

Proporcionalidade Direta e Inversa

Curso completo de Matemática — 9º ano do Ensino Fundamental

Alinhado à habilidade EF09MA08 da BNCC

Sumário

1	Apresentação e objetivos de aprendizagem	1
2	Razão, taxa e correspondência entre grandezas	1
3	Proporcionalidade direta	2
3.1	Tabela de proporcionalidade direta	3
3.2	Gráfico	3
4	Proporcionalidade inversa	4
4.1	Tabela de proporcionalidade inversa	5
4.2	Gráfico	5
5	Como distinguir os modelos	6
6	Regra de três simples com justificativa	7
6.1	Caso direto	7
6.2	Caso inverso	7
6.3	Estimativa para validar	8
7	Duas ou mais grandezas	8
8	Divisão em partes diretamente proporcionais	9
9	Divisão em partes inversamente proporcionais	10
10	Escalas	11
10.1	Redução e ampliação	11
10.2	Escala de área e volume	12
11	Taxa de variação	12
12	Aplicações em diferentes contextos	13

12.1 Consumo de água	13
12.2 Receitas e misturas	13
12.3 Deslocamento	13
12.4 Orçamento e consumo	13
12.5 Grandezas ambientais	14
13 Tecnologia, planilhas e investigação	14
13.1 Teste de proporcionalidade em tabela	14
13.2 Simulação de parâmetros	14
14 Erros frequentes e roteiro de resolução	14
15 Exercícios de consolidação	15
15.1 Bloco A — Conceitos e reconhecimento	15
15.2 Bloco B — Regra de três, partilha e escala	16
15.3 Bloco C — Duas ou mais grandezas e aplicações	17
15.4 Bloco D — Análise crítica e elaboração	17
16 Questões de aprofundamento	18
17 Avaliação-síntese	18
18 Gabarito comentado	19
18.1 Bloco A	19
18.2 Bloco B	20
18.3 Bloco C	21
18.4 Bloco D	22
18.5 Questões de aprofundamento	22
18.6 Avaliação-síntese	23
19 Resumo final	24

1 Apresentação e objetivos de aprendizagem

Proporcionalidade descreve relações em que grandezas variam de modo coordenado. Se duplicar uma quantidade duplica outra, pode haver proporcionalidade direta. Se duplicar uma quantidade reduz a outra à metade, pode haver proporcionalidade inversa. Essas observações, porém, precisam ser confirmadas por uma constante, uma tabela, uma expressão ou um modelo coerente.

Ao concluir este curso, espera-se que o estudante seja capaz de:

- reconhecer razões e taxas constantes;
- caracterizar proporcionalidade direta por quociente constante;
- caracterizar proporcionalidade inversa por produto constante;
- transitar entre descrições verbais, tabelas, fórmulas e gráficos;
- distinguir proporcionalidade de relações não proporcionais;
- resolver regra de três direta e inversa com justificativa;
- modelar problemas envolvendo duas ou mais grandezas;
- dividir uma quantidade em partes direta ou inversamente proporcionais;
- interpretar e utilizar escalas em mapas, plantas e modelos;
- relacionar escala linear, escala de área e escala de volume;
- calcular e interpretar taxa de variação;
- utilizar calculadoras e planilhas para investigar padrões;
- elaborar problemas e validar resultados em diferentes contextos.

Correspondência com a BNCC

Este curso desenvolve principalmente a habilidade **EF09MA08**: resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

2 Razão, taxa e correspondência entre grandezas

Definição 2.1: Razão

Para números a e b , com $b \neq 0$, a razão de a para b é

$$\frac{a}{b}.$$

Quando a e b medem grandezas de espécies diferentes, a razão possui unidade composta e costuma ser chamada de taxa.

Definição 2.2: Grandezas correspondentes

Dois valores são *correspondentes* quando descrevem o mesmo caso da relação. Em uma tabela, devem permanecer na mesma coluna ou linha de dados.

Exemplo

Se 3 kg de um produto custam R\$ 42,00, o par correspondente é (3, 42). Se o preço unitário permanecer constante, outros pares, como (1, 14) e (5, 70), pertencem à mesma relação.

Ordem e unidade

Preço por massa é custo/massa, medido em R\$/kg. Massa por preço é massa/custo, medido em kg/R\$. As razões são recíprocas e respondem a perguntas diferentes.

3 Proporcionalidade direta

Definição 3.1: Grandezas diretamente proporcionais

Duas grandezas x e y são *diretamente proporcionais* quando existe uma constante real k tal que

$$y = kx.$$

O número k é a constante de proporcionalidade.

Teorema 3.1: Critério do quociente constante

Para valores com $x \neq 0$, as grandezas x e y são diretamente proporcionais se, e somente se,

$$\frac{y}{x} = k$$

é constante e a relação admite (0, 0) quando o valor zero faz sentido.

Demonstração

Se $y = kx$, então, para $x \neq 0$,

$$\frac{y}{x} = \frac{kx}{x} = k.$$

Reciprocamente, se $y/x = k$, multiplicar ambos os membros por x fornece $y = kx$. Para $x = 0$, a fórmula resulta em $y = 0$.

Teorema 3.2: Fator de multiplicação comum

Se $y = kx$ e x é multiplicado por um fator a , então y também é multiplicado por a :

$$y(ax) = k(ax) = a(kx) = ay(x).$$

Preço constante por unidade

Sete cadernos custam R\$ 94,50. O preço unitário é

$$k = \frac{94,50}{7} = R\$ 13,50/\text{caderno}.$$

Supondo preço unitário constante, o custo de n cadernos é

$$C(n) = 13,50n.$$

3.1 Tabela de proporcionalidade direta

x	0	1	2	4	6
$y = 3x$	0	3	6	12	18
y/x	—	3	3	3	3

Teorema 3.3: Propriedade fundamental das proporções

Se a, b, c, d são números com $b \neq 0$ e $d \neq 0$, então

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc.$$

Demonstração

Multiplicando a igualdade $a/b = c/d$ por bd , obtemos $ad = bc$. No sentido inverso, dividindo $ad = bc$ por $bd \neq 0$, obtemos $a/b = c/d$.

3.2 Gráfico

Teorema 3.4: Gráfico da proporcionalidade direta

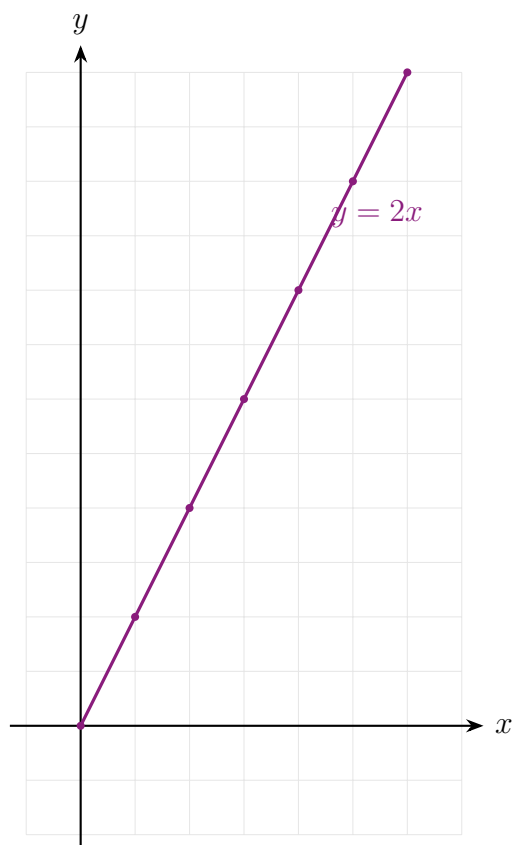
O gráfico de $y = kx$ está contido em uma reta que passa pela origem. Para $k > 0$, a função é crescente; para $k < 0$, é decrescente; para $k = 0$, é constante.

Demonstração

Como $y(0) = 0$, o ponto $(0, 0)$ pertence ao gráfico. Além disso, a taxa de variação entre quaisquer dois pontos distintos é

$$\frac{kx_2 - kx_1}{x_2 - x_1} = k,$$

portanto o gráfico tem inclinação constante.



Passar pela origem não é suficiente

O gráfico de $y = x^2$ passa pela origem, mas não representa proporcionalidade direta, pois $y/x = x$ não é constante. É preciso verificar toda a relação.

4 Proporcionalidade inversa

Definição 4.1: Grandezas inversamente proporcionais

Duas grandezas não nulas x e y são *inversamente proporcionais* quando existe uma constante não nula k tal que

$$y = \frac{k}{x}.$$

Teorema 4.1: Critério do produto constante

As grandezas não nulas x e y são inversamente proporcionais se, e somente se,

$$xy = k$$

é constante.

Demonstração

Se $y = k/x$, então $xy = x(k/x) = k$. Reciprocamente, se $xy = k$ e $x \neq 0$, dividir por x fornece $y = k/x$.

Teorema 4.2: Fatores recíprocos

Se $xy = k$ e x é multiplicado por um fator não nulo a , então y deve ser dividido por a para manter o produto:

$$(ax) \left(\frac{y}{a} \right) = xy = k.$$

Trabalho com produtividade constante

Se 6 trabalhadores concluem uma tarefa em 15 dias, o total é

$$6 \cdot 15 = 90 \text{ trabalhador-dias.}$$

Com 10 trabalhadores igualmente produtivos,

$$10d = 90 \implies d = 9 \text{ dias.}$$

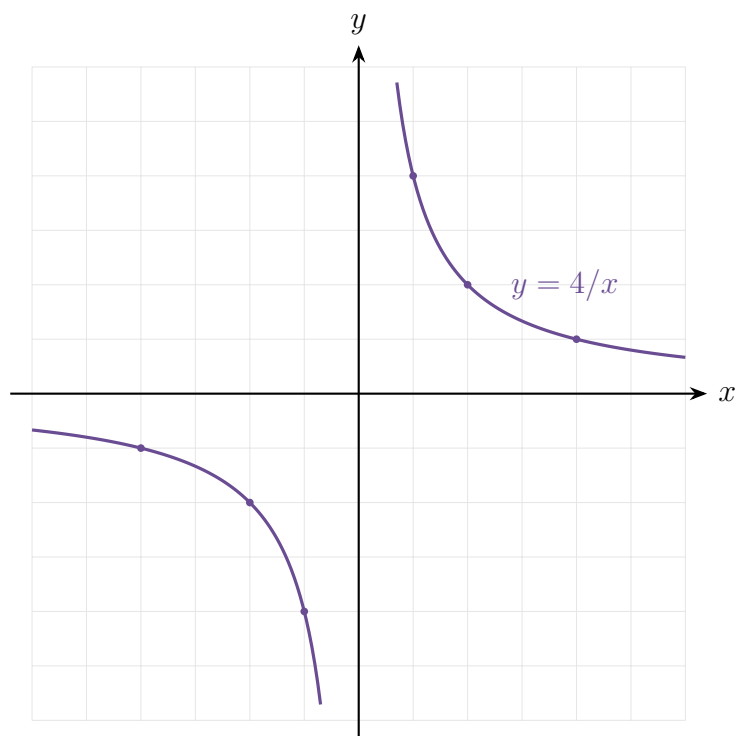
Esse modelo supõe mesma produtividade, mesma jornada e trabalho divisível.

4.1 Tabela de proporcionalidade inversa

x	1	2	3	4	6
$y = 12/x$	12	6	4	3	2
xy	12	12	12	12	12

4.2 Gráfico

O gráfico de $y = k/x$ não é uma reta e não contém pontos com $x = 0$. Para $k > 0$, seus ramos ficam nos quadrantes I e III; em contextos de grandezas positivas, utiliza-se apenas o ramo do quadrante I.



Diminuir não basta

Uma relação decrescente não é necessariamente inversamente proporcional. É preciso verificar se o produto dos valores correspondentes é constante.

5 Como distinguir os modelos

Critérios fundamentais

Aspecto	Proporcionalidade direta	Proporcionalidade inversa
Fórmula	$y = kx$	$y = k/x$
Constante	$y/x = k$	$xy = k$
Efeito de duplicar x	y duplica	y reduz à metade
Gráfico	reta pela origem	curva, sem $x = 0$
Zero	$(0, 0)$, se admitido	zero não pertence ao domínio

Relação afim não proporcional

Uma corrida custa R\$ 6,00 de taxa inicial e R\$ 2,50 por quilômetro:

$$C(d) = 6 + 2,5d.$$

Embora o custo cresça com a distância, não há proporcionalidade direta, pois

$$\frac{C(d)}{d} = \frac{6}{d} + 2,5$$

não é constante e $C(0) = 6 \neq 0$.

Área do quadrado

Em $A(l) = l^2$, dobrar l multiplica a área por 4. A razão $A(l)/l = l$ e o produto $lA(l) = l^3$ não são constantes. Logo, não há proporcionalidade direta nem inversa entre lado e área.

Vocabulário cotidiano

Dizer que duas coisas são “proporcionais” no sentido informal de “relacionadas” não basta matematicamente. Proporcionalidade exige quociente ou produto constante, conforme o caso.

6 Regra de três simples com justificativa

6.1 Caso direto

Exemplo

Se 4 kg custam R\$ 52,00, quanto custam 7,5 kg, mantendo o preço por quilograma? O quociente custo/massa deve ser constante:

$$\frac{52}{4} = \frac{x}{7,5}.$$

Pela propriedade fundamental,

$$4x = 52 \cdot 7,5 \implies x = 97,5.$$

Logo, o custo é R\$ 97,50.

6.2 Caso inverso

Exemplo

Se 6 máquinas iguais realizam uma tarefa em 20 h, em quanto tempo 8 máquinas a realizam, supondo trabalho divisível e produtividade mantida?

O produto máquinas $\times$ tempo deve ser constante:

$$6 \cdot 20 = 8x.$$

Assim,

$$x = \frac{120}{8} = 15 \text{ h.}$$

Setas não substituem o modelo

Antes de montar uma proporção, identifique a constante: quociente no caso direto, produto no caso inverso. Um esquema de setas sem justificativa pode levar a inverter a relação errada.

6.3 Estimativa para validar

Se a relação é direta e a entrada aumenta, a saída deve aumentar. Se é inversa e a entrada aumenta, a saída deve diminuir. Essa previsão qualitativa ajuda a detectar inversões e erros de cálculo.

7 Duas ou mais grandezas

Definição 7.1: Relação proporcional composta

Uma grandeza pode depender direta ou inversamente de várias outras. O modelo é construído identificando como cada fator atua, mantendo os demais constantes.

Produção com máquinas, dias e horas

Oito máquinas, trabalhando 5 dias durante 6 h por dia, produzem 4800 peças. Quantas peças produzirão 12 máquinas em 4 dias de 8 h, mantida a produtividade por máquina-hora?

A produção é diretamente proporcional aos três fatores:

$$P = 4800 \cdot \frac{12}{8} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{6}.$$

Logo,

$$P = 4800 \cdot 1,6 = 7680 \text{ peças.}$$

Teorema 7.1: Modelo multiplicativo de produção

Se a produtividade por agente e por unidade de tempo é constante, a quantidade produzida é

$$P = knt,$$

em que n é o número de agentes, t é o tempo de trabalho de cada agente e k é a produtividade por agente-tempo.

Demonstração

Cada agente produz kt unidades em tempo t . Com n agentes igualmente produtivos e sem interferência entre eles, a produção total é $n(kt) = knt$.

Tempo para concluir quantidade fixa

De $P = knt$, mantendo P e k fixos,

$$t = \frac{P}{kn}.$$

Portanto, o tempo é inversamente proporcional ao número de agentes.

Hipóteses do modelo

Mais pessoas ou máquinas não reduzem indefinidamente o tempo real. Espaço, coordenação, treinamento e etapas não divisíveis podem invalidar a proporcionalidade.

8 Divisão em partes diretamente proporcionais

Definição 8.1: Partilha diretamente proporcional

Dividir um total T em partes diretamente proporcionais a pesos positivos $w_1, \dots, w_n$ significa encontrar partes p_i tais que

$$p_i = kw_i$$

para uma mesma constante k e

$$p_1 + \dots + p_n = T.$$

Teorema 8.1: Fórmula da partilha direta

Na partilha diretamente proporcional aos pesos positivos $w_1, \dots, w_n$,

$$p_i = T \frac{w_i}{w_1 + \dots + w_n}.$$

Demonstração

Como $p_i = kw_i$, somando as partes,

$$T = k(w_1 + \dots + w_n).$$

Logo,

$$k = \frac{T}{w_1 + \dots + w_n},$$

e a substituição em $p_i = kw_i$ fornece a fórmula.

Exemplo

Dividir R\$ 4200,00 na razão 2 : 3 : 5.

A soma dos pesos é 10, então

$$p_1 = 4200 \cdot \frac{2}{10} = 840,$$

$$p_2 = 4200 \cdot \frac{3}{10} = 1260, \quad p_3 = 4200 \cdot \frac{5}{10} = 2100.$$

A soma $840 + 1260 + 2100 = 4200$ valida a partilha.

9 Divisão em partes inversamente proporcionais

Definição 9.1: Partilha inversamente proporcional

Dividir T em partes inversamente proporcionais a números positivos $a_1, \dots, a_n$ significa dividir diretamente na razão

$$\frac{1}{a_1} : \frac{1}{a_2} : \dots : \frac{1}{a_n}.$$

Teorema 9.1: Fórmula da partilha inversa

A parte inversamente proporcional a a_i é

$$p_i = T \frac{1/a_i}{1/a_1 + \dots + 1/a_n}.$$

Exemplo

Dividir 1200 pontos inversamente aos tempos 2, 3 e 6. Os pesos recíprocos são

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{6},$$

cuja soma é 1. Logo, as partes são

$$600, \quad 400, \quad 200.$$

O menor tempo recebe a maior parte.

O contexto determina o tipo de partilha

Partilha inversa não é escolhida apenas porque aparece a palavra “tempo”. É necessário que o enunciado justifique por que um valor maior deve corresponder a uma parte menor.

10 Escalas

Definição 10.1: Escala linear

A escala é a razão entre uma medida no desenho, mapa ou modelo e a medida real correspondente, escritas na mesma unidade:

$$E = \frac{d_{\text{desenho}}}{d_{\text{real}}}.$$

Na escala numérica $1 : n$, uma unidade no desenho representa n unidades reais.

Mapa na escala 1:50 000

Uma distância mede 7,2 cm no mapa. A distância real é

$$7,2 \cdot 50\,000 = 360\,000 \text{ cm.}$$

Como $100\,000 \text{ cm} = 1 \text{ km}$,

$$360\,000 \text{ cm} = 3,6 \text{ km.}$$

Determinação da escala

Em uma planta, 8 cm representam 20 m. Convertendo 20 m para 2000 cm,

$$E = \frac{8}{2000} = \frac{1}{250}.$$

A escala é $1 : 250$.

10.1 Redução e ampliação

- Se $0 < E < 1$, há redução.
- Se $E = 1$, há tamanho natural.
- Se $E > 1$, há ampliação.

Exemplo

Uma célula de 0,02 mm é desenhada com 40 mm. A escala é

$$E = \frac{40}{0,02} = 2000,$$

ou $2000 : 1$, uma ampliação.

10.2 Escala de área e volume

Teorema 10.1: Efeito da escala em comprimentos, áreas e volumes

Se todas as medidas lineares são multiplicadas por $s > 0$, então:

- comprimentos são multiplicados por s ;
- áreas são multiplicadas por s^2 ;
- volumes são multiplicados por s^3 .

Demonstração

Uma área retangular $A = ab$ transforma-se em

$$A' = (sa)(sb) = s^2 ab = s^2 A.$$

Um volume de bloco $V = abc$ transforma-se em

$$V' = (sa)(sb)(sc) = s^3 abc = s^3 V.$$

O mesmo princípio se estende a figuras semelhantes.

Escala linear não é escala de área

Na escala 1 : 100, a razão entre áreas correspondentes é 1 : 10 000, e a razão entre volumes correspondentes é 1 : 1 000 000.

11 Taxa de variação

Definição 11.1: Taxa média de variação

Entre dois pares (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , com $x_1 \neq x_2$, a taxa média de variação é

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Ela mede a variação da saída por unidade de variação da entrada.

Teorema 11.1: Taxa da proporcionalidade direta

Para $y = kx$, a taxa de variação entre quaisquer dois pontos distintos é k .

Demonstração

$$\frac{kx_2 - kx_1}{x_2 - x_1} = \frac{k(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = k.$$

Exemplo

Se $V(t) = 18t$ representa volume em litros após t minutos, então

$$\frac{V(8) - V(3)}{8 - 3} = \frac{144 - 54}{5} = 18 \text{ L/min.}$$

A taxa coincide com a constante de proporcionalidade.

Função afim

Em $y = ax + b$, a taxa de variação também é constante e igual a a , mas só há proporcionalidade direta quando $b = 0$.

Taxa não constante

Para $A(l) = l^2$,

$$\frac{A(3) - A(1)}{3 - 1} = 4, \quad \frac{A(5) - A(3)}{5 - 3} = 8.$$

As taxas diferem; lado e área não são diretamente proporcionais.

12 Aplicações em diferentes contextos

12.1 Consumo de água

Se uma torneira fornece água a vazão constante q , o volume após t minutos é $V = qt$, uma proporcionalidade direta. Para fornecer um volume fixo com várias torneiras idênticas, o tempo pode ser inversamente proporcional ao número de torneiras, desde que as vazões se somem sem interferência.

12.2 Receitas e misturas

Ao ampliar uma receita mantendo o sabor e a composição, cada ingrediente é diretamente proporcional ao número de porções. Alterar apenas um ingrediente quebra a razão original.

12.3 Deslocamento

Com velocidade constante, distância e tempo são diretamente proporcionais: $d = vt$. Para uma distância fixa, tempo e velocidade são inversamente proporcionais: $t = d/v$.

12.4 Orçamento e consumo

Com preço unitário constante e sem taxa fixa, custo e quantidade são diretamente proporcionais. Promoções por faixa, taxa de entrega ou desconto fixo podem tornar o modelo não proporcional.

12.5 Grandezas ambientais

Se cada pessoa consome, em média, a mesma quantidade diária de um recurso, o consumo total modelado é diretamente proporcional ao número de pessoas e ao número de dias. O modelo deve explicitar que se trata de uma média e que hábitos reais podem variar.

13 Tecnologia, planilhas e investigação

13.1 Teste de proporcionalidade em tabela

Suponha valores de x na coluna A e de y na coluna B.

- Para testar proporcionalidade direta, calcule em C2: $=B2/A2$.
- Para testar proporcionalidade inversa, calcule em D2: $=A2*B2$.
- Preencha as linhas e verifique qual coluna permanece constante.
- Evite dividir por zero e confira as unidades.

13.2 Simulação de parâmetros

Em um software gráfico, represente

$$y = x, \quad y = 2x, \quad y = \frac{1}{2}x, \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = \frac{4}{x}.$$

Observe como k altera a inclinação das retas $y = kx$ e a posição das curvas $y = k/x$.

Investigação com dados

Crie três tabelas:

- uma com quociente y/x constante;
- uma com produto xy constante;
- uma sem nenhuma dessas propriedades.

Construa os gráficos e escreva uma justificativa algébrica para cada classificação.

14 Erros frequentes e roteiro de resolução

Confiar apenas no sentido da variação

Duas grandezas crescerem juntas não prova proporcionalidade direta; uma crescer enquanto a outra diminui não prova proporcionalidade inversa.

Ignorar o termo fixo

Uma relação $y = ax + b$, com $b \neq 0$, tem taxa de variação constante, mas não é diretamente proporcional.

Usar regra de três em qualquer tabela

Regra de três pressupõe um modelo proporcional. Se quociente ou produto não é constante, a proporção montada não representa os dados.

Escala sem conversão de unidades

Na fórmula de escala, desenho e realidade devem estar na mesma unidade antes de formar a razão.

Esquecer as hipóteses

Trabalhadores, máquinas, torneiras e velocidades só seguem modelos proporcionais sob condições explícitas de produtividade, independência e constância.

Roteiro de resolução

1. Identifique as grandezas, unidades e pares correspondentes.
2. Preveja qualitativamente como uma grandeza varia com a outra.
3. Verifique quociente constante, produto constante ou outro modelo.
4. Escreva a fórmula antes de substituir os valores.
5. Calcule mantendo unidades compatíveis.
6. Interprete, estime e valide o resultado.
7. Registre hipóteses e limitações do modelo.

15 Exercícios de consolidação

15.1 Bloco A — Conceitos e reconhecimento

A1. Defina proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa por meio de suas constantes.

A2. Classifique cada tabela como direta, inversa ou não proporcional:

a)
$$\begin{array}{c|ccc} x & 2 & 4 & 7 \\ \hline y & 6 & 12 & 21 \end{array};$$

b)
$$\begin{array}{c|ccc} x & 2 & 4 & 8 \\ \hline y & 24 & 12 & 6 \end{array};$$

c)
$$\begin{array}{c|ccc} x & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & 4 & 7 & 10 \end{array}.$$

- A3.** Em uma relação direta, $y = 35$ quando $x = 5$. Determine a constante e a fórmula.
- A4.** Em uma relação inversa, $y = 18$ quando $x = 4$. Determine a constante e a fórmula.
- A5.** Explique por que $y = 4x + 3$ não é diretamente proporcional a x .
- A6.** Explique por que $y = x^2$ não é proporcional a x , apesar de o gráfico passar pela origem.
- A7.** Se y é diretamente proporcional a x , descreva o efeito de multiplicar x por $3/2$.
- A8.** Se y é inversamente proporcional a x , descreva o efeito de dividir x por 4.
- A9.** Complete a tabela direta $y = 2,5x$ para $x = 0, 2, 5, 8$.
- A10.** Complete a tabela inversa $xy = 36$ para $x = 1, 2, 3, 4, 6, 9$.
- A11.** Dê um exemplo realista de proporcionalidade direta e um de inversa, indicando as hipóteses.
- A12.** Em um gráfico, que características diferenciam $y = kx$ de $y = k/x$?

15.2 Bloco B — Regra de três, partilha e escala

- B1.** Cinco metros de tecido custam R\$ 87,50. Quanto custam 8 m, mantendo o preço por metro?
- B2.** Um veículo percorre 210 km com 15 L. Quantos litros usará para 350 km, com eficiência constante?
- B3.** Doze trabalhadores concluem uma tarefa em 18 dias. Em quantos dias 27 trabalhadores a concluiriam, nas mesmas condições?
- B4.** Oito torneiras idênticas enchem um reservatório em 6 h. Quanto tempo levariam 12 torneiras?
- B5.** Divida 3600 diretamente na razão $2 : 3 : 4$.
- B6.** Divida 2100 diretamente na razão $1 : 2 : 4$.
- B7.** Divida 1800 inversamente aos números 2, 3 e 6.
- B8.** Em um mapa na escala $1 : 25\,000$, uma estrada mede 12 cm. Determine a distância real em quilômetros.
- B9.** Uma distância real de 4,8 km aparece com 16 cm em um mapa. Determine a escala numérica.
- B10.** Em uma planta $1 : 100$, uma sala mede 4,2 cm por 3,5 cm. Determine as dimensões e a área reais.
- B11.** Uma miniatura na escala $1 : 20$ tem volume de 125 cm^3 . Qual seria o volume do objeto real, em litros, supondo semelhança tridimensional?
- B12.** Um desenho amplia 0,015 mm para 30 mm. Determine a escala de ampliação.

15.3 Bloco C — Duas ou mais grandezas e aplicações

- C1. Seis máquinas produzem 2400 peças em 5 h. Quantas peças 10 máquinas produzirão em 8 h, com produtividade constante?
- C2. Quinze trabalhadores, trabalhando 8 h/dia, concluem uma obra em 12 dias. Quantos dias seriam necessários para 20 trabalhadores a 6 h/dia, nas mesmas condições?
- C3. Quatro impressoras, operando 6 h, imprimem 18 000 páginas. Quantas impressoras são necessárias para imprimir 30 000 páginas em 5 h?
- C4. Uma receita para 6 pessoas usa 450 g de arroz. Quantos quilogramas são necessários para 22 pessoas?
- C5. Um veículo a 80 km/h percorre certa distância em 3 h. Quanto tempo levaria a 96 km/h, mantendo a mesma distância?
- C6. Uma equipe distribui 960 unidades igualmente em 8 h com 6 pessoas. Quantas unidades distribuiria em 10 h com 9 pessoas, mantendo a produtividade individual?
- C7. Uma comunidade de 240 pessoas consome em média 36 000 L de água em 5 dias. Estime o consumo de 300 pessoas em 7 dias, mantendo o consumo médio por pessoa-dia.
- C8. Uma gráfica cobra R\$ 40,00 fixos mais R\$ 0,25 por página. Custo e número de páginas são diretamente proporcionais? Calcule o custo de 300 páginas.
- C9. O lado de um quadrado aumenta 20%. Determine a variação percentual do perímetro e da área.
- C10. Um cubo tem todas as arestas duplicadas. Por qual fator variam área total e volume?
- C11. Uma vazão constante enche $\frac{3}{5}$ de um tanque em 18 min. Quanto tempo é necessário para encher o tanque inteiro?
- C12. Um trem percorre 150 km em 2 h e depois 90 km em 1 h. A distância total é diretamente proporcional ao tempo total em toda a viagem? Calcule a velocidade média e discuta.

15.4 Bloco D — Análise crítica e elaboração

- D1. Um estudante afirma que toda relação crescente é diretamente proporcional. Apresente dois contraexemplos diferentes.
- D2. Outro estudante afirma que toda relação decrescente é inversamente proporcional. Apresente um contraexemplo.
- D3. Explique quando o modelo “dobrar trabalhadores reduz o tempo à metade” pode falhar.
- D4. Um mapa foi ampliado para 150% do tamanho linear original. Como muda a escala escrita $1 : n$? E como muda a área impressa?
- D5. Elabore um problema de partilha diretamente proporcional, resolva-o e verifique a soma.
- D6. Elabore um problema de escala que exija conversão de unidades.

- D7.** Crie uma tabela de cinco pares que pareça crescente, mas não seja diretamente proporcional, e justifique.
- D8.** Uma regra de três produziu resultado incompatível com a estimativa inicial. Liste três verificações que devem ser feitas.

16 Questões de aprofundamento

- P1.** Se y é diretamente proporcional a x e z é diretamente proporcional a y , prove que z é diretamente proporcional a x .
- P2.** Se y é inversamente proporcional a x e z é diretamente proporcional a y , determine a relação entre z e x .
- P3.** Prove que a soma das partes dadas pela fórmula de partilha direta é o total T .
- P4.** Uma grandeza Q é diretamente proporcional a a^2b e inversamente proporcional a c . Se a aumenta 20%, b diminui 10% e c aumenta 50%, determine o fator de variação de Q .
- P5.** Em um mapa $1 : n$, uma região desenhada tem área A_d . Demonstre que a área real, nas mesmas unidades quadradas, é $A_r = n^2 A_d$.
- P6.** Uma tarefa exige uma quantidade fixa de agente-horas. Se o número de agentes aumenta $p\%$, determine a redução percentual do tempo em função de p .

17 Avaliação-síntese

- S1.** Explique os critérios algébricos que distinguem proporcionalidade direta e inversa.
- S2.** Para cada relação, classifique e determine a constante:
- a) $y = 7x$;
 - b) $y = 48/x$;
 - c) $y = 3x + 2$.
- S3.** Nove unidades custam R\$ 126,00. Determine o custo de 14 unidades sob proporcionalidade direta.
- S4.** Quinze máquinas concluem um lote em 8 h. Quanto tempo levariam 24 máquinas idênticas?
- S5.** Sete equipes trabalham 6 dias, 5 h/dia, e produzem 4200 unidades. Quantas unidades 10 equipes produzirão em 9 dias de 4 h?
- S6.** Divida R\$ 5600,00 diretamente na razão $3 : 4 : 7$.
- S7.** Divida 2100 inversamente a 2, 4 e 8.
- S8.** Em uma escala $1 : 40\,000$, uma distância mede 9,5 cm. Determine a distância real em quilômetros.

- S9.** Um modelo na escala 1 : 50 tem área superficial de 80 cm². Determine a área correspondente real em m².
- S10.** Calcule a taxa média de variação de $y = 4x + 7$ entre $x = 2$ e $x = 9$. A relação é diretamente proporcional? Justifique.
- S11.** Um lado de uma figura semelhante é reduzido a 70%. Determine os fatores aplicados às áreas e aos volumes.
- S12.** Elabore e resolva um problema com pelo menos três grandezas, explicando quais relações são diretas ou inversas.

18 Gabarito comentado

18.1 Bloco A

A1. Direta: $y = kx$ e $y/x = k$. Inversa: $y = k/x$ e $xy = k$, com valores não nulos.

- A2.** a) direta, pois $y/x = 3$;
 b) inversa, pois $xy = 48$;
 c) não proporcional: y/x e xy variam.

A3.

$$k = \frac{35}{5} = 7, \quad y = 7x.$$

A4.

$$k = 4 \cdot 18 = 72, \quad y = \frac{72}{x}.$$

A5. O quociente $y/x = 4 + 3/x$ não é constante e $y(0) = 3 \neq 0$.

A6. Para $x \neq 0$, $y/x = x$, que varia. Passar pela origem é necessário, mas não suficiente.

A7. y também é multiplicado por 3/2.

A8. Se x é dividido por 4, y é multiplicado por 4 para conservar xy .

A9.

x	0	2	5	8
y	0	5	12,5	20

A10.

x	1	2	3	4	6	9
y	36	18	12	9	6	4

A11. Resposta possível: preço e massa, com preço unitário constante; número de máquinas e tempo para trabalho fixo, com produtividade constante.

A12. $y = kx$ é uma reta pela origem. $y = k/x$ é uma curva sem $x = 0$, com produto constante e, para $k > 0$, ramo positivo decrescente.

18.2 Bloco B

B1. O preço por metro é $87,50/5 = 17,50$. Logo,

$$8 \cdot 17,50 = R\$ 140,00.$$

B2.

$$\frac{15}{210} = \frac{x}{350} \implies x = 25 \text{ L.}$$

B3. O produto é constante:

$$12 \cdot 18 = 27d \implies d = 8 \text{ dias.}$$

B4.

$$8 \cdot 6 = 12t \implies t = 4 \text{ h.}$$

B5. A soma dos pesos é 9. As partes são

$$800, \quad 1200, \quad 1600.$$

B6. A soma dos pesos é 7. As partes são

$$300, \quad 600, \quad 1200.$$

B7. Os pesos recíprocos são $1/2$, $1/3$ e $1/6$, cuja soma é 1. As partes são

$$900, \quad 600, \quad 300.$$

B8.

$$12 \cdot 25\,000 = 300\,000 \text{ cm} = 3 \text{ km.}$$

B9. $4,8 \text{ km} = 480\,000 \text{ cm}$. Logo,

$$E = \frac{16}{480\,000} = \frac{1}{30\,000}.$$

Escala $1 : 30\,000$.

B10. As dimensões reais são $4,2 \text{ m}$ e $3,5 \text{ m}$. A área é

$$4,2 \cdot 3,5 = 14,7 \text{ m}^2.$$

B11. O fator de volume é $20^3 = 8000$:

$$V = 125 \cdot 8000 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ L.}$$

B12.

$$E = \frac{30}{0,015} = 2000.$$

Escala de ampliação $2000 : 1$.

18.3 Bloco C

C1.

$$P = 2400 \cdot \frac{10}{6} \cdot \frac{8}{5} = 6400 \text{ peças.}$$

C2. O total de trabalhador-horas é conservado:

$$15 \cdot 8 \cdot 12 = 20 \cdot 6 \cdot d.$$

Logo, $d = 12$ dias.

C3.

$$\frac{18\,000}{4 \cdot 6} = 750 \text{ páginas por impressora-hora.}$$

Para 30 000 páginas em 5 h:

$$n = \frac{30\,000}{750 \cdot 5} = 8 \text{ impressoras.}$$

C4.

$$450 \cdot \frac{22}{6} = 1650 \text{ g} = 1,65 \text{ kg.}$$

C5. A distância é $80 \cdot 3 = 240$ km. Assim,

$$t = \frac{240}{96} = 2,5 \text{ h.}$$

C6.

$$P = 960 \cdot \frac{10}{8} \cdot \frac{9}{6} = 1800 \text{ unidades.}$$

C7. O consumo é direto em pessoas e dias:

$$C = 36\,000 \cdot \frac{300}{240} \cdot \frac{7}{5} = 63\,000 \text{ L.}$$

C8. Não é diretamente proporcional por causa da taxa fixa. O custo é

$$40 + 0,25 \cdot 300 = R\$ 115,00.$$

C9. O perímetro é multiplicado por 1,2, aumento de 20%. A área é multiplicada por $1,2^2 = 1,44$, aumento de 44%.

C10. A área total é multiplicada por $2^2 = 4$ e o volume por $2^3 = 8$.

C11. Se $3/5$ exige 18 min,

$$t = 18 \cdot \frac{5}{3} = 30 \text{ min.}$$

C12. A velocidade média é

$$v_m = \frac{150 + 90}{2 + 1} = 80 \text{ km/h.}$$

A viagem inteira tem essa taxa média, mas a distância não cresceu a uma única taxa constante em todos os trechos; portanto, $d = 80t$ não descreve cada instante do percurso.

18.4 Bloco D

- D1.** Exemplos: $y = x^2$ para $x \geq 0$ e $y = 3x + 5$. Ambas crescem, mas não têm quociente y/x constante.
- D2.** Exemplo: $y = 10 - x$ em um intervalo adequado. É decrescente, mas $xy = 10x - x^2$ não é constante.
- D3.** Pode falhar por coordenação, espaço limitado, trabalho não divisível, produtividades diferentes ou etapas que dependem de outras.
- D4.** Se cada medida do mapa é multiplicada por 1,5, a escala passa de $1 : n$ para $1 : (n/1,5)$. A área impressa é multiplicada por $1,5^2 = 2,25$.
- D5.** Resposta pessoal. Deve definir total e pesos, usar $p_i = Tw_i / \sum w_i$ e verificar que a soma das partes é T .
- D6.** Resposta pessoal. Deve converter desenho e realidade para a mesma unidade antes de calcular $E = d_a/d_r$.
- D7.** Exemplo:
- $$(1, 4), (2, 7), (3, 10), (4, 13), (5, 16).$$
- É crescente, mas y/x não é constante; segue $y = 3x + 1$.
- D8.** Verificar: se o tipo direto ou inverso foi identificado corretamente; se os pares correspondentes e as unidades foram alinhados; se as operações e a ordem de grandeza são coerentes.

18.5 Questões de aprofundamento

- P1.** Se $y = ax$ e $z = by$, então

$$z = b(ax) = (ab)x.$$

Logo, z é diretamente proporcional a x .

- P2.** Se $y = a/x$ e $z = by$, então

$$z = \frac{ab}{x}.$$

Portanto, z é inversamente proporcional a x .

- P3.**

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n p_i &= \sum_{i=1}^n T \frac{w_i}{\sum_{j=1}^n w_j} \\ &= T \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{\sum_{j=1}^n w_j} = T.\end{aligned}$$

- P4.** O fator é

$$\frac{1,2^2 \cdot 0,9}{1,5} = \frac{1,296}{1,5} = 0,864.$$

Portanto, Q passa a 86,4% do valor inicial, redução de 13,6%.

- P5.** A escala linear $1 : n$ multiplica cada comprimento real por n em relação ao desenho. Assim, o fator de área é n^2 , logo

$$A_r = n^2 A_d.$$

- P6.** Se o número inicial é n e o tempo é t , nt é constante. Após o aumento, $n' = n(1 + p/100)$. Logo,

$$t' = \frac{t}{1 + p/100}.$$

A redução percentual é

$$100 \left(1 - \frac{1}{1 + p/100} \right) = \frac{100p}{100 + p} \%.$$

18.6 Avaliação-síntese

- S1.** Na direta, $y/x = k$ e $y = kx$. Na inversa, $xy = k$ e $y = k/x$, para valores não nulos.

- S2.** a) direta, $k = 7$;

b) inversa, $k = 48$;

c) não proporcional, pois há termo fixo 2.

- S3.** O preço unitário é $126/9 = 14$ reais. Portanto,

$$14 \cdot 14 = R\$ 196,00.$$

S4.

$$15 \cdot 8 = 24t \implies t = 5 \text{ h.}$$

- S5.** A produção é direta em equipes, dias e horas:

$$P = 4200 \cdot \frac{10}{7} \cdot \frac{9}{6} \cdot \frac{4}{5} = 7200 \text{ unidades.}$$

- S6.** A soma dos pesos é 14:

$$1200, \quad 1600, \quad 2800.$$

- S7.** Os pesos recíprocos são $1/2$, $1/4$ e $1/8$, cuja soma é $7/8$:

$$p_1 = 2100 \frac{1/2}{7/8} = 1200,$$

$$p_2 = 2100 \frac{1/4}{7/8} = 600, \quad p_3 = 2100 \frac{1/8}{7/8} = 300.$$

S8.

$$9,5 \cdot 40\,000 = 380\,000 \text{ cm} = 3,8 \text{ km.}$$

- S9.** O fator de área é $50^2 = 2500$:

$$80 \cdot 2500 = 200\,000 \text{ cm}^2 = 20 \text{ m}^2.$$

S10.

$$\frac{(4 \cdot 9 + 7) - (4 \cdot 2 + 7)}{9 - 2} = \frac{43 - 15}{7} = 4.$$

Não é diretamente proporcional, pois $y(0) = 7 \neq 0$.

S11. O fator linear é 0,7. Áreas são multiplicadas por $0,7^2 = 0,49$ e volumes por $0,7^3 = 0,343$.

S12. Resposta pessoal. Deve explicitar ao menos três grandezas, suas unidades, relações diretas ou inversas, hipóteses e cálculo correto.

19 Resumo final

Mapa de fórmulas essenciais

$$\begin{array}{ll} y = kx & \frac{y}{x} = k \\ y = \frac{k}{x} & xy = k \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} & ad = bc \\ p_i = T \frac{w_i}{\sum w_j} & p_i = T \frac{1/a_i}{\sum (1/a_j)} \\ E = \frac{d_{\text{desenho}}}{d_{\text{real}}} & \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \end{array}$$

- Proporcionalidade direta é caracterizada por quociente constante.
- Proporcionalidade inversa é caracterizada por produto constante.
- Regra de três só é válida depois de justificar o modelo proporcional.
- Relações com várias grandezas exigem analisar cada fator separadamente.
- Partilhas proporcionais distribuem um total por pesos explícitos.
- Escala compara medidas correspondentes na mesma unidade.
- Fator linear s produz fatores s^2 em áreas e s^3 em volumes.
- Taxa de variação constante não garante proporcionalidade direta: o gráfico também deve passar pela origem.
- Hipóteses, unidades e plausibilidade fazem parte da solução.

Referência normativa

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Matemática, 9º ano, habilidade EF09MA08. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf.