

Polígonos Regulares e Construções Geométricas

Curso completo de Matemática — 9º ano do Ensino Fundamental

Alinhado à habilidade EF09MA15 da BNCC

Sumário

1	Apresentação e objetivos	1
2	Conceitos fundamentais	1
3	Somas e medidas angulares	2
4	Centro, circunferências e simetrias	3
5	Instrumentos e construções elementares	4
5.1	Transportar um comprimento	4
5.2	Mediatriz de um segmento	5
5.3	Bissetriz de um ângulo	5
5.4	Perpendicular por um ponto	5
6	Construção de polígonos fundamentais	5
6.1	Triângulo equilátero de lado dado	5
6.2	Quadrado de lado dado	6
6.3	Hexágono regular de lado dado	6
6.4	Polígonos por bissecção	7
6.5	Pentágono regular inscrito: extensão exata	7
7	Algoritmos e fluxogramas	8
7.1	Algoritmo escrito: quadrado de lado s	9
7.2	Fluxograma com repetição: hexágono	9
8	Perímetro e área	10
9	Pavimentações regulares	11
10	Exercícios de consolidação	11

11 Aprofundamento e elaboração	12
12 Avaliação-síntese	13
13 Gabarito comentado	13
14 Síntese final	16

1 Apresentação e objetivos

Um polígono regular reúne duas regularidades: todos os lados são congruentes e todos os ângulos internos são congruentes. Neste curso, suas propriedades serão deduzidas e usadas para justificar construções com régua não graduada e compasso.

Ao concluir o curso, espera-se que o estudante seja capaz de:

- reconhecer, nomear e classificar polígonos regulares;
- deduzir e calcular somas e medidas de ângulos internos, externos e centrais;
- determinar diagonais, simetrias, perímetros, apótemas e áreas;
- relacionar polígonos regulares às circunferências inscrita e circunscrita;
- executar e justificar construções com régua não graduada e compasso;
- descrever construções por escrito, por algoritmo e por fluxograma;
- usar geometria dinâmica para construir e testar figuras sem confundir teste com prova;
- analisar pavimentações e distinguir construção exata de desenho aproximado.

Correspondência com a BNCC

A habilidade **EF09MA15** propõe descrever, por escrito e por meio de fluxograma, um algoritmo para construir um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso e também tecnologias digitais. Isso significa que o comprimento dado pode ser qualquer número positivo; não significa que todo número de lados admita construção clássica exata.

2 Conceitos fundamentais

Definição 2.1: Polígono

É uma figura plana simples formada por uma sequência fechada de segmentos, na qual segmentos consecutivos se encontram apenas em um extremo e segmentos não consecutivos não se cruzam.

Definição 2.2: Polígono regular

Um polígono convexo é regular quando é simultaneamente *equilátero* (lados congruentes) e *equiângulo* (ângulos internos congruentes).

Definição 2.3: Diagonal

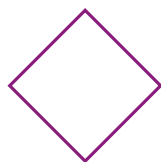
É todo segmento que une dois vértices não consecutivos de um polígono. Lados não são diagonais.

Atenção

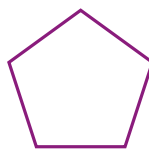
Ter todos os lados iguais não basta em geral para garantir regularidade; ter todos os ângulos iguais também não. Um losango não quadrado e um retângulo não quadrado são contraexemplos.



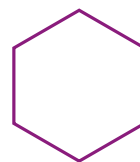
triângulo



quadrado



pentágono



hexágono

n	3	4	5	6	8
nome	triângulo	quadrilátero	pentágono	hexágono	octógono
regular	equilátero	quadrado	pentágono regular	hexágono regular	octógono regular
usual					

Para $n = 7, 9, 10, 12$ usam-se, respectivamente, os nomes heptágono, eneágono ou nonágono, decágono e dodecágono. A expressão “ n -gono” é aceita para qualquer $n \geq 3$.

3 Somas e medidas angulares

Teorema 3.1: Soma dos ângulos internos

Em todo polígono convexo de $n \geq 3$ lados,

$$S = (n - 2)180^\circ.$$

Demonstração

Fixe um vértice. As diagonais que partem dele decompõem o polígono em $n - 2$ triângulos sem sobreposição. Como cada triângulo tem soma angular 180° , a soma total é $(n - 2)180^\circ$.

Teorema 3.2: Ângulos de um polígono regular

Num polígono regular de n lados, cada ângulo interno I , cada ângulo externo E e cada ângulo central C satisfazem

$$I = \frac{(n - 2)180^\circ}{n} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}, \quad E = C = \frac{360^\circ}{n}.$$

Demonstração

Os n ângulos internos são iguais, logo cada um é S/n . Um externo e o interno adjacente são suplementares, então $E = 180^\circ - I = 360^\circ/n$. Os raios aos vértices repartem a volta completa em n ângulos centrais iguais, logo $C = 360^\circ/n$.

Exemplo

No dodecágono regular, $C = E = 360^\circ/12 = 30^\circ$ e $I = 150^\circ$.

Teorema 3.3: Soma dos ângulos externos

Escolhendo um ângulo externo em cada vértice, todos no mesmo sentido, a soma em qualquer polígono convexo é 360° .

Demonstração

Em cada vértice, o ângulo interno e o externo adjacente somam 180° . Assim,

$$\sum E = n \cdot 180^\circ - S = n \cdot 180^\circ - (n - 2)180^\circ = 360^\circ.$$

Geometricamente, os ângulos externos registram a mudança de direção ao completar uma volta no contorno.

Teorema 3.4: Número de diagonais

Um polígono de $n \geq 3$ lados possui

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

diagonais.

Demonstração

De cada um dos n vértices saem segmentos para $n - 3$ vértices não consecutivos. O produto $n(n - 3)$ conta cada diagonal duas vezes, uma a partir de cada extremo; por isso, divide-se por 2.

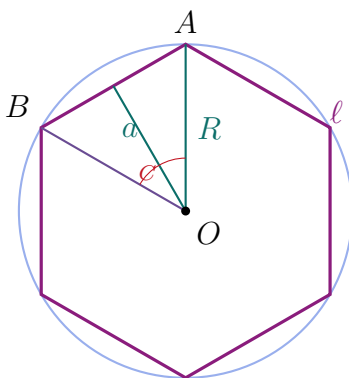
4 Centro, circunferências e simetrias

Teorema 4.1: Centro do polígono regular

Todo polígono regular possui um ponto O equidistante dos vértices e dos lados. Assim, admite uma circunferência circunscrita, de raio R , e uma inscrita, de raio a , chamado apótema.

O ponto O é a interseção das mediatrizes dos lados e também das bissetrizes dos ângulos internos. Ligando O aos vértices, o polígono se divide em n triângulos isósceles congruentes. A perpendicular de O a um lado o divide ao meio e produz um triângulo retângulo com

hipotenusa R , catetos a e $\ell/2$, e ângulo $180^\circ/n$ no centro.



Consequentemente,

$$\ell = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}, \quad a = R \cos \frac{180^\circ}{n}, \quad a = \frac{\ell}{2 \tan(180^\circ/n)}.$$

Observação

As fórmulas trigonométricas são uma extensão e pressupõem que a calculadora esteja no modo graus. As construções fundamentais podem ser justificadas apenas com congruência, mediatrizes, bissetões e propriedades da circunferência.

Um polígono regular de n lados possui n eixos de simetria. Se n é ímpar, cada eixo passa por um vértice e pelo ponto médio do lado oposto; se n é par, metade passa por pares de vértices opostos e metade por pontos médios de lados opostos. As rotações que preservam a figura têm ângulos múltiplos de $360^\circ/n$; a menor rotação positiva é $360^\circ/n$.

5 Instrumentos e construções elementares

Definição 5.1: Construção exata

É um procedimento finito em que a régua não graduada traça retas determinadas por pontos e o compasso transporta distâncias ou traça circunferências. A validade decorre das propriedades geométricas, não da aparência do desenho.

Operações permitidas

Neste curso, a **régua não graduada** serve para traçar a reta determinada por dois pontos; ela não mede comprimentos. O **compasso** traça circunferências de centro e raio conhecidos e transporta comprimentos. Interseções entre retas e circunferências produzem novos pontos.

5.1 Transportar um comprimento

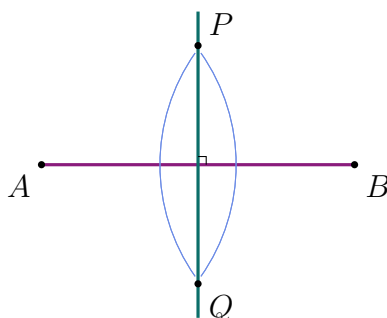
Para marcar, sobre uma semirreta de origem P , um ponto Q tal que $PQ = AB$, abra o compasso em AB e trace uma circunferência de centro P . A interseção escolhida com a semirreta é Q . A igualdade decorre da definição de circunferência.

5.2 Mediatrix de um segmento

Para um segmento AB : (1) abra o compasso com raio maior que $AB/2$; (2) trace arcos de centros A e B , que se cruzem em P e Q ; (3) trace PQ .

Demonstração

Como $PA = PB$ e $QA = QB$, os pontos P e Q pertencem ao lugar geométrico dos pontos equidistantes de A e B . Logo PQ é a mediatrix: é perpendicular a AB e passa por seu ponto médio.



5.3 Bissetriz de um ângulo

Trace um arco de centro no vértice, marcando A e B nos lados. Com a mesma abertura, trace arcos de centros A e B , encontrando P . A semirreta do vértice por P é a bissetriz. A justificativa vem da congruência LLL dos dois triângulos formados.

5.4 Perpendicular por um ponto

Se o ponto pertence à reta, marque nela dois pontos equidistantes do ponto dado e construa a mediatrix do segmento determinado. Se o ponto é exterior, trace uma circunferência que corte a reta em dois pontos e construa a mediatrix da corda obtida. Esses procedimentos permitem erguer os ângulos retos usados no quadrado.

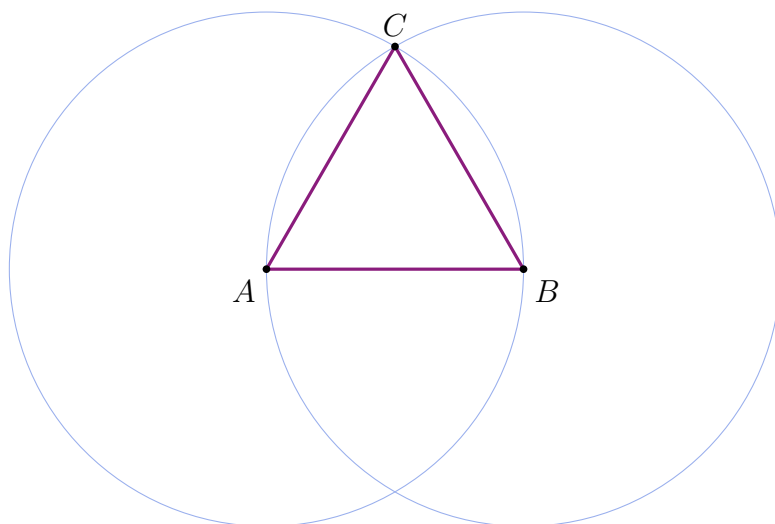
Desenhar não é construir

Uma figura feita com régua graduada ou transferidor pode ser muito precisa, mas continua sujeita a erro de leitura. Numa construção exata, as igualdades e perpendicularidades resultam das operações efetuadas e podem ser demonstradas.

6 Construção de polígonos fundamentais

6.1 Triângulo equilátero de lado dado

Dado AB : trace as circunferências de centros A e B e raio AB ; escolha uma interseção C ; una A, B, C . Como $AB = AC = BC$, o triângulo é equilátero e, portanto, regular.

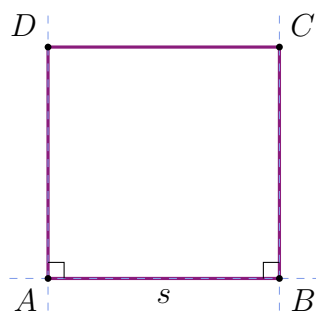


6.2 Quadrado de lado dado

Dado AB : erga perpendiculares a AB em A e B ; transporte a medida AB sobre elas, no mesmo semiplano, obtendo D e C ; una C a D .

Justificativa da construção

Por construção, $AD \perp AB$, $BC \perp AB$ e $AD = BC = AB$. Duas retas perpendiculares à mesma reta são paralelas, logo $AD \parallel BC$. O quadrilátero tem um par de lados opostos paralelos e congruentes, portanto é paralelogramo. Assim, $DC = AB$, e um paralelogramo com ângulo reto é retângulo. Como todos os lados medem AB , ele é quadrado.

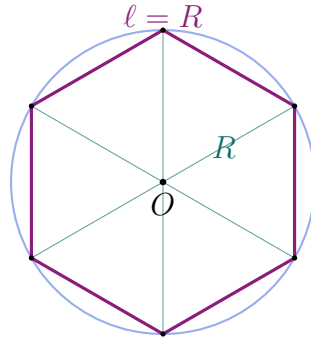


6.3 Hexágono regular de lado dado

Dado um segmento de comprimento s , trace uma circunferência de raio s . Escolha A na circunferência e, sem alterar a abertura do compasso, marque sucessivamente seis cordas. Una os pontos consecutivos. Cada triângulo central é equilátero; seu ângulo central é 60° , e seis deles completam 360° .

Teorema 6.1: Lado do hexágono inscrito

O lado do hexágono regular inscrito numa circunferência é igual ao raio: $\ell = R$.



O sexto transporte retorna ao ponto inicial. Essa volta completa não é uma coincidência experimental: os seis ângulos centrais de 60° somam exatamente 360° .

6.4 Polígonos por bissecção

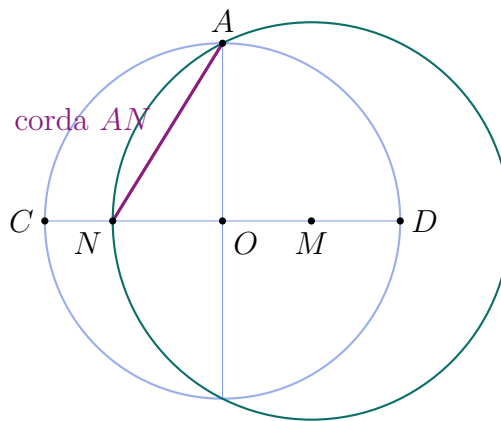
Construído um n -gono regular inscrito, bissecar cada ângulo central e marcar as interseções com a circunferência produz um $2n$ -gono regular. Assim, do quadrado obtemos o octógono; do hexágono, o dodecágono.

Demonstração

Cada ângulo central $360^\circ/n$ é dividido em dois ângulos de $180^\circ/n = 360^\circ/(2n)$. Ângulos centrais congruentes subtendem cordas congruentes, portanto os $2n$ lados são iguais. Os vértices estão sobre a mesma circunferência e igualmente espaçados, de modo que os ângulos internos também são congruentes.

6.5 Pentágono regular inscrito: extensão exata

Trace uma circunferência de centro O e raio R . Escolha diâmetros perpendiculares AB e CD , com A no alto e B embaixo. Seja M o ponto médio de OD , em que D é a extremidade direita do diâmetro horizontal. Com centro M e raio MA , marque no semidiâmetro oposto a D um ponto N . O segmento AN é a corda correspondente ao lado do pentágono regular; transporte essa abertura cinco vezes sobre a circunferência e uma pontos consecutivos.



Por que aparece a razão áurea?

Tomando $R = 1$, temos $OM = 1/2$ e, por Pitágoras, $MA = \sqrt{5}/2$. O ponto construído satisfaz $ON = (\sqrt{5} - 1)/2 = 1/\varphi$, em que $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$. Como $AO \perp ON$,

$$AN^2 = AO^2 + ON^2 = 1 + \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}.$$

Por outro lado, $2 \sin 36^\circ = \sqrt{(5 - \sqrt{5})/2}$; logo $AN = 2R \sin 36^\circ$, exatamente o comprimento da corda que subtende $72^\circ = 360^\circ/5$. Cinco transportes completam a volta. A construção é exata, pois usa apenas ponto médio, perpendicular, circunferência e transporte de corda.

Limite da construção clássica

Nem todo polígono regular pode ser construído exatamente apenas com régua e compasso. Triângulo, quadrado, pentágono, hexágono e todos os polígonos obtidos deles por duplicações sucessivas são exemplos construtíveis; o heptágono regular não é. Um software pode dividir numericamente a volta em sete partes, mas esse procedimento aproximado não se torna uma construção clássica exata.

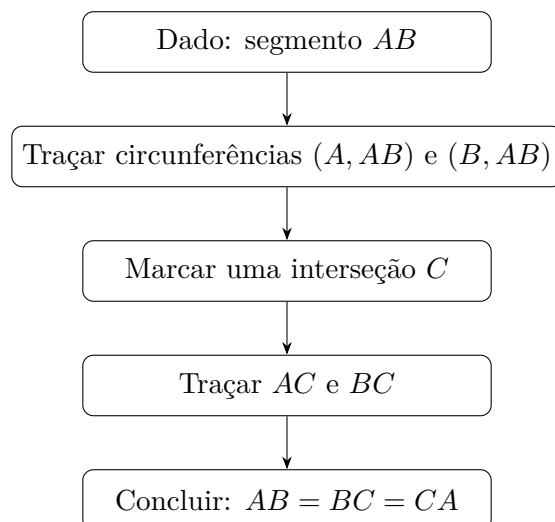
7 Algoritmos e fluxogramas

Um algoritmo geométrico deve declarar dados de entrada, operações permitidas, ordem dos passos, condição de encerramento e justificativa.

Definição 7.1: Invariante geométrico

É uma propriedade que permanece verdadeira durante a construção, como “a abertura do compasso continua igual a s ” ou “todos os novos vértices pertencem à mesma circunferência”. Invariantes permitem justificar o resultado final.

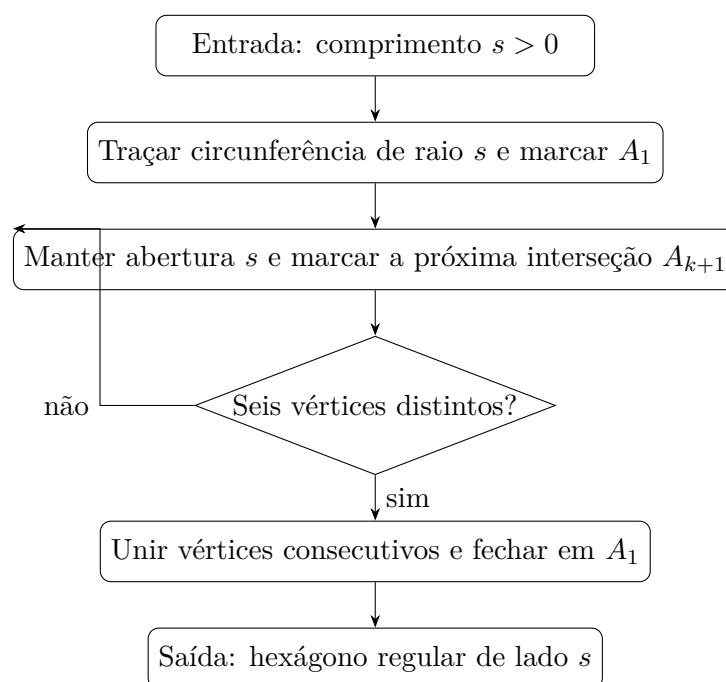
Para o triângulo equilátero de lado conhecido, um fluxograma possível é:



7.1 Algoritmo escrito: quadrado de lado s

1. **Entrada:** segmento AB de comprimento $s > 0$.
2. Construir as perpendiculares a AB em A e em B .
3. Com abertura s , marcar D na primeira e C na segunda, no mesmo semiplano de AB .
4. Traçar CD .
5. **Saída:** quadrado $ABCD$.
6. **Validação:** demonstrar $AB = BC = CD = DA$ e os quatro ângulos retos.

7.2 Fluxograma com repetição: hexágono



Condição de parada

No hexágono, é possível registrar $k = 1, 2, \dots, 6$ em vez de usar apenas a aparência de retorno ao início. Um algoritmo precisa terminar de maneira inequívoca.

Atividade investigativa

Em um programa de geometria dinâmica, construa um círculo, marque um ponto e aplique rotações sucessivas de $360^\circ/n$. Arraste o centro e o ponto inicial. Registre quais propriedades permanecem invariantes e explique por que o teste por arraste aumenta a confiança, mas não substitui a demonstração.

Construção em software

Uma construção digital robusta deve usar dependências geométricas: ponto sobre circunferência, segmento com comprimento fixado, rotação de centro definido ou interseção de objetos. Posicionar pontos “a olho” produz apenas uma ilustração. O teste por arraste verifica se as dependências foram preservadas em muitas configurações, mas uma demonstração explica por que elas valem em todas as configurações admissíveis.

8 Perímetro e área

Se o lado mede ℓ , o perímetro é

$$P = n\ell.$$

Teorema 8.1: Área do polígono regular

Se um polígono regular tem perímetro $P = n\ell$ e apótema a , então

$$A = \frac{Pa}{2} = \frac{n\ell a}{2}.$$

Demonstração

Os segmentos do centro aos vértices formam n triângulos de base ℓ e altura a . Somando suas áreas: $A = n(\ell a/2) = Pa/2$.

Exemplo

Um hexágono regular de lado 6 cm tem apótema $3\sqrt{3}$ cm. Logo $P = 36$ cm e $A = 36(3\sqrt{3})/2 = 54\sqrt{3}$ cm².

Teorema 8.2: Efeito de uma mudança de escala

Se todas as medidas lineares de um polígono regular são multiplicadas por $k > 0$, seu perímetro é multiplicado por k e sua área, por k^2 .

Demonstração

Como $P = n\ell$, a troca $\ell \mapsto k\ell$ produz $P \mapsto kP$. O apótema também é multiplicado por k ; portanto,

$$A' = \frac{(kP)(ka)}{2} = k^2 A.$$

Unidades

Perímetros são expressos em unidades lineares, como cm; áreas, em unidades quadradas, como cm². Uma resposta de área em centímetros, sem o expoente 2, está dimensionalmente incompleta.

9 Pavimentações regulares

Ao redor de um vértice de uma pavimentação sem lacunas nem sobreposições, a soma dos ângulos deve ser 360° . Se apenas um tipo de polígono regular é usado, seu ângulo interno deve dividir 360° . Isso ocorre apenas com triângulos equiláteros (60°), quadrados (90°) e hexágonos regulares (120°).

Demonstração

Se $kI = 360^\circ$, então $k(180 - 360/n) = 360$. Equivalentemente,

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} \iff (n-2)(k-2) = 4.$$

Como $n, k \geq 3$, os dois fatores são inteiros positivos. As decomposições ordenadas de 4 são $1 \cdot 4$, $2 \cdot 2$ e $4 \cdot 1$, que fornecem $(n, k) = (3, 6), (4, 4), (6, 3)$.

Observação

A condição de soma 360° é necessária para o encontro local ao redor de um vértice. Nos três casos obtidos, ela também é suficiente: as pavimentações regulares por triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos podem ser prolongadas por todo o plano.

10 Exercícios de consolidação

1. Defina polígono regular.
2. Explique por que um losango não quadrado não é regular.
3. Nomeie os polígonos de 3, 5, 8, 10 e 12 lados.
4. Calcule a soma interna de um heptágono.
5. Calcule a soma interna de um decágono.
6. Determine cada ângulo interno de um pentágono regular.
7. Determine cada ângulo externo de um nonágono regular.
8. Determine o ângulo central de um dodecágono regular.
9. Um ângulo externo mede 24° . Quantos lados há?
10. Um ângulo interno mede 156° . Quantos lados há?
11. Verifique que $I + E = 180^\circ$.
12. Quantas diagonais partem de um vértice de um eneágono?
13. Quantas diagonais possui um octógono?
14. Quantos eixos de simetria tem um hexágono regular?
15. Qual é a menor rotação positiva que preserva um decágono regular?

16. Diferencie raio circunscrito e apótema.
17. Por que o centro pertence às mediatrizes dos lados?
18. Calcule o perímetro de um 15-gono regular de lado 4 cm.
19. Calcule a área de um polígono com $P = 48$ cm e $a = 7$ cm.
20. Calcule a área de um quadrado de lado 9 cm usando $Pa/2$.
21. Num hexágono regular de lado 8 cm, determine P .
22. No mesmo hexágono, use $a = 4\sqrt{3}$ cm e determine a área.
23. Descreva a construção da mediatriz.
24. Justifique a construção da bissetriz.
25. Construa conceitualmente um triângulo equilátero sobre AB .
26. Explique por que o lado do hexágono inscrito é igual ao raio.
27. Como obter um octógono inscrito a partir de um quadrado?
28. Como obter um dodecágono inscrito a partir de um hexágono?
29. Por que medir 60° com transferidor não é uma construção clássica exata?
30. Dê as entradas e a saída do algoritmo do triângulo equilátero.
31. Determine se um retângulo de lados 3 e 5 é regular.
32. Determine se todo triângulo equilátero é regular.
33. Determine n quando o ângulo central é 15° .
34. Determine I num 20-gono regular.
35. Determine a soma dos externos, um por vértice, de um polígono convexo.
36. Três quadrados podem se encontrar sem lacuna num único vértice? Justifique.
37. Quantos triângulos equiláteros se encontram numa pavimentação regular?
38. Quantos hexágonos regulares se encontram num vértice?
39. Por que pentágonos regulares não pavimentam sozinhos o plano?
40. Calcule R de um hexágono regular de lado 11 cm.

11 Aprofundamento e elaboração

41. Demonstre a fórmula do número de diagonais $D = n(n - 3)/2$.
42. Um polígono regular tem 35 diagonais. Determine n .
43. Compare as áreas de dois polígonos regulares semelhantes cujos lados estão na razão 3 : 5.

44. Um octógono regular tem perímetro 80 cm e apótema 12 cm. Calcule a área.
45. Um jardim hexagonal regular tem lado 10 m. Determine a área exata.
46. Determine o lado de um quadrado inscrito numa circunferência de raio 5 cm.
47. Determine o apótema de um quadrado de lado s .
48. Mostre que o triângulo central do hexágono inscrito é equilátero.
49. Explique por que bissecar todos os ângulos centrais preserva a regularidade.
50. Escreva um fluxograma textual para construir um quadrado de lado dado.
51. Escreva um algoritmo para construir um hexágono inscrito.
52. Proponha um teste por arraste para validar uma construção digital de quadrado.

12 Avaliação-síntese

53. Calcule I , E e C de um 15-gono regular.
54. Um polígono regular possui 27 diagonais. Determine o número de lados.
55. Calcule a área de um hexágono regular de lado 12 cm.
56. Descreva e justifique a construção de um triângulo equilátero de lado dado.
57. Descreva como construir um octógono regular inscrito a partir de um quadrado.
58. Explique a diferença entre desenho aproximado e construção exata.
59. Prove que apenas triângulo, quadrado e hexágono regulares pavimentam o plano isoladamente.
60. Um piso quadrado tem área 196 cm^2 . Determine lado, perímetro e apótema.
61. Um polígono regular tem ângulo interno 165° . Determine n e o menor ângulo de rotação.
62. Apresente um algoritmo completo, com entrada, passos, saída e justificativa, para o hexágono regular inscrito.

13 Gabarito comentado

1. Convexo, equilátero e equiângulo.
2. Tem lados iguais, mas seus ângulos não são todos iguais.
3. Triângulo, pentágono, octógono, decágono e dodecágono.
4. $(7 - 2)180 = 900^\circ$.
5. $8 \cdot 180 = 1440^\circ$.

6. 108° .
7. $360/9 = 40^\circ$.
8. 30° .
9. $n = 360/24 = 15$.
10. $E = 24^\circ$ e $n = 15$.
11. São um par linear: $I + E = 180^\circ$.
12. $9 - 3 = 6$.
13. $8(5)/2 = 20$.
14. Seis.
15. $360/10 = 36^\circ$.
16. R vai do centro ao vértice; a , do centro perpendicularmente ao lado.
17. O centro é equidistante dos extremos de cada lado.
18. 60 cm.
19. $A = 48 \cdot 7/2 = 168 \text{ cm}^2$.
20. $P = 36$, $a = 4,5$ e $A = 81 \text{ cm}^2$.
21. 48 cm.
22. $A = 48(4\sqrt{3})/2 = 96\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
23. Arcos de mesmo raio, centros nos extremos; unir suas interseções.
24. Os triângulos formados são congruentes por LLL.
25. Interseção de circunferências de centros A, B e raio AB .
26. O ângulo central é 60° ; o triângulo central é equilátero.
27. Bissecar os quatro ângulos centrais de 90° .
28. Bissecar os seis ângulos centrais de 60° .
29. O transferidor introduz leitura e erro de medida; não produz a igualdade por incidências exatas.
30. Entrada: AB ; saída: $\triangle ABC$ regular; passos conforme a construção.
31. Não: não é equilátero.
32. Sim: seus três ângulos são 60° .
33. $n = 360/15 = 24$.
34. $I = 180 - 18 = 162^\circ$.

35. 360° .
36. Não: somam 270° .
37. Seis, pois $6 \cdot 60 = 360^\circ$.
38. Três, pois $3 \cdot 120 = 360^\circ$.
39. 108° não divide 360° em número inteiro.
40. $R = \ell = 11$ cm.
41. De cada vértice saem $n - 3$ diagonais; cada uma é contada duas vezes, logo $D = n(n - 3)/2$.
42. $n(n - 3)/2 = 35$, então $n^2 - 3n - 70 = 0$ e $n = 10$.
43. A razão das áreas é o quadrado da razão linear: $9 : 25$.
44. $A = 80 \cdot 12/2 = 480$ cm².
45. $A = 3\sqrt{3}\ell^2/2 = 150\sqrt{3}$ m².
46. A diagonal é 10; logo $s = 10/\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ cm.
47. $a = s/2$.
48. Dois lados são raios e a corda mede o raio; logo os três lados são iguais.
49. Os novos ângulos centrais são todos iguais a $180^\circ/n$ e as cordas correspondentes são congruentes.
50. Erguer perpendiculares em A, B ; transportar AB ; unir os novos pontos; concluir quatro lados iguais e quatro ângulos retos.
51. Traçar círculo; transportar o raio seis vezes sobre a circunferência; unir pontos consecutivos.
52. Arrastar A e B ; verificar perpendicularidade, quatro lados iguais, diagonais iguais e interseção nos pontos médios.
53. $E = C = 24^\circ$ e $I = 156^\circ$.
54. $n(n - 3)/2 = 27 \Rightarrow n = 9$.
55. $A = 3\sqrt{3}(12)^2/2 = 216\sqrt{3}$ cm².
56. Circunferências (A, AB) e (B, AB) ; a interseção C satisfaz $AC = BC = AB$.
57. Construir o quadrado inscrito e bissecar os quatro ângulos centrais; as oito cordas ficam iguais.
58. O desenho depende de medidas aproximadas; a construção decorre de operações geométricas e propriedades demonstradas.
59. Exigir $kI = 360^\circ$ leva a $1/n + 1/k = 1/2$; as soluções com $n, k \geq 3$ são $(3, 6), (4, 4), (6, 3)$.
60. $s = 14$ cm, $P = 56$ cm e $a = 7$ cm.
61. $E = 15^\circ$, logo $n = 24$; menor rotação 15° .

62. Entrada: círculo de centro O e raio R . Marcar A ; com abertura R , transportar seis cordas; unir pontos consecutivos. Saída: hexágono regular. Justificativa: seis triângulos equiláteros produzem ângulos centrais de 60° e cordas iguais.

14 Síntese final

Síntese

Para um polígono regular de n lados:

$$S = (n - 2)180^\circ, \quad I = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}, \quad E = C = \frac{360^\circ}{n},$$

$$D = \frac{n(n - 3)}{2}, \quad P = n\ell, \quad A = \frac{Pa}{2}.$$

Construir significa executar operações exatas e justificar por que o resultado possui lados e ângulos congruentes. Mediatrizes, bissetrizes, transporte de comprimentos e divisão de ângulos centrais formam o núcleo dos algoritmos estudados.