

Razões entre Grandezas de Espécies Diferentes

Curso completo de Matemática — 9º ano do Ensino Fundamental

Alinhado à habilidade EF09MA07 da BNCC

Sumário

1	Apresentação e objetivos de aprendizagem	1
2	Grandeza, medida e unidade	1
3	Razão e taxa	2
3.1	Razão entre grandezas	2
3.2	Taxa unitária	3
3.3	Leitura da unidade	4
4	Análise de unidades e conversões	4
4.1	Fatores de conversão	4
4.2	Áreas e volumes	5
5	Velocidade média	6
5.1	Trechos com velocidades diferentes	6
5.2	Gráfico distância-tempo	7
6	Densidade demográfica	8
6.1	Comparações válidas	9
7	Densidade de materiais	9
8	Preço unitário e custo por unidade	10
9	Consumo e eficiência	11
9.1	Quilômetros por litro	11
9.2	Litros por cem quilômetros	11
10	Vazão, produtividade e taxa de dados	12
10.1	Vazão	12
10.2	Produtividade	12
10.3	Taxa de dados	13

11 Taxa constante e proporcionalidade direta	13
12 Combinação de taxas	14
13 Razões recíprocas e interpretação	15
14 Tecnologia, planilhas e validação	16
14.1 Tabela de taxas em planilha	16
15 Erros frequentes e estratégias de resolução	17
16 Exercícios de consolidação	18
16.1 Bloco A — Conceitos e unidades	18
16.2 Bloco B — Cálculos e conversões	19
16.3 Bloco C — Problemas aplicados	19
16.4 Bloco D — Análise crítica e elaboração	20
17 Questões de aprofundamento	21
18 Avaliação-síntese	21
19 Gabarito comentado	22
19.1 Bloco A	22
19.2 Bloco B	22
19.3 Bloco C	23
19.4 Bloco D	25
19.5 Questões de aprofundamento	25
19.6 Avaliação-síntese	26
20 Resumo final	27

1 Apresentação e objetivos de aprendizagem

Razões permitem comparar grandezas. Quando as grandezas são de espécies diferentes, o quociente produz uma nova grandeza: quilômetros por hora, habitantes por quilômetro quadrado, reais por quilograma, litros por minuto e megabytes por segundo são exemplos. A unidade resultante não é um detalhe; ela explica o significado da comparação.

Ao concluir este curso, espera-se que o estudante seja capaz de:

- distinguir grandeza, medida, unidade e espécie de grandeza;
- interpretar uma razão entre grandezas de mesma ou de diferentes espécies;
- calcular e explicar taxas unitárias;
- operar corretamente com unidades compostas;
- converter unidades por fatores de conversão;
- calcular velocidade média e evitar médias indevidas;
- interpretar densidade demográfica e densidade de materiais;
- comparar preços unitários, consumos e eficiências;
- resolver problemas de vazão, produtividade e taxa de dados;
- reconhecer proporcionalidade direta associada a uma taxa constante;
- combinar taxas parciais usando os totais correspondentes;
- utilizar calculadora e planilha para organizar dados e validar resultados;
- comunicar respostas com unidades, contexto e precisão adequados.

Correspondência com a BNCC

Este curso desenvolve principalmente a habilidade **EF09MA07**: resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.

2 Grandeza, medida e unidade

Definição 2.1: Grandeza

Uma *grandeza* é uma propriedade que pode ser medida ou contada. Distância, tempo, massa, área, volume, população, custo e quantidade de dados são exemplos.

Definição 2.2: Medida de uma grandeza

Medir uma grandeza é compará-la com uma unidade escolhida. O resultado completo de uma medição possui um valor numérico e uma unidade:

$$\text{medida} = \text{valor numérico} \times \text{unidade}.$$

Por exemplo, 12 km não significa apenas o número 12: indica doze vezes a unidade

quilômetro.

Definição 2.3: Espécie de grandeza

Duas grandezas são da mesma espécie quando medem o mesmo tipo de atributo e podem ser expressas, após conversão, em uma unidade comum. Comprimento em metros e comprimento em quilômetros são da mesma espécie. Distância e tempo são de espécies diferentes.

Exemplo

- 3 m e 250 cm são comprimentos: mesma espécie.
- 40 km e 2 h representam distância e tempo: espécies diferentes.
- 600 habitantes e 5 km² representam população e área: espécies diferentes.

Unidades diferentes não significam espécies diferentes

Metro e centímetro são unidades diferentes da mesma espécie de grandeza. Antes de calcular uma razão entre grandezas da mesma espécie, é necessário escrevê-las em unidades compatíveis.

3 Razão e taxa

3.1 Razão entre grandezas

Definição 3.1: Razão

Dados dois valores a e b , com $b \neq 0$, a razão de a para b é o quociente

$$\frac{a}{b}.$$

A ordem importa: em geral, $a/b \neq b/a$.

Grandezas da mesma espécie

Uma fita mede 1,5 m e outra mede 75 cm. Convertendo 1,5 m para 150 cm,

$$\frac{150 \text{ cm}}{75 \text{ cm}} = 2.$$

As unidades se cancelam, e a razão é adimensional: a primeira fita mede o dobro da segunda.

Definição 3.2: Taxa

Uma *taxa* é uma razão entre grandezas, frequentemente de espécies diferentes. Sua unidade é formada pelo quociente das unidades envolvidas.

Grandezas de espécies diferentes

Um veículo percorre 180 km em 3 h. A razão distância por tempo é

$$\frac{180 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 60 \text{ km/h.}$$

O resultado significa, nesse intervalo, uma média de 60 quilômetros para cada hora.

3.2 Taxa unitária

Definição 3.3: Taxa unitária

Uma taxa é *unitária* quando o segundo termo da comparação é uma unidade. Calcular a taxa unitária significa dividir os dois valores pelo valor da segunda grandeza.

Exemplo

Se 1,5 kg de um produto custam R\$ 42,00, então o preço por quilograma é

$$\frac{R\$ 42,00}{1,5 \text{ kg}} = R\$ 28,00/\text{kg.}$$

Esse quociente responde: “quanto custa um quilograma?”

Teorema 3.1: Reconstrução pela taxa

Se $r = a/b$, com $b \neq 0$, então

$$a = rb.$$

Conhecendo uma taxa constante e o valor da grandeza de referência, recupera-se a outra grandeza por multiplicação.

Demonstração

Da igualdade $r = a/b$, multiplicamos ambos os membros por b :

$$rb = \frac{a}{b}b = a.$$

Teorema 3.2: Invariância por escala comum

Para $b \neq 0$ e $k \neq 0$,

$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}.$$

Multiplicar as duas grandezas pelo mesmo fator não altera a razão.

Demonstração

$$\frac{ka}{kb} = \frac{k}{k} \cdot \frac{a}{b} = 1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}.$$

3.3 Leitura da unidade

Barra de divisão

As notações

$$\frac{\text{km}}{\text{h}}, \quad \text{km/h}, \quad \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$$

expressam a mesma unidade: quilômetro por hora.

grandeza do numerador

grandeza do denominador

taxa: “numerador por denominador”

A unidade faz parte da resposta

O número 60 pode representar 60 km/h, 60 habitantes/km² ou R\$ 60/kg. Sem a unidade, não se sabe o que a taxa mede.

4 Análise de unidades e conversões

4.1 Fatores de conversão

Definição 4.1: Fator de conversão

Um fator de conversão é uma razão entre duas medidas equivalentes e, por isso, possui valor 1. Exemplos:

$$\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = 1, \quad \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 1.$$

Multiplicar uma medida por um fator de conversão altera sua unidade, mas não a grandeza representada.

Teorema 4.1: Princípio do cancelamento de unidades

Em uma cadeia de fatores de conversão, unidades iguais no numerador e no denominador podem ser canceladas. As unidades restantes determinam a unidade do resultado.

Demonstração

Cada fator de conversão vale 1, portanto não muda o valor físico representado. Algebricamente, as unidades são tratadas como fatores formais: um fator presente no numerador e no denominador se simplifica.

Conversão de quilômetros por hora para metros por segundo

$$\begin{aligned} 72 \text{ km/h} &= 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \\ &= 20 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Logo, para converter km/h em m/s, multiplica-se por 5/18.

Teorema 4.2: Conversão entre km/h e m/s

$$v_{\text{m/s}} = \frac{5}{18} v_{\text{km/h}}, \quad v_{\text{km/h}} = \frac{18}{5} v_{\text{m/s}}.$$

Demonstração

Como $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$ e $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$,

$$1 \text{ km/h} = \frac{1000}{3600} \text{ m/s} = \frac{5}{18} \text{ m/s}.$$

A conversão inversa usa o fator recíproco 18/5.

4.2 Áreas e volumes

Ao converter unidades elevadas a potências, o fator de conversão também deve ser elevado à mesma potência:

$$\begin{aligned} 1 \text{ km}^2 &= (1000 \text{ m})^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2, \\ 1 \text{ m}^3 &= (100 \text{ cm})^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Erro frequente em áreas e volumes

De $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$ não se conclui que $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ cm}^2$. O correto é $1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$.

Conversão de densidade demográfica

Como $1 \text{ km}^2 = 100 \text{ ha}$,

$$3\,200 \frac{\text{hab}}{\text{km}^2} = 3\,200 \frac{\text{hab}}{100 \text{ ha}} = 32 \frac{\text{hab}}{\text{ha}}.$$

Conversão de densidade de massa

Como $1 \text{ g/cm}^3 = 1000 \text{ kg/m}^3$,

$$2700 \text{ kg/m}^3 = 2,7 \text{ g/cm}^3.$$

5 Velocidade média

Definição 5.1: Velocidade escalar média

Em um percurso, a velocidade escalar média é a razão entre a distância total percorrida e o tempo total decorrido:

$$v_m = \frac{d_{\text{total}}}{t_{\text{total}}}, \quad t_{\text{total}} > 0.$$

Da definição, seguem as relações equivalentes

$$d = v_m t, \quad t = \frac{d}{v_m},$$

quando a taxa média é usada para descrever o intervalo inteiro.

Exemplo

Um ônibus percorre 210 km em 3,5 h. Então

$$v_m = \frac{210}{3,5} = 60 \text{ km/h}.$$

Isso não afirma que a velocidade foi exatamente 60 km/h em cada instante.

Tempo total inclui paradas

Se o problema informa o tempo total da viagem, paradas pertencem ao denominador. Excluir paradas produz outra taxa, geralmente chamada velocidade média em movimento.

5.1 Trechos com velocidades diferentes

Teorema 5.1: Velocidade média em vários trechos

Para trechos com distâncias $d_1, \dots, d_n$ e tempos $t_1, \dots, t_n$, com soma dos tempos positiva,

$$v_m = \frac{d_1 + \dots + d_n}{t_1 + \dots + t_n}.$$

Se $v_i = d_i/t_i$, então

$$v_m = \frac{v_1 t_1 + \dots + v_n t_n}{t_1 + \dots + t_n}.$$

Demonstração

Pela definição, divide-se a distância total pelo tempo total. Como $d_i = v_i t_i$, substituindo cada distância na soma obtém-se a segunda fórmula.

A média simples pode falhar

Um veículo percorre 120 km a 60 km/h e depois 60 km a 40 km/h. Os tempos são

$$t_1 = \frac{120}{60} = 2 \text{ h}, \quad t_2 = \frac{60}{40} = 1,5 \text{ h}.$$

Portanto,

$$v_m = \frac{120 + 60}{2 + 1,5} = \frac{180}{3,5} \approx 51,43 \text{ km/h}.$$

A média aritmética $(60 + 40)/2 = 50 \text{ km/h}$ não é a velocidade média da viagem.

Teorema 5.2: Tempos iguais

Se dois trechos duram o mesmo tempo e possuem velocidades v_1 e v_2 , então

$$v_m = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Demonstração

Se cada trecho dura t , a distância total é $v_1 t + v_2 t$. Logo,

$$v_m = \frac{v_1 t + v_2 t}{2t} = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Teorema 5.3: Distâncias iguais

Se dois trechos têm a mesma distância e velocidades positivas v_1 e v_2 , então

$$v_m = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}.$$

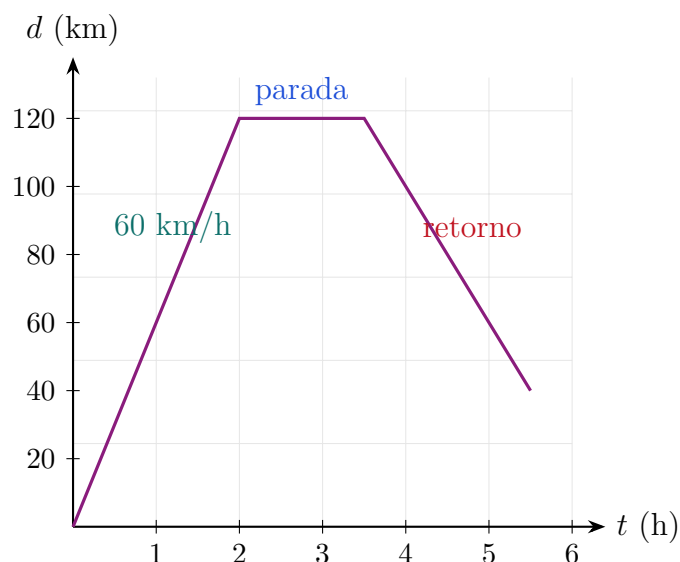
Demonstração

Se cada distância vale d , o tempo total é $d/v_1 + d/v_2$. Assim,

$$v_m = \frac{2d}{\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}.$$

5.2 Gráfico distância-tempo

Quando o movimento ocorre a uma taxa constante, $d(t) = vt$. A inclinação do gráfico representa a velocidade.



Observação

Em um gráfico de distância à origem, um trecho horizontal indica repouso e um trecho descendente pode indicar retorno. Já em um gráfico de distância total percorrida, o valor não diminui.

6 Densidade demográfica

Definição 6.1: Densidade demográfica

A densidade demográfica média de uma região é a razão entre sua população P e sua área territorial A :

$$D = \frac{P}{A}.$$

Uma unidade frequente é habitantes por quilômetro quadrado, hab/km².

As fórmulas equivalentes são

$$P = DA, \quad A = \frac{P}{D},$$

quando as grandezas envolvidas são positivas.

Exemplo

Uma região possui 840 000 habitantes e área de 1 200 km². Sua densidade demográfica média é

$$D = \frac{840\,000}{1\,200} = 700 \text{ hab/km}^2.$$

Densidade média não descreve a distribuição interna

O resultado 700 hab/km² não significa que cada quilômetro quadrado contém exatamente 700 habitantes. A população pode estar concentrada em alguns bairros e ser escassa em outros.

6.1 Comparações válidas

Para comparar regiões, as densidades devem estar na mesma unidade e referir-se a dados compatíveis: mesmo período, mesma definição de população e mesma delimitação territorial.

Exemplo

A região A possui 300 000 habitantes em 500 km²; a região B possui 900 000 habitantes em 2 000 km²:

$$D_A = 600 \text{ hab/km}^2, \quad D_B = 450 \text{ hab/km}^2.$$

Embora B tenha população maior, A é mais densamente povoada.

Teorema 6.1: Densidade conjunta de regiões

Se regiões não sobrepostas possuem populações P_i e áreas positivas A_i , a densidade do conjunto é

$$D = \frac{\sum P_i}{\sum A_i} = \frac{\sum D_i A_i}{\sum A_i}.$$

Portanto, ela é uma média das densidades ponderada pelas áreas.

Demonstração

Como $P_i = D_i A_i$, a população total é $\sum D_i A_i$. Dividindo pela área total $\sum A_i$, obtém-se a fórmula.

7 Densidade de materiais

Definição 7.1: Densidade de massa

A densidade de massa ρ de um material homogêneo é a razão entre a massa m e o volume V :

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad V > 0.$$

Unidades frequentes são kg/m³ e g/cm³.

As relações equivalentes são

$$m = \rho V, \quad V = \frac{m}{\rho}.$$

Exemplo

Uma peça homogênea possui massa de 540 g e volume de 200 cm³. Logo,

$$\rho = \frac{540}{200} = 2,7 \text{ g/cm}^3.$$

Isso significa 2,7 gramas de massa para cada centímetro cúbico de volume.

Teorema 7.1: Massa proporcional ao volume

Para objetos do mesmo material homogêneo, sob as mesmas condições, a densidade ρ é constante e

$$m(V) = \rho V.$$

Assim, massa e volume são diretamente proporcionais.

Demonstração

Da definição $\rho = m/V$, multiplicando por V , obtemos $m = \rho V$. Se ρ é constante, a razão m/V permanece a mesma.

Observação

Densidade não é sinônimo de massa. Um objeto grande de material pouco denso pode ter massa maior que um objeto pequeno de material muito denso.

8 Preço unitário e custo por unidade

Definição 8.1: Preço unitário

Se uma quantidade $q > 0$ custa C , o preço unitário é

$$p = \frac{C}{q}.$$

Sua unidade pode ser R\$/kg, R\$/L, R\$/unidade ou outra adequada ao produto.

Quando o preço unitário é constante e não existem taxas fixas,

$$C = pq.$$

Comparação de embalagens

Uma embalagem de 750 g custa R\$ 18,90; outra, de 1,2 kg, custa R\$ 28,80. Em quilogramas:

$$p_1 = \frac{18,90}{0,75} = \text{R\$ } 25,20/\text{kg},$$

$$p_2 = \frac{28,80}{1,2} = \text{R\$ } 24,00/\text{kg}.$$

A segunda tem menor preço por quilograma. Isso não basta, sozinho, para decidir a compra: quantidade necessária, validade e desperdício também importam.

Taxas fixas alteram o custo médio

Se $C(q) = F + pq$, com taxa fixa $F > 0$, então

$$\frac{C(q)}{q} = \frac{F}{q} + p.$$

O custo médio por unidade não é constante: a taxa fixa é distribuída por mais unidades

quando q aumenta.

9 Consumo e eficiência

9.1 Quilômetros por litro

Definição 9.1: Eficiência de combustível

Se um veículo percorre distância d usando volume $L > 0$ de combustível, sua eficiência média é

$$E = \frac{d}{L},$$

frequentemente expressa em km/L. Quanto maior E , maior a distância percorrida por litro.

9.2 Litros por cem quilômetros

Outra medida de consumo é

$$C = \frac{100L}{d},$$

em L/100 km. Nessa medida, valores menores indicam menor consumo.

Teorema 9.1: Relação entre km/L e L/100 km

Se $E > 0$ é a eficiência em km/L e $C > 0$ é o consumo em L/100 km, então

$$C = \frac{100}{E}, \quad E = \frac{100}{C}.$$

Demonstração

Se $E = d/L$, então $L/d = 1/E$. Multiplicando por 100,

$$\frac{100L}{d} = \frac{100}{E}.$$

A segunda fórmula é obtida isolando E .

Exemplo

Um veículo que faz 12,5 km/L consome

$$C = \frac{100}{12,5} = 8 \text{ L/100 km.}$$

Um consumo de 6,25 L/100 km corresponde a

$$E = \frac{100}{6,25} = 16 \text{ km/L.}$$

Sentidos opostos

Em km/L, maior é melhor em termos de eficiência. Em L/100 km, menor é melhor em termos de consumo. Comparar apenas os números sem ler as unidades pode inverter a conclusão.

10 Vazão, produtividade e taxa de dados

10.1 Vazão

Definição 10.1: Vazão média

A vazão média é a razão entre a quantidade transferida e o tempo decorrido. Para um volume V transferido em tempo $t > 0$,

$$Q = \frac{V}{t}.$$

Unidades possíveis são L/min, m³/s e mL/s.

Exemplo

Uma torneira fornece 18 L/min. Mantida essa taxa, o tempo para fornecer 450 L é

$$t = \frac{V}{Q} = \frac{450}{18} = 25 \text{ min.}$$

10.2 Produtividade

Definição 10.2: Taxa de produtividade

Uma taxa de produtividade compara uma quantidade produzida com tempo, pessoas, área ou outro recurso. Exemplos: peças/h, atendimentos/dia e kg/ha.

Exemplo

Uma máquina produz 840 peças em 7 h. Sua produtividade média é

$$\frac{840}{7} = 120 \text{ peças/h.}$$

Se a taxa permanecer constante, produzir 1500 peças exige

$$\frac{1500}{120} = 12,5 \text{ h.}$$

10.3 Taxa de dados

Definição 10.3: Taxa de transferência de dados

A taxa média de dados é o quociente entre a quantidade de dados transferida e o tempo. Pode ser expressa em MB/s, Mb/s ou outras unidades.

Byte e bit

Um byte corresponde a 8 bits. As abreviações B e b são diferentes:

$$1 \text{ B} = 8 \text{ b}.$$

Assim, 80 Mb/s correspondem teoricamente a 10 MB/s, desconsiderando perdas e sobrecargas de transmissão.

Exemplo

Adotando $1 \text{ GB} = 1000 \text{ MB}$, transferir 2,4 GB em 40 s corresponde a

$$\frac{2400 \text{ MB}}{40 \text{ s}} = 60 \text{ MB/s}.$$

11 Taxa constante e proporcionalidade direta

Teorema 11.1: Taxa constante e função proporcional

Se duas grandezas positivas ou nulas x e y satisfazem uma taxa constante

$$\frac{y}{x} = k$$

para $x > 0$, e $y = 0$ quando $x = 0$, então

$$y = kx.$$

Logo, y é diretamente proporcional a x .

Demonstração

Para $x > 0$, multiplicando $y/x = k$ por x , obtemos $y = kx$. Para $x = 0$, a hipótese fornece $y = 0 = k \cdot 0$.

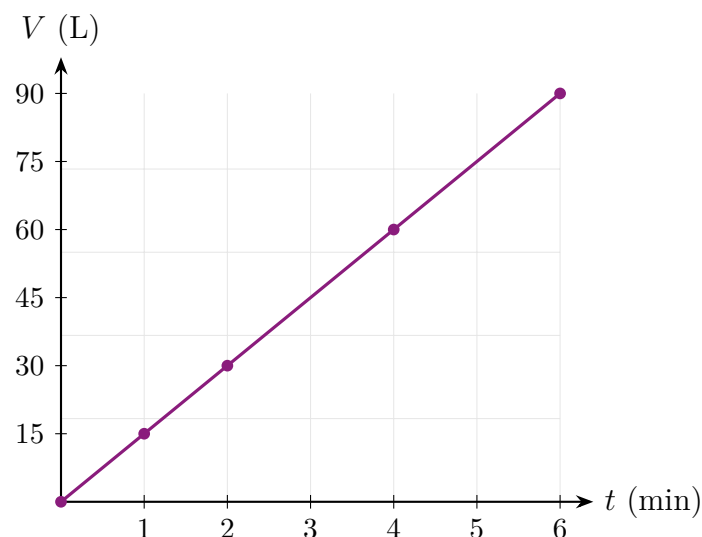
Exemplo

Com vazão constante de 15 L/min, o volume fornecido após t minutos é

$$V(t) = 15t.$$

A tabela e o gráfico são proporcionais:

$t \text{ (min)}$	0	1	2	4	6
$V \text{ (L)}$	0	15	30	60	90



Taxa média não implica taxa constante

Se uma viagem teve média de 60 km/h, não se conclui que $d = 60t$ em cada trecho. Essa fórmula só descreve o movimento inteiro ou um modelo que suponha velocidade constante.

12 Combinação de taxas

Definição 12.1: Taxa global

Quando vários grupos ou intervalos são reunidos, a taxa global é calculada pela razão entre o total do numerador e o total do denominador:

$$r = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{b_1 + \cdots + b_n}.$$

Teorema 12.1: Média ponderada das taxas

Se $b_i > 0$ e $r_i = a_i/b_i$, então

$$r = \frac{\sum a_i}{\sum b_i} = \frac{\sum r_i b_i}{\sum b_i}.$$

Portanto, a taxa global é uma média das taxas r_i ponderada pelos respectivos denominadores b_i .

Demonstração

De $r_i = a_i/b_i$, temos $a_i = r_i b_i$. Substituindo no numerador da taxa global,

$$r = \frac{\sum a_i}{\sum b_i} = \frac{\sum r_i b_i}{\sum b_i}.$$

Preço médio por quilograma

Uma compra contém 2 kg a R\$ 18/kg e 3 kg a R\$ 24/kg. O custo total é

$$2 \cdot 18 + 3 \cdot 24 = 108 \text{ reais,}$$

e a massa total é 5 kg. Logo,

$$p_{\text{médio}} = \frac{108}{5} = \text{R\$ } 21,60/\text{kg}.$$

A média simples $(18 + 24)/2 = 21$ ignora que as massas são diferentes.

Teorema 12.2: Limites da taxa global

Com pesos positivos, a taxa global está entre a menor e a maior taxa parcial:

$$\min(r_i) \leq r \leq \max(r_i).$$

Demonstração

Se $m \leq r_i \leq M$ e $b_i > 0$, então

$$mb_i \leq r_i b_i \leq Mb_i.$$

Somando e dividindo pela soma positiva dos b_i , obtemos $m \leq r \leq M$.

13 Razões recíprocas e interpretação

Definição 13.1: Taxa recíproca

Se $r = a/b \neq 0$, a taxa com a ordem invertida é

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{r}.$$

As duas taxas descrevem a mesma relação sob perguntas diferentes.

Exemplo

Se uma máquina produz 120 peças/h, então o tempo médio por peça é

$$\frac{1}{120} \text{ h/peça} = \frac{60}{120} \text{ min/peça} = 0,5 \text{ min/peça}.$$

Pergunta determina a ordem

Pergunta	Razão adequada
Quilômetros por hora	distância/tempo
Tempo por quilômetro	tempo/distância
Reais por quilograma	custo/massa
Quilogramas por real	massa/custo
Habitantes por km ²	população/área
Área por habitante	área/população

14 Tecnologia, planilhas e validação

14.1 Tabela de taxas em planilha

Considere distâncias na coluna A e tempos na coluna B. Para calcular velocidade em km/h na coluna C:

1. escreva os títulos e as unidades;
2. na célula C2, insira $=A2/B2$;
3. preencha as demais linhas;
4. verifique se nenhuma célula do tempo contém zero;
5. formate os resultados com precisão coerente;
6. para a velocidade global, use $=SOMA(A2:A6)/SOMA(B2:B6)$.

Não use a média simples automaticamente

A fórmula $=MÉDIA(C2:C6)$ só é apropriada para a taxa global quando os denominadores usados como pesos são iguais. Em geral, divida o total do numerador pelo total do denominador.

Laboratório de taxas

Monte uma tabela com cinco embalagens de um mesmo produto. Registre massa, preço e preço por quilograma. Depois:

- a) ordene as embalagens pelo preço total;
- b) ordene-as pelo preço unitário;
- c) compare as duas classificações;
- d) discuta fatores não numéricos, como validade e desperdício;
- e) crie um gráfico de dispersão com massa no eixo horizontal e preço no eixo vertical.

15 Erros frequentes e estratégias de resolução

Inverter a razão

Para calcular km/h, divide-se distância por tempo. Dividir tempo por distância produz h/km, uma taxa válida, mas que responde a outra pergunta.

Somar grandezas incompatíveis

Não se pode somar 3 km e 2 h, pois são grandezas de espécies diferentes. Em uma fórmula correta, somas envolvem grandezas compatíveis.

Converter somente parte da unidade composta

Ao converter km/h para m/s, devem ser convertidos tanto quilômetros quanto horas. Alterar apenas o numerador produz resultado incorreto.

Usar média aritmética sem analisar os pesos

Taxas parciais só podem ser combinadas diretamente quando os denominadores são iguais. Caso contrário, calcule os totais ou use média ponderada.

Confundir densidade com total

Uma região mais populosa não é necessariamente mais densa. Um objeto mais massivo não é necessariamente feito de material mais denso.

Arredondar cedo demais

Mantenha valores exatos ou mais casas durante os cálculos e arredonde apenas a resposta final, conforme a precisão dos dados e o contexto.

Roteiro de resolução

1. Identifique as duas grandezas e a pergunta.
2. Escolha a ordem correta da razão.
3. Converta unidades incompatíveis.
4. Escreva a fórmula com símbolos e unidades.
5. Substitua os valores e calcule.
6. Verifique se a unidade final responde à pergunta.
7. Interprete o resultado e avalie sua plausibilidade.

16 Exercícios de consolidação

16.1 Bloco A — Conceitos e unidades

A1. Classifique cada par como grandezas da mesma espécie ou de espécies diferentes:

- a) 3 m e 250 cm;
- b) 80 km e 2 h;
- c) 5 kg e 300 g;
- d) R\$ 45 e 2 kg.

A2. Explique a diferença entre valor numérico, unidade e grandeza usando o exemplo 72 km/h.

A3. Dê a unidade resultante de cada razão:

- a) massa/volume;
- b) população/área;
- c) custo/quantidade;
- d) volume/tempo.

A4. Calcule a razão entre 2 m e 50 cm após converter para a mesma unidade.

A5. Escreva a taxa recíproca de 90 km/h e interprete-a em h/km.

A6. Explique por que 40 km/h e 40 hab/km² não representam a mesma grandeza, embora tenham o mesmo valor numérico.

A7. Uma receita produz 18 porções com 750 g de ingrediente. Escreva:

- a) gramas por porção;
- b) porções por grama.

A8. Determine qual taxa responde a cada pergunta:

- a) “quanto tempo é gasto por peça?”;
- b) “quantas peças são produzidas por hora?”;
- c) “qual área corresponde a cada habitante?”.

A9. Mostre que 1000 m/3600 s e 1 km/1 h representam a mesma taxa.

A10. Explique por que o denominador de uma taxa não pode ser zero.

A11. Dê um exemplo de razão adimensional e um de taxa com unidade composta.

A12. Uma tabela apresenta custo e massa. Que coluna calculada deve ser criada para comparar embalagens de tamanhos diferentes?

16.2 Bloco B — Cálculos e conversões

B1. Converta:

- a) 108 km/h para m/s;
- b) 25 m/s para km/h;
- c) 54 km/h para m/s.

B2. Converta 2 400 hab/km² para hab/ha.

B3. Converta 7,8 g/cm³ para kg/m³.

B4. Uma impressora produz 360 páginas em 12 min. Determine páginas por minuto e segundos por página.

B5. Um arquivo de 3,6 GB é transferido em 2 min. Adote 1 GB = 1000 MB e calcule a taxa em MB/s.

B6. Uma bomba transfere 4,5 m³ em 15 min. Determine a vazão em L/min.

B7. Um produto de 850 g custa R\$ 22,10. Determine o preço por quilograma.

B8. Um veículo percorre 420 km com 35 L. Calcule km/L e L/100 km.

B9. Uma região de 750 km² possui 1 125 000 habitantes. Calcule a densidade demográfica.

B10. Uma peça de 1,44 kg ocupa 600 cm³. Calcule sua densidade em g/cm³.

B11. Um ciclista percorre 36 km em 1 h 30 min. Determine a velocidade média em km/h e m/s.

B12. Uma máquina opera a 150 unidades/h. Quanto tempo, em horas e minutos, ela leva para produzir 525 unidades?

16.3 Bloco C — Problemas aplicados

C1. Um carro percorre 150 km a 75 km/h, permanece parado por 30 min e percorre mais 100 km a 50 km/h. Calcule a velocidade média considerando o tempo total.

C2. Um trajeto de ida e volta tem 120 km em cada sentido. A ida ocorre a 60 km/h e a volta a 40 km/h. Determine a velocidade média da viagem.

C3. Duas cidades apresentam:

	população	área
A	480 000	600 km ²
B	900 000	1 500 km ²

Calcule as densidades e compare-as.

C4. As regiões A e B da questão anterior formam uma área administrativa. Calcule a densidade conjunta e explique por que não se usa simplesmente a média das duas densidades.

- C5.** Um bloco homogêneo de densidade $2,5 \text{ g/cm}^3$ possui volume de 320 cm^3 . Determine sua massa em gramas e quilogramas.
- C6.** Compare as ofertas: 600 g por R\$ 15,60 e 1,1 kg por R\$ 27,50. Qual possui menor preço por quilograma?
- C7.** Uma empresa cobra R\$ 18,00 de taxa fixa mais R\$ 4,50 por unidade. Calcule o custo médio por unidade para 6 e para 30 unidades.
- C8.** Um reservatório de 2 400 L é preenchido por uma entrada de 35 L/min e esvaziado simultaneamente por uma saída de 15 L/min. Partindo vazio, determine o tempo de enchimento, supondo taxas constantes.
- C9.** Uma equipe A realiza 84 tarefas em 7 h; uma equipe B realiza 150 tarefas em 10 h. Compare as produtividades. Se trabalharem juntas com taxas mantidas, quantas tarefas realizam em 6 h?
- C10.** Uma conexão anunciada como 240 Mb/s transfere, no máximo teórico, quantos MB por segundo? Quanto tempo mínimo levaria um arquivo de 3 GB, adotando $1 \text{ GB} = 1000 \text{ MB}$?
- C11.** Um veículo A faz 14 km/L; um veículo B consome 6,5 L/100 km. Converta para uma unidade comum e determine o mais eficiente.
- C12.** Um terreno produz 18 t em 12 ha e outro produz 28 t em 20 ha. Compare a produtividade em t/ha e calcule a produtividade conjunta.

16.4 Bloco D — Análise crítica e elaboração

- D1.** Um estudante calcula a velocidade média de dois trechos fazendo a média simples das velocidades. Explique quando esse procedimento é válido.
- D2.** Uma cidade tem densidade média de 5000 hab/km^2 . Analise a frase: “em cada quilômetro quadrado moram exatamente 5000 pessoas”.
- D3.** Um anúncio chama uma embalagem de “mais econômica” apenas porque seu preço total é menor. Explique qual taxa deve ser comparada e cite uma possível limitação dessa comparação.
- D4.** Explique o erro em converter 90 km/h para 90 000 m/s.
- D5.** Crie uma situação em que inverter a razão produz uma grandeza útil.
- D6.** Elabore um problema de vazão com duas entradas simultâneas e resolva-o.
- D7.** Construa duas regiões fictícias cuja região mais populosa tenha menor densidade demográfica.
- D8.** Uma taxa global calculada ficou maior que todas as taxas parciais positivas. Explique por que isso indica erro.

17 Questões de aprofundamento

- P1.** Demonstre que, para duas velocidades positivas em distâncias iguais, a velocidade média é menor ou igual à média aritmética, com igualdade somente quando as velocidades são iguais.
- P2.** Uma viagem possui três trechos. Prove que a velocidade média é uma média ponderada das velocidades dos trechos, usando os tempos como pesos.
- P3.** Uma região A tem densidade D_A e área A ; outra tem densidade D_B e área $2A$. Determine a densidade conjunta e explique os pesos.
- P4.** Um produto custa p reais por quilograma. Após desconto de 10% no preço total e aumento de 20% na massa da embalagem, determine o novo preço por quilograma em função de p .
- P5.** Uma máquina aumenta sua produtividade de 120 para 150 peças/h. Calcule a variação percentual da produtividade e a variação percentual do tempo por peça.
- P6.** Mostre que, se E aumenta 25%, o consumo recíproco $C = 100/E$ diminui 20%, e não 25%.

18 Avaliação-síntese

- S1.** Defina taxa entre grandezas de espécies diferentes e explique o papel da unidade.
- S2.** Converta 126 km/h para m/s e 12 m/s para km/h.
- S3.** Uma viagem possui 180 km percorridos em 2 h e 90 km em 1,5 h. Calcule a velocidade média total.
- S4.** Uma região de 2 400 km² possui 3 120 000 habitantes. Determine a densidade demográfica e converta-a para hab/ha.
- S5.** Um material homogêneo possui densidade 7,5 g/cm³. Determine a massa de 240 cm³ desse material.
- S6.** Compare os preços: 400 g por R\$ 11,20 e 750 g por R\$ 19,50.
- S7.** Um veículo faz 16 km/L. Expresse o consumo em L/100 km e determine o combustível necessário para 560 km.
- S8.** Uma torneira fornece 22 L/min. Quantos litros fornece em 1 h 15 min?
- S9.** Uma linha produz 540 itens em 4,5 h. Calcule itens/h e minutos por item.
- S10.** Dois lotes têm produtividades 3 t/ha em 8 ha e 5 t/ha em 12 ha. Determine a produtividade conjunta.
- S11.** Explique por que a média simples de taxas parciais pode ser incorreta e apresente a fórmula adequada.
- S12.** Elabore e resolva um problema que envolva uma razão entre grandezas de espécies diferentes, indicando unidades e interpretação.

19 Gabarito comentado

19.1 Bloco A

A1. a) mesma; b) diferentes; c) mesma; d) diferentes.

A2. 72 é o valor numérico; km/h é a unidade composta; a grandeza é a velocidade, razão entre distância e tempo.

A3. Exemplos de unidades:

a) kg/m^3 ou g/cm^3 ;

b) hab/km^2 ;

c) $\text{R\$/unidade}$;

d) L/min ou m^3/s .

A4. Como $2 \text{ m} = 200 \text{ cm}$,

$$\frac{200}{50} = 4.$$

A5.

$$\frac{1}{90} \text{ h/km}.$$

É o tempo, em horas, gasto por quilômetro nessa taxa constante.

A6. As unidades mostram espécies distintas: km/h mede distância por tempo; hab/km^2 mede população por área.

A7. a) $750/18 = 41,666 \dots \text{ g/porção}$;

b) $18/750 = 0,024 \text{ porção/g}$.

A8. a) tempo/quantidade de peças;

b) quantidade de peças/tempo;

c) área/população.

A9.

$$\frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{1 \text{ km}}{1 \text{ h}} = 1 \text{ km/h}.$$

A10. Divisão por zero não é definida. Além disso, não há taxa “por zero” unidades da grandeza de referência.

A11. Exemplo adimensional: $4 \text{ m}/2 \text{ m} = 2$. Exemplo composto: $120 \text{ km}/2 \text{ h} = 60 \text{ km/h}$.

A12. Deve-se criar a coluna preço/massa, preferencialmente em $\text{R\$/kg}$.

19.2 Bloco B

B1. a) $108 \cdot 5/18 = 30 \text{ m/s}$;

b) $25 \cdot 18/5 = 90 \text{ km/h}$;

c) $54 \cdot 5/18 = 15 \text{ m/s}$.

B2. Como $1 \text{ km}^2 = 100 \text{ ha}$,

$$2400 \text{ hab/km}^2 = 24 \text{ hab/ha}.$$

B3.

$$7,8 \text{ g/cm}^3 = 7800 \text{ kg/m}^3.$$

B4.

$$\frac{360}{12} = 30 \text{ páginas/min}, \quad \frac{60}{30} = 2 \text{ s/página}.$$

B5. $3,6 \text{ GB} = 3600 \text{ MB}$ e $2 \text{ min} = 120 \text{ s}$:

$$\frac{3600}{120} = 30 \text{ MB/s}.$$

B6. $4,5 \text{ m}^3 = 4500 \text{ L}$:

$$\frac{4500}{15} = 300 \text{ L/min}.$$

B7. $850 \text{ g} = 0,85 \text{ kg}$:

$$\frac{22,10}{0,85} = R\$ 26,00/\text{kg}.$$

B8.

$$E = \frac{420}{35} = 12 \text{ km/L}, \quad C = \frac{100}{12} \approx 8,33 \text{ L/100 km}.$$

B9.

$$D = \frac{1\,125\,000}{750} = 1500 \text{ hab/km}^2.$$

B10. $1,44 \text{ kg} = 1440 \text{ g}$:

$$\rho = \frac{1440}{600} = 2,4 \text{ g/cm}^3.$$

B11. $1 \text{ h } 30 \text{ min} = 1,5 \text{ h}$:

$$v_m = \frac{36}{1,5} = 24 \text{ km/h} = \frac{20}{3} \text{ m/s} \approx 6,67 \text{ m/s}.$$

B12.

$$t = \frac{525}{150} = 3,5 \text{ h} = 3 \text{ h } 30 \text{ min}.$$

19.3 Bloco C

C1. Os tempos de movimento são $150/75 = 2 \text{ h}$ e $100/50 = 2 \text{ h}$. Com a parada, $t_{\text{total}} = 4,5 \text{ h}$. Assim,

$$v_m = \frac{250}{4,5} \approx 55,56 \text{ km/h}.$$

C2. As distâncias são iguais. Os tempos são $120/60 = 2 \text{ h}$ e $120/40 = 3 \text{ h}$:

$$v_m = \frac{240}{5} = 48 \text{ km/h}.$$

C3.

$$D_A = \frac{480\,000}{600} = 800 \text{ hab/km}^2,$$
$$D_B = \frac{900\,000}{1500} = 600 \text{ hab/km}^2.$$

A é mais densa, embora B seja mais populosa.

C4.

$$D = \frac{480\,000 + 900\,000}{600 + 1500} = \frac{1\,380\,000}{2100} \approx 657,14 \text{ hab/km}^2.$$

A média simples ignora que as áreas são diferentes.

C5.

$$m = \rho V = 2,5 \cdot 320 = 800 \text{ g} = 0,8 \text{ kg}.$$

C6.

$$p_1 = \frac{15,60}{0,6} = R\$ 26,00/\text{kg},$$
$$p_2 = \frac{27,50}{1,1} = R\$ 25,00/\text{kg}.$$

A segunda oferta possui menor preço por quilograma.

C7.

$$\frac{18 + 4,5 \cdot 6}{6} = R\$ 7,50/\text{unidade},$$
$$\frac{18 + 4,5 \cdot 30}{30} = R\$ 5,10/\text{unidade}.$$

C8. A vazão líquida é $35 - 15 = 20 \text{ L/min}$. Logo,

$$t = \frac{2400}{20} = 120 \text{ min} = 2 \text{ h}.$$

C9.

$$r_A = \frac{84}{7} = 12 \text{ tarefas/h}, \quad r_B = \frac{150}{10} = 15 \text{ tarefas/h}.$$

B é mais produtiva. Juntas, a taxa é 27 tarefas/h e, em 6 h, produzem 162 tarefas.

C10. Como $1 \text{ B} = 8 \text{ b}$,

$$240 \text{ Mb/s} = 30 \text{ MB/s}.$$

Para $3 \text{ GB} = 3000 \text{ MB}$,

$$t = \frac{3000}{30} = 100 \text{ s} = 1 \text{ min } 40 \text{ s}.$$

C11. Para A,

$$C_A = \frac{100}{14} \approx 7,14 \text{ L/100 km}.$$

Como B consome 6,5 L/100 km, B é mais eficiente.

C12.

$$r_1 = \frac{18}{12} = 1,5 \text{ t/ha}, \quad r_2 = \frac{28}{20} = 1,4 \text{ t/ha}.$$

O primeiro é mais produtivo. A produtividade conjunta é

$$\frac{18 + 28}{12 + 20} = \frac{46}{32} = 1,4375 \text{ t/ha}.$$

19.4 Bloco D

- D1.** A média simples é válida quando os tempos dos trechos são iguais. Em geral, deve-se ponderar cada velocidade pelo tempo correspondente ou dividir a distância total pelo tempo total.
- D2.** A frase é incorreta. A densidade é uma média sobre a área total; a distribuição espacial pode ser muito desigual.
- D3.** Deve-se comparar preço por uma mesma unidade, como R\$/kg. A opção com menor preço unitário pode ainda ser inadequada se causar desperdício ou exceder a quantidade necessária.
- D4.** Foram convertidos quilômetros para metros, mas as horas não foram convertidas para segundos. O correto é

$$90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}.$$

- D5.** Resposta possível: 120 peças/h corresponde a 0,5 min/peça. As duas taxas são úteis para produção e planejamento de tempo.
- D6.** Resposta pessoal. Exemplo: duas entradas de 12 L/min e 8 L/min enchem 600 L em

$$600/(12 + 8) = 30 \text{ min}.$$

- D7.** Resposta possível: A possui 1 000 000 habitantes em 2 000 km², logo 500 hab/km²; B possui 600 000 habitantes em 600 km², logo 1000 hab/km². A é mais populosa e menos densa.
- D8.** Com pesos positivos, a taxa global é uma média ponderada e deve ficar entre a menor e a maior taxa parcial. Um valor maior que todas indica erro nos totais, nas unidades ou na fórmula.

19.5 Questões de aprofundamento

- P1.** Para distâncias iguais,

$$v_m = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}.$$

Queremos mostrar

$$\frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} \leq \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Como $v_1 + v_2 > 0$, isso equivale a

$$4v_1v_2 \leq (v_1 + v_2)^2 \iff 0 \leq (v_1 - v_2)^2.$$

A igualdade ocorre somente quando $v_1 = v_2$.

- P2.** Como $d_i = v_i t_i$,

$$v_m = \frac{d_1 + d_2 + d_3}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2 + v_3 t_3}{t_1 + t_2 + t_3}.$$

Os tempos são os pesos porque formam o denominador da taxa.

P3. As populações são $D_A A$ e $D_B(2A)$. Assim,

$$D = \frac{D_A A + 2D_B A}{A + 2A} = \frac{D_A + 2D_B}{3}.$$

As áreas fornecem pesos 1 e 2.

P4. Se a massa inicial é m , o custo é pm . Após as alterações, o custo é $0,9pm$ e a massa é $1,2m$. Portanto,

$$p' = \frac{0,9pm}{1,2m} = 0,75p.$$

O preço unitário cai 25%.

P5. A produtividade aumenta

$$\frac{150 - 120}{120} = 25\%.$$

O tempo por peça passa de $1/120$ h para $1/150$ h. Sua variação é

$$\frac{1/150}{1/120} - 1 = \frac{120}{150} - 1 = -20\%.$$

P6. Se $E' = 1,25E$, então

$$C' = \frac{100}{1,25E} = 0,8 \frac{100}{E} = 0,8C.$$

Logo, o consumo diminui 20%.

19.6 Avaliação-síntese

S1. É o quociente entre medidas de espécies diferentes. A unidade composta identifica as grandezas, a ordem da divisão e o significado do valor.

S2.

$$126 \cdot \frac{5}{18} = 35 \text{ m/s}, \quad 12 \cdot \frac{18}{5} = 43,2 \text{ km/h}.$$

S3.

$$v_m = \frac{180 + 90}{2 + 1,5} = \frac{270}{3,5} \approx 77,14 \text{ km/h}.$$

S4.

$$D = \frac{3\,120\,000}{2400} = 1300 \text{ hab/km}^2 = 13 \text{ hab/ha}.$$

S5.

$$m = \rho V = 7,5 \cdot 240 = 1800 \text{ g} = 1,8 \text{ kg}.$$

S6.

$$p_1 = \frac{11,20}{0,4} = R\$ 28,00/\text{kg},$$
$$p_2 = \frac{19,50}{0,75} = R\$ 26,00/\text{kg}.$$

A segunda embalagem tem menor preço unitário.

S7.

$$C = \frac{100}{16} = 6,25 \text{ L/100 km}, \quad L = \frac{560}{16} = 35 \text{ L}.$$

S8. 1 h 15 min = 75 min:

$$V = 22 \cdot 75 = 1650 \text{ L}.$$

S9.

$$r = \frac{540}{4,5} = 120 \text{ itens/h}, \quad \frac{60}{120} = 0,5 \text{ min/item}.$$

S10. A produção total é $3 \cdot 8 + 5 \cdot 12 = 84 \text{ t}$ e a área total é 20 ha:

$$r = \frac{84}{20} = 4,2 \text{ t/ha}.$$

S11. A média simples ignora denominadores diferentes. A fórmula adequada é

$$r = \frac{\sum a_i}{\sum b_i} = \frac{\sum r_i b_i}{\sum b_i}.$$

S12. Resposta pessoal. Deve apresentar duas grandezas de espécies diferentes, a ordem correta da razão, unidades compatíveis, cálculo e interpretação.

20 Resumo final

Mapa de fórmulas essenciais

$$\begin{array}{lll} r = \frac{a}{b}, & a = rb & v_m = \frac{d_{\text{total}}}{t_{\text{total}}} \\ D = \frac{P}{A}, & P = DA & \rho = \frac{m}{V}, \quad m = \rho V \\ p = \frac{C}{q}, & C = pq & Q = \frac{V}{t}, \quad V = Qt \\ E = \frac{d}{L} & & C_{100} = \frac{100}{E} \\ r_{\text{global}} = \frac{\sum a_i}{\sum b_i} & & r_{\text{global}} = \frac{\sum r_i b_i}{\sum b_i} \end{array}$$

- Uma taxa compara grandezas e preserva a ordem da divisão.
- A unidade composta comunica o significado do resultado.
- Conversões corretas tratam todas as partes da unidade.
- Velocidade média usa distância total dividida pelo tempo total.
- Densidades são médias e não descrevem, sozinhas, a distribuição interna.
- Preço unitário permite comparar quantidades diferentes em uma base comum.
- Taxas recíprocas respondem a perguntas inversas.
- A taxa global é calculada pelos totais ou por média ponderada.
- Toda resposta deve incluir unidade, interpretação e verificação de plausibilidade.

Referência normativa

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Matemática, 9º ano, habilidade EF09MA07. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf.

Fim do curso — Razões entre Grandezas de Espécies Diferentes