

Arcos e Ângulos na Circunferência

Curso completo de Matemática — 9º ano do Ensino Fundamental

Alinhado à habilidade EF09MA11 da BNCC

Sumário

1	Apresentação e objetivos de aprendizagem	1
2	Circunferência, círculo e elementos	1
3	Arcos e suas medidas	2
4	Ângulo central	3
5	Ângulo inscrito	3
6	Consequências do teorema do ângulo inscrito	5
7	Cordas, arcos e ângulos centrais	5
8	Quadriláteros inscritos	6
9	Extensão: tangentes, cordas e secantes	6
10	Problemas algébricos	7
11	Aplicações e tecnologia	7
11.1	Relógios e rodas	7
11.2	Arcos em projetos	7
12	Erros frequentes e estratégia	8
13	Exercícios de consolidação	9
13.1	Bloco A — Conceitos	9
13.2	Bloco B — Cálculo direto	9
13.3	Bloco C — Álgebra e aplicações	10
13.4	Bloco D — Análise e demonstração	10
14	Questões de aprofundamento	10

15 Avaliação-síntese	11
16 Gabarito comentado	12
16.1 Bloco A	12
16.2 Bloco B	12
16.3 Bloco C	13
16.4 Bloco D	13
16.5 Questões de aprofundamento	14
16.6 Avaliação-síntese	14
17 Resumo final	15

1 Apresentação e objetivos de aprendizagem

Ângulos e arcos transformam a circunferência em uma poderosa estrutura de medição. A posição do vértice determina a regra: no centro, a medida angular é igual à do arco; sobre a circunferência, ela é a metade. Com essas ideias, podemos demonstrar propriedades, resolver problemas e analisar construções.

Ao concluir este curso, espera-se que o estudante seja capaz de:

- diferenciar circunferência e círculo;
- reconhecer centro, raio, diâmetro, corda, arco, secante e tangente;
- distinguir arco menor, arco maior e semicircunferência;
- relacionar ângulo central e arco correspondente;
- demonstrar e aplicar o teorema do ângulo inscrito;
- reconhecer ângulos inscritos que subtendem o mesmo arco;
- demonstrar o Teorema de Tales na circunferência;
- analisar quadriláteros inscritos;
- resolver equações envolvendo arcos e ângulos;
- utilizar construções e geometria dinâmica;
- conhecer, como extensão, ângulos de cordas, secantes e tangentes.

Correspondência com a BNCC

Este curso desenvolve a habilidade **EF09MA11**: resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, inclusive com apoio de softwares de geometria.

2 Circunferência, círculo e elementos

Definição 2.1: Circunferência

Dado um ponto O e um número $r > 0$, a circunferência de centro O e raio r é o conjunto dos pontos do plano cuja distância a O é exatamente r .

Definição 2.2: Círculo

O círculo de centro O e raio r é a região formada pelos pontos cuja distância a O é menor ou igual a r . A circunferência é sua fronteira.

Definição 2.3: Raio, corda e diâmetro

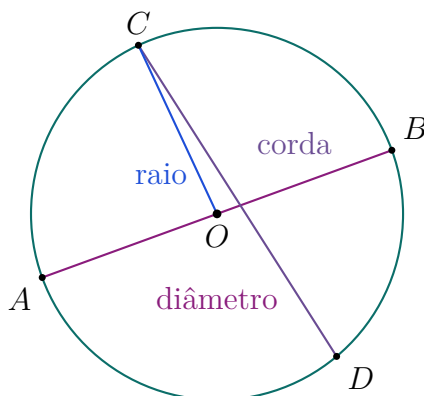
Um raio liga o centro a um ponto da circunferência. Uma corda liga dois pontos da circunferência. Um diâmetro é uma corda que passa pelo centro.

Teorema 2.1: Relação entre raio e diâmetro

Se r é o raio e d é o diâmetro, então

$$d = 2r.$$

Todo diâmetro é corda, mas nem toda corda é diâmetro.



Definição 2.4: Secante e tangente

Uma reta secante intersecta a circunferência em dois pontos. Uma reta tangente possui exatamente um ponto comum, chamado ponto de tangência.

Teorema 2.2: Raio e tangente

O raio traçado até o ponto de tangência é perpendicular à reta tangente.

3 Arcos e suas medidas

Definição 3.1: Arco

Dois pontos A e B dividem uma circunferência em duas partes chamadas arcos. O arco menor é indicado por $\widehat{AB}$; para indicar o arco maior, usa-se um terceiro ponto, como $\widehat{ACB}$.

Definição 3.2: Semicircunferência

Se A e B são extremidades de um diâmetro, cada arco de A a B é uma semicircunferência e mede 180° .

Axioma 3.1: Medida total da circunferência

A circunferência completa mede 360° . Arcos que a particionam possuem medidas cuja soma é 360° .

Exemplo

Se o arco menor $\widehat{AB}$ mede 140° , o arco maior de A a B mede

$$360^\circ - 140^\circ = 220^\circ.$$

Medida angular e comprimento

Um arco pode ter medida 90° , mas seu comprimento depende do raio. A medida angular informa uma fração da volta; o comprimento é uma grandeza linear.

4 Ângulo central

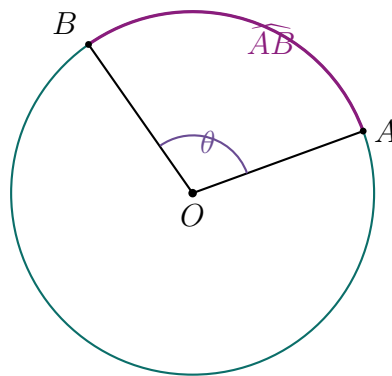
Definição 4.1: Ângulo central

É o ângulo cujo vértice é o centro da circunferência e cujos lados contêm dois raios.

Teorema 4.1: Ângulo central e arco

A medida de um ângulo central é igual à medida do arco menor determinado por seus lados:

$$m(\angle AOB) = m(\widehat{AB}).$$



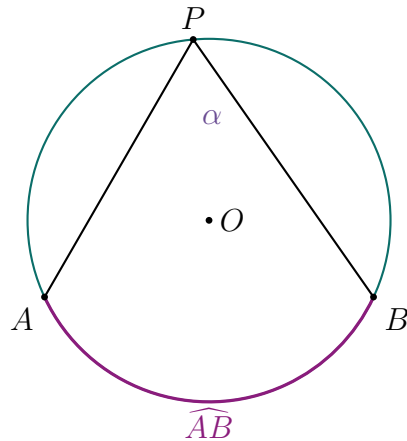
Exemplo

Se $m(\angle AOB) = 82^\circ$, então $m(\widehat{AB}) = 82^\circ$. Reciprocamente, um arco de 147° determina um ângulo central de 147° .

5 Ângulo inscrito

Definição 5.1: Ângulo inscrito

É o ângulo cujo vértice pertence à circunferência e cujos lados contêm cordas. O arco entre as extremidades das cordas, sem conter o vértice, é o arco interceptado.



Teorema 5.1: Teorema do ângulo inscrito

A medida de um ângulo inscrito é a metade da medida de seu arco interceptado:

$$m(\angle APB) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB}).$$

Consequentemente, o ângulo central que intercepta o mesmo arco mede o dobro do ângulo inscrito.

Caso fundamental

Considere inicialmente uma das cordas passando pelo centro, e denote por α o ângulo inscrito. O triângulo formado por dois raios é isósceles; seus ângulos da base medem α . O ângulo externo no centro, que corresponde ao arco interceptado, mede a soma dos dois ângulos internos não adjacentes:

$$m(\widehat{AB}) = 2\alpha.$$

Logo, $\alpha = \frac{1}{2} m(\widehat{AB})$. Nos demais casos, traça-se o diâmetro pelo vértice e decompõe-se o ângulo em soma ou diferença de dois casos fundamentais.

Exemplo

Se o arco interceptado mede 120° , o ângulo inscrito mede

$$\frac{120^\circ}{2} = 60^\circ.$$

Se o ângulo inscrito mede 38° , o arco mede 76° .

Fator correto

Ângulo central e arco têm a mesma medida. Ângulo inscrito mede a metade do arco. Confundir essas duas posições do vértice é o erro mais frequente.

6 Consequências do teorema do ângulo inscrito

Teorema 6.1: Ângulos inscritos no mesmo arco

Ângulos inscritos que interceptam o mesmo arco são congruentes.

Demonstração

Cada ângulo mede a metade da medida do mesmo arco. Portanto, suas medidas são iguais.

Teorema 6.2: Teorema de Tales na circunferência

Todo ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto.

Demonstração

Uma semicircunferência mede 180° . O ângulo inscrito que a intercepta mede

$$\frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

Recíproca

Se um triângulo retângulo está inscrito em uma circunferência, sua hipotenusa é um diâmetro. O ângulo reto intercepta um arco de 180° .

7 Cordas, arcos e ângulos centrais

Teorema 7.1: Cordas congruentes e arcos congruentes

Na mesma circunferência, cordas congruentes determinam arcos menores congruentes; reciprocamente, arcos congruentes determinam cordas congruentes.

Demonstração

Ligando as extremidades das cordas ao centro, formam-se dois triângulos com dois pares de raios congruentes. Se as cordas são congruentes, os triângulos são congruentes pelo caso LLL; os ângulos centrais e, portanto, os arcos são congruentes. A recíproca segue pelo caso LAL.

Teorema 7.2: Diâmetro perpendicular a uma corda

Se um diâmetro é perpendicular a uma corda, ele divide a corda e os arcos correspondentes em duas partes congruentes.

8 Quadriláteros inscritos

Definição 8.1: Quadrilátero cíclico

É um quadrilátero cujos quatro vértices pertencem à mesma circunferência.

Teorema 8.1: Ângulos opostos de um quadrilátero cíclico

Os ângulos opostos de um quadrilátero cíclico são suplementares.

Demonstração

Um par de ângulos opostos intercepta dois arcos que, juntos, formam a circunferência completa. Se os arcos medem u e $360^\circ - u$, então os ângulos medem $u/2$ e $(360^\circ - u)/2$. A soma é 180° .

Exemplo

Se um ângulo de um quadrilátero cíclico mede 112° , seu oposto mede 68° .

9 Extensão: tangentes, cordas e secantes

Teorema 9.1: Ângulo entre tangente e corda

A medida do ângulo formado por uma tangente e uma corda com vértice no ponto de tangência é metade da medida do arco interceptado.

Teorema 9.2: Duas cordas que se intersectam internamente

Se duas cordas se intersectam no interior da circunferência, a medida de um dos ângulos formados é a metade da soma dos arcos interceptados por ele e por seu oposto pelo vértice:

$$m(\theta) = \frac{m(\widehat{AB}) + m(\widehat{CD})}{2}.$$

Teorema 9.3: Secantes com vértice exterior

Se duas secantes se encontram fora da circunferência, a medida do ângulo externo é metade da diferença entre o arco maior e o arco menor:

$$m(\theta) = \frac{m(\text{arco maior}) - m(\text{arco menor})}{2}.$$

Núcleo e extensão

Ângulos centrais e inscritos formam o núcleo da EF09MA11. As relações com tangentes e secantes ampliam o repertório e devem ser aplicadas somente após identificar a posição do vértice.

10 Problemas algébricos

Ângulo central

Se um ângulo central mede $3x + 10$ e seu arco mede $5x - 30$, então

$$3x + 10 = 5x - 30,$$

logo $x = 20$ e ambas as medidas são 70° .

Ângulo inscrito

Se um ângulo inscrito mede $2x + 15$ e o arco interceptado mede $6x + 10$, então

$$2x + 15 = \frac{6x + 10}{2} = 3x + 5.$$

Logo, $x = 10$, o ângulo mede 35° e o arco mede 70° .

Roteiro

1. Localize o vértice: centro, circunferência, interior ou exterior.
2. Identifique exatamente o arco interceptado.
3. Escolha a relação apropriada.
4. Monte e resolva a equação.
5. Confira se arcos estão entre 0° e 360° e se a soma é coerente.

11 Aplicações e tecnologia

11.1 Relógios e rodas

Doze marcas igualmente espaçadas em um relógio determinam ângulos centrais de $360^\circ/12 = 30^\circ$. Em uma roda-gigante com n cabines igualmente espaçadas, o ângulo central entre cabines vizinhas é $360^\circ/n$.

11.2 Arcos em projetos

Arcos aparecem em janelas, pontes, pistas e peças mecânicas. A medida angular indica a fração da circunferência ocupada. Um arco de 90° corresponde a um quarto da volta completa.

Geometria dinâmica

Construa uma circunferência, uma corda AB e um ponto móvel P no mesmo arco oposto a AB . Meça $\angle APB$ e mova P . Observe a invariância. Depois mova A ou B e compare o ângulo inscrito ao central $\angle AOB$.

12 Erros frequentes e estratégia

Erros frequentes

- Confundir círculo com circunferência.
- Chamar qualquer corda de diâmetro.
- Usar a metade do arco para um ângulo central.
- Igualar um ângulo inscrito ao arco em vez de tomar a metade.
- Escolher o arco que contém o vértice do ângulo inscrito.
- Confundir arco maior e menor.
- Aplicar fórmula de vértice interior a um vértice exterior.
- Aceitar medidas negativas ou superiores aos limites geométricos.

Decisão pela posição do vértice

Vértice	Tipo	Regra
centro	central	igual ao arco
circunferência	inscrito	metade do arco
ponto de tangência	tangente-corda	metade do arco
interior	duas cordas	metade da soma
exterior	duas secantes	metade da diferença

13 Exercícios de consolidação

13.1 Bloco A — Conceitos

- A1. Diferencie circunferência e círculo.
- A2. Defina raio, corda e diâmetro.
- A3. Se o raio mede 6 cm, determine o diâmetro.
- A4. Diferencie arco menor e arco maior.
- A5. Onde está o vértice de um ângulo central?
- A6. Onde está o vértice de um ângulo inscrito?
- A7. Qual é a relação entre ângulo central e arco?
- A8. Qual é a relação entre ângulo inscrito e arco?
- A9. O que ocorre quando o arco interceptado é uma semicircunferência?
- A10. Compare dois ângulos inscritos que interceptam o mesmo arco.
- A11. Defina quadrilátero cíclico.
- A12. Julgue: toda corda é um diâmetro.

13.2 Bloco B — Cálculo direto

- B1. Um ângulo central mede 80° . Determine seu arco.
- B2. Um arco mede 134° . Determine o ângulo central.
- B3. Um ângulo inscrito intercepta arco de 120° . Determine-o.
- B4. Um ângulo inscrito mede 45° . Determine o arco.
- B5. Um ângulo inscrito intercepta um diâmetro. Determine sua medida.
- B6. Dois ângulos inscritos interceptam o mesmo arco; um mede 37° . Determine o outro.
- B7. Em quadrilátero cíclico, um ângulo mede 112° . Determine o oposto.
- B8. Um arco menor mede 150° . Determine o arco maior correspondente.
- B9. Três arcos consecutivos medem 90° , 110° e x . Determine x .
- B10. Um ângulo central mede 72° . Determine o inscrito no mesmo arco.
- B11. Uma tangente e uma corda interceptam arco de 100° . Determine o ângulo.
- B12. Duas cordas internas interceptam arcos de 120° e 60° . Determine o ângulo.

13.3 Bloco C — Álgebra e aplicações

- C1. Um ângulo central mede $3x + 10$ e seu arco, $5x - 30$. Determine x .
- C2. Um inscrito mede $2x + 15$ e seu arco, $6x + 10$. Determine x , ângulo e arco.
- C3. Ângulos opostos de um quadrilátero cíclico medem $3x + 10$ e $5x + 10$. Determine-os.
- C4. Dois inscritos no mesmo arco medem $4x - 5$ e $2x + 35$. Determine x .
- C5. Em triângulo inscrito em semicircunferência, os ângulos agudos medem $x + 10$ e $2x + 20$. Determine-os.
- C6. Os arcos menor e maior entre dois pontos estão na razão $2 : 3$. Determine-os.
- C7. Determine o ângulo central entre marcas consecutivas de um relógio.
- C8. Uma roda-gigante tem 12 cabines igualmente espaçadas. Determine o ângulo central entre vizinhas.
- C9. Que fração da circunferência corresponde a um arco de 90° ?
- C10. Em quadrilátero cíclico, um ângulo exterior adjacente a um interno mede 74° . Determine o interno e seu oposto.
- C11. Tangente e corda formam ângulo $3x + 5$ e interceptam arco $8x - 10$. Determine x .
- C12. Elabore um problema com ângulo inscrito e resolva-o.

13.4 Bloco D — Análise e demonstração

- D1. Corrija: “ângulo inscrito e arco têm medidas iguais”.
- D2. Explique por que o arco interceptado não contém o vértice inscrito.
- D3. Demonstre que inscritos no mesmo arco são congruentes.
- D4. Demonstre o Teorema de Tales na circunferência.
- D5. Demonstre que opostos de quadrilátero cíclico são suplementares.
- D6. Explique por que medir uma figura não substitui demonstração.
- D7. Dê um contraexemplo à afirmação “toda corda passa pelo centro”.
- D8. Escreva um algoritmo para escolher a fórmula angular correta.

14 Questões de aprofundamento

- P1. Demonstre a relação entre ângulo central e arco como definição coerente de medida angular.
- P2. Demonstre o teorema do ângulo inscrito no caso em que um lado contém um diâmetro.

- P3.** Demonstre o teorema dos inscritos no mesmo arco.
- P4.** Demonstre a recíproca do Teorema de Tales na circunferência.
- P5.** Demonstre o teorema dos ângulos opostos de um quadrilátero cíclico.
- P6.** Duas cordas internas interceptam arcos a e b . Explique por que o ângulo é $(a + b)/2$.

15 Avaliação-síntese

- S1.** Defina ângulo central e ângulo inscrito.
- S2.** Uma circunferência tem raio 7 cm. Determine o diâmetro.
- S3.** Um central mede 125° . Determine o arco.
- S4.** Um inscrito intercepta arco de 196° . Determine o ângulo.
- S5.** Um inscrito mede 38° . Determine o arco.
- S6.** Inscritos no mesmo arco medem $3x + 5$ e $5x - 35$. Determine x e a medida.
- S7.** Opostos de quadrilátero cíclico medem $4x + 8$ e $2x + 40$. Determine-os.
- S8.** Em triângulo inscrito em semicircunferência, os agudos medem x e $2x$. Determine-os.
- S9.** O arco maior entre dois pontos mede 280° . Determine o menor.
- S10.** Tangente e corda interceptam arco de 126° . Determine o ângulo.
- S11.** Duas cordas internas interceptam arcos de 90° e 130° . Determine o ângulo.
- S12.** Uma roda tem 15 pontos igualmente espaçados. Determine o ângulo central entre vizinhos.

16 Gabarito comentado

16.1 Bloco A

- A1.** A circunferência é a linha de pontos à mesma distância do centro; o círculo inclui a região interior.
- A2.** Raio liga centro e circunferência; corda liga dois pontos da circunferência; diâmetro é corda que passa pelo centro.
- A3.** $d = 2r = 12$ cm.
- A4.** O menor arco tem medida inferior ou igual a 180° ; o maior percorre a parte complementar e é indicado com três letras.
- A5.** No centro da circunferência.
- A6.** Sobre a circunferência.
- A7.** Possuem a mesma medida.
- A8.** O inscrito mede metade do arco interceptado.
- A9.** O ângulo inscrito mede 90° .
- A10.** São congruentes, pois ambos medem metade do mesmo arco.
- A11.** Quadrilátero com quatro vértices na mesma circunferência.
- A12.** Falsa. Todo diâmetro é corda, mas uma corda fora do centro não é diâmetro.

16.2 Bloco B

- B1.** 80° .
- B2.** 134° .
- B3.** $120^\circ/2 = 60^\circ$.
- B4.** $2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$.
- B5.** 90° .
- B6.** 37° .
- B7.** $180^\circ - 112^\circ = 68^\circ$.
- B8.** $360^\circ - 150^\circ = 210^\circ$.
- B9.** $x = 360^\circ - 90^\circ - 110^\circ = 160^\circ$.
- B10.** $72^\circ/2 = 36^\circ$.
- B11.** $100^\circ/2 = 50^\circ$.
- B12.** $(120^\circ + 60^\circ)/2 = 90^\circ$.

16.3 Bloco C

C1. $3x + 10 = 5x - 30$, logo $x = 20$ e a medida é 70° .

C2. $2x + 15 = (6x + 10)/2$, logo $x = 10$; ângulo 35° e arco 70° .

C3.

$$3x + 10 + 5x + 10 = 180 \Rightarrow x = 20.$$

Os ângulos medem 70° e 110° .

C4. $4x - 5 = 2x + 35$, então $x = 20$ e ambos medem 75° .

C5. Como o terceiro ângulo é reto,

$$x + 10 + 2x + 20 = 90 \Rightarrow x = 20.$$

Os agudos medem 30° e 60° .

C6. Se os arcos são $2k$ e $3k$, então $5k = 360^\circ$, $k = 72^\circ$. Medem 144° e 216° .

C7. $360^\circ/12 = 30^\circ$.

C8. $360^\circ/12 = 30^\circ$.

C9. $90/360 = 1/4$.

C10. O interno adjacente mede $180^\circ - 74^\circ = 106^\circ$; seu oposto no quadrilátero mede 74° .

C11.

$$3x + 5 = \frac{8x - 10}{2} = 4x - 5,$$

então $x = 10$ e o ângulo mede 35° .

C12. Resposta pessoal. Exemplo: um arco mede 150° ; o inscrito correspondente mede 75° .

16.4 Bloco D

D1. Correção: o ângulo inscrito mede metade do arco interceptado.

D2. Seus lados encontram a circunferência em dois pontos; o arco interceptado é o arco entre esses pontos situado diante do ângulo, sem passar pelo vértice.

D3. Cada um mede metade do mesmo arco; logo, são congruentes.

D4. O arco de uma semicircunferência mede 180° ; sua metade é 90° .

D5. Os arcos interceptados por ângulos opostos completam 360° ; as metades somam 180° .

D6. Medições são aproximadas e verificam casos particulares; demonstrações garantem todos os casos sob as hipóteses.

D7. Escolha dois pontos da circunferência cuja corda não atravesse o centro; ela é corda, mas não diâmetro.

D8. Localize o vértice; identifique os arcos; escolha igualdade, metade, metade da soma ou metade da diferença; calcule e confira limites.

16.5 Questões de aprofundamento

- P1.** A medida do arco é definida pela rotação do raio que vai de uma extremidade à outra; essa rotação é exatamente o ângulo central, garantindo igualdade de medidas.
- P2.** Com um lado passando pelo centro, dois raios formam triângulo isósceles. O ângulo externo central é soma dos dois ângulos iguais da base, logo mede o dobro do inscrito.
- P3.** Ambos medem metade da mesma medida de arco e, portanto, são congruentes.
- P4.** Um ângulo reto intercepta arco de $2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$; suas extremidades determinam um diâmetro.
- P5.** Se os arcos opostos medem u e $360^\circ - u$, os ângulos medem $u/2$ e $(360^\circ - u)/2$, cuja soma é 180° .
- P6.** Cada ângulo interno pode ser decomposto em ângulos inscritos auxiliares. As metades dos arcos correspondentes se somam, produzindo $(a + b)/2$.

16.6 Avaliação-síntese

- S1.** Central tem vértice no centro; inscrito tem vértice na circunferência e lados contidos em cordas.
- S2.** $d = 2 \cdot 7 = 14$ cm.
- S3.** 125° .
- S4.** $196^\circ/2 = 98^\circ$.
- S5.** $2 \cdot 38^\circ = 76^\circ$.
- S6.** $3x + 5 = 5x - 35$, logo $x = 20$ e ambos medem 65° .
- S7.**
$$4x + 8 + 2x + 40 = 180 \Rightarrow x = 22.$$

Os ângulos medem 96° e 84° .
- S8.** $x + 2x = 90^\circ$, então $x = 30^\circ$; os agudos medem 30° e 60° .
- S9.** $360^\circ - 280^\circ = 80^\circ$.
- S10.** $126^\circ/2 = 63^\circ$.
- S11.** $(90^\circ + 130^\circ)/2 = 110^\circ$.
- S12.** $360^\circ/15 = 24^\circ$.

17 Resumo final

Mapa de relações essenciais

$$\begin{aligned}d &= 2r, \\m(\angle AOB) &= m(\widehat{AB}), \\m(\angle APB) &= \frac{1}{2}m(\widehat{AB}), \\ \text{ângulo em semicircunferência} &= 90^\circ, \\ \text{opostos em quadrilátero cíclico somam} &= 180^\circ, \\m(\text{cordas internas}) &= \frac{\text{soma dos arcos}}{2}, \\m(\text{secantes externas}) &= \frac{\text{diferença dos arcos}}{2}.\end{aligned}$$

- A posição do vértice determina a relação angular.
- Ângulo central e arco possuem a mesma medida.
- Ângulo inscrito mede metade do arco interceptado.
- Inscritos no mesmo arco são congruentes.
- Diâmetros determinam ângulos inscritos retos.
- Opostos de quadriláteros cíclicos são suplementares.
- Toda resposta deve ser conferida com a volta completa de 360° .

Referência normativa

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Matemática, 9º ano, habilidade EF09MA11. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.

Fim do curso — Arcos e Ângulos na Circunferência