B - x_A$ e $y_{B'} - y_{A'} = y_B - y_A$; logo a distância não muda.
60. $PA^2 = PB^2 = 13$ e $QA^2 = QB^2 = 29$. Ambos têm $x = 2$, portanto pertencem à mediatriz $x = 2$.
61. Base 6, altura 5: $A = 15$. Os lados inclinados medem $\sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$; $P = 6 + 2\sqrt{34}$.
62. Entrada: vértices em ordem de contorno. Calcular a distância entre cada par consecutivo e entre o último e o primeiro; somar; apresentar forma exata e aproximação, se pedida. Validar a ordem do contorno e conferir unidades.

16 Síntese final

Síntese

Para $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$:

$$\Delta x = x_B - x_A, \quad \Delta y = y_B - y_A,$$

$$AB^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2, \quad M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$

As expressões são consequências de duas ideias geométricas: completar um triângulo retângulo para calcular a distância e executar metade de cada deslocamento para encontrar o ponto médio. Perímetros somam distâncias do contorno; áreas vêm de base e altura, decomposição ou subtração de regiões.