

Produtos Notáveis

Curso completo de Matemática — 9º ano do Ensino Fundamental

Alinhado à habilidade EF09MA09 da BNCC

Sumário

1	Apresentação e objetivos de aprendizagem	1
2	Fundamentos da linguagem algébrica	1
2.1	Propriedade distributiva	2
3	Igualdade, identidade e equação	3
4	Quadrado da soma de dois termos	3
4.1	Interpretação geométrica	4
5	Quadrado da diferença de dois termos	4
6	Produto da soma pela diferença	5
7	Comparação e reconhecimento dos padrões	6
8	Produto de binômios com termo comum	7
9	Operações inversas e preparação para fatoração	7
10	Simplificação de expressões	8
11	Cálculo numérico eficiente	8
12	Modelagem geométrica e aplicações	9
12.1	Variação da área de um quadrado	9
12.2	Moldura externa	9
12.3	Retângulo com lados conjugados	9
13	Equações e relações entre grandezas	10
14	Extensão: cubos de binômios	10

15 Tecnologia e investigação	11
15.1 Planilha eletrônica	11
15.2 Sistema de álgebra computacional	11
16 Erros frequentes e roteiro de resolução	11
17 Exercícios de consolidação	13
17.1 Bloco A — Conceitos e reconhecimento	13
17.2 Bloco B — Desenvolvimento e simplificação	13
17.3 Bloco C — Cálculo e aplicações	14
17.4 Bloco D — Análise crítica e elaboração	14
18 Questões de aprofundamento	14
19 Avaliação-síntese	15
20 Gabarito comentado	16
20.1 Bloco A	16
20.2 Bloco B	17
20.3 Bloco C	18
20.4 Bloco D	19
20.5 Questões de aprofundamento	19
20.6 Avaliação-síntese	20
21 Resumo final	21

1 Apresentação e objetivos de aprendizagem

Produtos notáveis são multiplicações algébricas que aparecem com frequência e possuem padrões estáveis. O objetivo não é decorar fórmulas isoladas, mas compreender por que elas são verdadeiras, quando podem ser usadas e como reconhecê-las nos dois sentidos: do produto para a soma e da soma para o produto.

Ao concluir este curso, espera-se que o estudante seja capaz de:

- aplicar corretamente a propriedade distributiva;
- distinguir expressão, igualdade, identidade e equação;
- desenvolver o quadrado da soma e o quadrado da diferença;
- desenvolver o produto da soma pela diferença;
- justificar cada identidade algebricamente e geometricamente;
- reconhecer trinômios quadrados perfeitos e diferenças de quadrados;
- desenvolver produtos do tipo $(x + p)(x + q)$;
- simplificar expressões e efetuar cálculos numéricos eficientes;
- modelar áreas e outras situações por expressões algébricas;
- identificar e corrigir erros frequentes;
- utilizar tecnologia para formular e testar conjecturas;
- preparar-se para fatoração e equações do segundo grau.

Correspondência com a BNCC

Este curso desenvolve a parte de **produtos notáveis** da habilidade **EF09MA09**, que relaciona processos algébricos de fatoração e produtos notáveis à resolução de problemas representáveis por equações polinomiais do segundo grau. A fatoração e as equações serão aprofundadas nos cursos seguintes.

2 Fundamentos da linguagem algébrica

Definição 2.1: Expressão algébrica

Uma *expressão algébrica* é formada por números, letras e operações. As letras representam números ou grandezas. Exemplos:

$$3x + 5, \quad a^2 - 2ab + b^2, \quad (m + n)(m - n).$$

Definição 2.2: Monômio, binômio e trinômio

Um *monômio* possui um único termo, como $5x^2$. Um *binômio* é uma soma algébrica de dois termos, como $x + 3$. Um *trinômio* possui três termos, como $x^2 + 6x + 9$.

Termos semelhantes

Termos que possuem a mesma parte literal, com os mesmos expoentes, podem ser reduzidos:

$$4x^2 + 7x^2 = 11x^2.$$

Por outro lado, $4x^2$ e $7x$ não são semelhantes.

2.1 Propriedade distributiva

Teorema 2.1: Propriedade distributiva

Para quaisquer números reais a , b e c ,

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{e} \quad a(b - c) = ab - ac.$$

Aplicada duas vezes, a distributiva produz a multiplicação de binômios:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Demonstração

Considerando $a + b$ como um único fator, distribuímos primeiro sobre $c + d$:

$$(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d.$$

Distribuindo novamente em cada parcela,

$$(a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd.$$

Pela comutatividade da adição, podemos escrever $ac + ad + bc + bd$.

Exemplo

$$(2x + 3)(x - 5) = 2x^2 - 10x + 3x - 15 = 2x^2 - 7x - 15.$$

Cada termo do primeiro binômio multiplica cada termo do segundo.

Sinais fazem parte dos termos

Em $(a - b)(c - d)$, os termos podem ser vistos como $a + (-b)$ e $c + (-d)$. Assim,

$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd.$$

O último termo é positivo porque $(-b)(-d) = bd$.

3 Igualdade, identidade e equação

Definição 3.1: Identidade algébrica

Uma *identidade algébrica* é uma igualdade verdadeira para todos os valores das letras para os quais as expressões estão definidas. O símbolo $\equiv$ pode ser usado para destacar esse caráter:

$$(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2.$$

Definição 3.2: Equação

Uma *equação* é uma igualdade verdadeira apenas para determinados valores da incógnita. Por exemplo,

$$(x + 1)^2 = 9$$

é verdadeira apenas quando $x = 2$ ou $x = -4$.

Teorema 3.1: Princípio da substituição

Se duas expressões são identicamente iguais, uma pode substituir a outra em qualquer cálculo, sem alterar o valor da expressão completa.

Como demonstrar uma identidade

Uma identidade não é demonstrada testando alguns números. É necessário partir de um dos membros e, por propriedades válidas, transformá-lo no outro. Testes numéricos ajudam a descobrir erros, mas não substituem a demonstração.

4 Quadrado da soma de dois termos

Teorema 4.1: Quadrado da soma

Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Demonstração algébrica

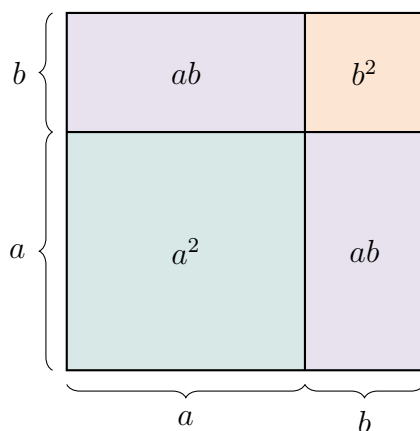
Pela definição de quadrado e pela propriedade distributiva,

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2.\end{aligned}$$

Usamos $ab = ba$ para reunir os dois termos centrais.

4.1 Interpretação geométrica

Para $a > 0$ e $b > 0$, um quadrado de lado $a + b$ pode ser decomposto em um quadrado de área a^2 , dois retângulos de área ab e um quadrado de área b^2 .



Logo,

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Exemplo

$$(3x + 2)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(2) + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4.$$

É essencial elevar cada termo ao quadrado e calcular o dobro do produto.

O erro mais frequente

Em geral,

$$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2.$$

O termo $2ab$ representa as duas regiões retangulares da decomposição. Por exemplo, $(2 + 3)^2 = 25$, enquanto $2^2 + 3^2 = 13$.

5 Quadrado da diferença de dois termos

Teorema 5.1: Quadrado da diferença

Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$,

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Demonstração

Escrevendo $a - b = a + (-b)$ e aplicando o quadrado da soma,

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= [a + (-b)]^2 \\ &= a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2.\end{aligned}$$

Também se pode aplicar a distributiva diretamente a $(a - b)(a - b)$.

Exemplo

$$(2x - 5)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(5) + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25.$$

O último termo é positivo, pois $(-5)^2 = 25$.

Teorema 5.2: Não negatividade do quadrado

Para todo $u \in \mathbb{R}$,

$$u^2 \geq 0.$$

Em particular, $(a - b)^2 \geq 0$, com igualdade se, e somente se, $a = b$.

Consequência útil

Como $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$, obtemos

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Essa desigualdade será usada em uma questão de aprofundamento.

6 Produto da soma pela diferença

Definição 6.1: Binômios conjugados

Os binômios $a + b$ e $a - b$ são chamados *conjugados*: possuem os mesmos termos e diferem apenas pelo sinal entre eles.

Teorema 6.1: Produto de binômios conjugados

Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$,

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Demonstração

Pela propriedade distributiva,

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Os termos $-ab$ e $+ab$ são opostos e sua soma é zero.

Exemplo

$$(4x + 3)(4x - 3) = (4x)^2 - 3^2 = 16x^2 - 9.$$

Nome da expressão resultante

A expressão $a^2 - b^2$ é chamada *diferença de dois quadrados*. A ordem é importante: soma de quadrados, $a^2 + b^2$, não resulta desse produto nos números reais.

7 Comparação e reconhecimento dos padrões

Padrão	Identidade	Sinais característicos
Quadrado da soma	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	três termos positivos se $a, b > 0$
Quadrado da diferença	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	termo central negativo
Soma pela diferença	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	apenas dois termos

Teorema 7.1: Critério do trinômio quadrado perfeito

Uma expressão da forma

$$A^2 \pm 2AB + B^2$$

é o quadrado perfeito $(A \pm B)^2$. Portanto, para reconhecer o padrão:

1. o primeiro e o terceiro termos devem ser quadrados;
2. o termo central deve ser o dobro do produto de suas bases;
3. o sinal central determina soma ou diferença no binômio.

Exemplo

Em $9x^2 - 24xy + 16y^2$, temos

$$9x^2 = (3x)^2, \quad 16y^2 = (4y)^2$$

e

$$-24xy = -2(3x)(4y).$$

Logo,

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 = (3x - 4y)^2.$$

Extremos quadrados não bastam

$x^2 + 5x + 4$ começa e termina com quadrados, mas não é o quadrado de $x + 2$, pois o termo central de $(x + 2)^2$ seria $4x$, não $5x$.

8 Produto de binômios com termo comum

Teorema 8.1: Produto $(x + p)(x + q)$

Para quaisquer $x, p, q \in \mathbb{R}$,

$$(x + p)(x + q) = x^2 + (p + q)x + pq.$$

Demonstração

$$(x + p)(x + q) = x^2 + qx + px + pq = x^2 + (p + q)x + pq.$$

O coeficiente de x é a soma de p e q ; o termo constante é o produto.

Exemplo

$$(x + 3)(x + 8) = x^2 + 11x + 24,$$

$$(x - 4)(x + 9) = x^2 + 5x - 36,$$

$$(x - 2)(x - 5) = x^2 - 7x + 10.$$

Relação com os quadrados

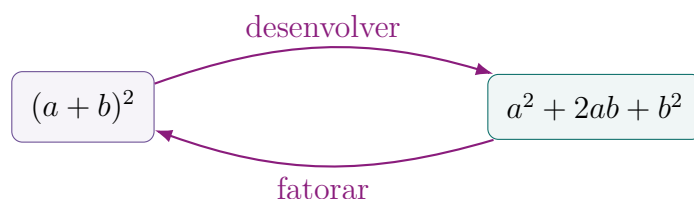
Se $p = q$, então

$$(x + p)(x + p) = x^2 + 2px + p^2 = (x + p)^2.$$

Assim, o quadrado da soma é um caso particular do produto com termo comum.

9 Operações inversas e preparação para fatoração

Desenvolver significa transformar um produto em soma algébrica. Fatorar significa realizar o caminho inverso, escrevendo uma soma como produto.



Teorema 9.1: Leituras inversas fundamentais

As identidades podem ser lidas da direita para a esquerda:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2,$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Exemplo

$$25x^2 - 49 = (5x)^2 - 7^2 = (5x + 7)(5x - 7).$$

Essa leitura será aprofundada no curso de fatoração.

10 Simplificação de expressões

Produtos notáveis ajudam a reduzir expressões sem executar multiplicações desnecessárias.

Teorema 10.1: Soma e diferença de quadrados de binômios

Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(a + b)^2 + (a - b)^2 &= 2a^2 + 2b^2, \\ (a + b)^2 - (a - b)^2 &= 4ab.\end{aligned}$$

Demonstração

Substituindo os produtos notáveis,

$$\begin{aligned}(a + b)^2 + (a - b)^2 &= (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2) \\ &= 2a^2 + 2b^2,\end{aligned}$$

pois os termos $2ab$ e $-2ab$ se cancelam. Analogamente,

$$\begin{aligned}(a + b)^2 - (a - b)^2 &= (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2) \\ &= 4ab.\end{aligned}$$

Parênteses precedidos de sinal negativo

Ao subtrair uma expressão, todos os sinais internos devem ser trocados:

$$-(a^2 - 2ab + b^2) = -a^2 + 2ab - b^2.$$

11 Cálculo numérico eficiente

Quadrado próximo de uma base redonda

$$101^2 = (100 + 1)^2 = 10000 + 200 + 1 = 10201.$$

Produto de números equidistantes

$$53 \cdot 47 = (50 + 3)(50 - 3) = 50^2 - 3^2 = 2500 - 9 = 2491.$$

Teorema 11.1: Produto de números simétricos

Para um centro c e um afastamento d ,

$$(c + d)(c - d) = c^2 - d^2.$$

Logo, números equidistantes de um centro podem ser multiplicados calculando a diferença entre dois quadrados.

Estimativa como controle

Antes de aceitar o resultado, estime sua ordem de grandeza. Como $53 \cdot 47$ é próximo de $50 \cdot 50 = 2500$, o valor 2491 é plausível; 24910 não seria.

12 Modelagem geométrica e aplicações

12.1 Variação da área de um quadrado

Se o lado de um quadrado passa de x para $x + t$, a área aumenta de

$$(x + t)^2 - x^2 = 2xt + t^2.$$

O aumento não é apenas t^2 : há duas faixas retangulares de área xt .

Exemplo

Um jardim quadrado de lado x metros tem o lado ampliado em 3 m. A nova área é

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9,$$

e o aumento é $6x + 9$ metros quadrados.

12.2 Moldura externa

Se uma moldura de largura t é colocada ao redor de um quadrado de lado x , o lado externo mede $x + 2t$. A área da moldura é

$$\begin{aligned}(x + 2t)^2 - x^2 &= x^2 + 4xt + 4t^2 - x^2 \\ &= 4xt + 4t^2.\end{aligned}$$

12.3 Retângulo com lados conjugados

Um retângulo de lados $x + d$ e $x - d$ possui área

$$(x + d)(x - d) = x^2 - d^2.$$

Embora a soma dos lados seja $2x$, a área é menor que x^2 por d^2 .

13 Equações e relações entre grandezas

As identidades permitem transformar equações em formas mais simples.

Exemplo

Resolver

$$(x + 3)^2 - (x - 3)^2 = 60.$$

Pelo teorema das combinações,

$$4 \cdot x \cdot 3 = 60,$$

logo $12x = 60$ e $x = 5$.

Teorema 13.1: Recuperação de soma de quadrados

Se os valores de $a + b$ e ab são conhecidos, então

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab.$$

Se os valores de $a - b$ e ab são conhecidos, então

$$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab.$$

Exemplo

Se $a + b = 10$ e $ab = 21$, então

$$a^2 + b^2 = 10^2 - 2 \cdot 21 = 100 - 42 = 58.$$

Não foi necessário determinar separadamente a e b .

14 Extensão: cubos de binômios

Os cubos não são o núcleo obrigatório deste curso, mas revelam como os mesmos princípios geram novos padrões.

Teorema 14.1: Cubo da soma e cubo da diferença

Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$,

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Demonstração

Multiplicamos o quadrado da soma por $a + b$:

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) \\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

Substituindo b por $-b$, obtemos a fórmula do cubo da diferença.

Coeficientes

Os coeficientes 1, 3, 3, 1 aparecem na quarta linha do triângulo de Pascal. Esse padrão será estudado com mais profundidade no Ensino Médio.

15 Tecnologia e investigação

15.1 Planilha eletrônica

Em uma planilha, insira valores de a e b nas células A2 e B2. Compare:

Célula	Fórmula
C2	$=(A2+B2)^2$
D2	$=A2^2+2*A2*B2+B2^2$
E2	$=C2-D2$

Para entradas numéricas exatas, E2 deve resultar em zero.

15.2 Sistema de álgebra computacional

Ferramentas digitais podem desenvolver expressões simbolicamente. Entretanto, o estudante deve ser capaz de prever a estrutura do resultado e conferir coeficientes e sinais. Tecnologia é instrumento de investigação, não substituição da justificativa.

Conjectura por padrões

Calcule $(x+1)^2$, $(x+2)^2$, $(x+3)^2$ e $(x+4)^2$. Observe a sequência dos coeficientes do termo em x e dos termos constantes. Formule uma conjectura para $(x+n)^2$ e demonstre-a pela distributiva.

16 Erros frequentes e roteiro de resolução

Erros frequentes

- Omitir o termo central: $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$.
- Trocar o sinal do último termo: $(a-b)^2$ termina em $+b^2$.
- Esquecer o fator 2 no termo central.
- Calcular $(3x)^2$ como $3x^2$ em vez de $9x^2$.
- Usar diferença de quadrados em $a^2 + b^2$.
- Reconhecer um trinômio quadrado perfeito sem conferir o termo central.

- Reduzir termos não semelhantes.
- Trocar sinais incorretamente ao retirar parênteses.

Roteiro seguro

1. Identifique a estrutura da expressão.
2. Nomeie os termos que ocupam os papéis de a e b .
3. Escreva a identidade antes de substituir.
4. Calcule quadrados, dobro do produto e sinais separadamente.
5. Reúna somente termos semelhantes.
6. Teste um valor simples, como $x = 0$ ou $x = 1$, para conferir.
7. Verifique se o resultado é coerente com o grau da expressão.

17 Exercícios de consolidação

17.1 Bloco A — Conceitos e reconhecimento

- A1. Desenvolva $(x + 5)^2$.
- A2. Desenvolva $(a - 7)^2$.
- A3. Desenvolva $(3y + 2)^2$.
- A4. Desenvolva $(2m - 5)^2$.
- A5. Desenvolva $(p + q)(p - q)$.
- A6. Desenvolva $(4x + 3)(4x - 3)$.
- A7. Reconheça como quadrado perfeito: $x^2 + 14x + 49$.
- A8. Reconheça como quadrado perfeito: $9a^2 - 24ab + 16b^2$.
- A9. Escreva $25m^2 - n^2$ como produto.
- A10. Complete: $(2x + \square)^2 = 4x^2 + 12x + 9$.
- A11. Julgue e justifique: $(a - b)^2 = a^2 - b^2$ para todos os reais.
- A12. Classifique como identidade ou não identidade:
- a) $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$;
 - b) $(x + 2)^2 = x^2 + 4$;
 - c) $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$.

17.2 Bloco B — Desenvolvimento e simplificação

- B1. Desenvolva $(x + 3)(x + 8)$.
- B2. Desenvolva $(y - 4)(y + 9)$.
- B3. Desenvolva $(2x + 1)(2x + 7)$.
- B4. Desenvolva $(3a - 2)(3a - 5)$.
- B5. Simplifique $(x + 4)^2 - (x - 4)^2$.
- B6. Simplifique $(2y + 3)^2 + (2y - 3)^2$.
- B7. Simplifique $(a + b)^2 + (a - b)^2$.
- B8. Simplifique $(a + b)^2 - (a - b)^2$.
- B9. Simplifique $(x + 2)^2 - (x + 2)(x - 2)$.
- B10. Simplifique $(3x + 1)^2 - (3x - 1)^2$.
- B11. Simplifique $x^2 + 6x + 9 - (x + 3)(x - 3)$.
- B12. Determine $c > 0$ para que $(x + c)^2 = x^2 + 10x + 25$.

17.3 Bloco C — Cálculo e aplicações

- C1. Calcule mentalmente 101^2 .
- C2. Calcule mentalmente 998^2 .
- C3. Calcule $53 \cdot 47$ usando um produto notável.
- C4. Calcule $1003 \cdot 997$ usando um produto notável.
- C5. Obtenha 50^2 a partir de $(49 + 1)^2$.
- C6. Calcule $73^2 - 27^2$ sem calcular separadamente os quadrados.
- C7. O lado de um jardim quadrado passa de x para $x + 3$ metros. Determine a nova área e o aumento de área.
- C8. Um retângulo possui lados $x + 5$ e $x - 5$. Determine sua área.
- C9. Uma faixa de largura 1 m é construída externamente ao redor de um quadrado de lado x . Determine a área da faixa.
- C10. Mostre que o produto dos números ímpares consecutivos $2n - 1$ e $2n + 1$ é uma unidade menor que um quadrado perfeito.
- C11. O lado de um quadrado aumenta 2%. Qual é o aumento percentual exato de sua área?
- C12. Calcule mentalmente $199 \cdot 201$.

17.4 Bloco D — Análise crítica e elaboração

- D1. Um aluno escreveu $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 9$. Identifique e corrija o erro.
- D2. Verifique se $4x^2 + 12x + 9$ é um trinômio quadrado perfeito.
- D3. Determine $k > 0$ para que $x^2 + kx + 36$ seja o quadrado de um binômio com termos positivos.
- D4. Complete: $9x^2 - \square x + 25 = (3x - 5)^2$.
- D5. Compare 1001^2 e $1000 \cdot 1002$ sem efetuar as multiplicações usuais.
- D6. Crie e demonstre uma identidade para $(n + 1)^2 + (n - 1)^2$.
- D7. Explique geometricamente por que aparece $2ab$ em $(a + b)^2$.
- D8. Elabore um problema de área resolvido por $(x + 4)^2$ e apresente a solução algébrica.

18 Questões de aprofundamento

- P1. Demonstre $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$ usando apenas distributividade, comutatividade e associatividade.
- P2. Sabendo que $a + b = 10$ e $ab = 21$, determine $a^2 + b^2$.

- P3.** Sabendo que $a - b = 5$ e $ab = 6$, determine $a^2 + b^2$.
- P4.** Se $a + b = S$ é fixo, demonstre que $ab \leq S^2/4$ e indique quando ocorre a igualdade.
- P5.** Demonstre que o quadrado de todo número inteiro ímpar deixa resto 1 na divisão por 8.
- P6.** Deduza a fórmula de $(a + b)^3$ a partir do quadrado da soma e explique a origem dos coeficientes 1, 3, 3, 1.

19 Avaliação-síntese

- S1.** Desenvolva $(5x + 2)^2$.
- S2.** Desenvolva $(4a - 3b)^2$.
- S3.** Desenvolva $(7m + n)(7m - n)$.
- S4.** Escreva $x^2 - 18x + 81$ como quadrado de um binômio.
- S5.** Desenvolva $(x + 6)(x - 2)$.
- S6.** Simplifique $(x + 5)^2 - (x^2 + 10x)$.
- S7.** Calcule 97^2 usando produto notável.
- S8.** Calcule $52 \cdot 48$ usando produto notável.
- S9.** Um terreno quadrado tem lado $3x + 2$. Escreva a expressão polinomial de sua área.
- S10.** Determine k para que $16x^2 + kx + 25 = (4x + 5)^2$.
- S11.** Resolva $(x + 3)^2 - (x - 3)^2 = 60$.
- S12.** Um retângulo tem lados $t + 4$ e $t - 4$ e área 84. Sabendo que $t > 4$, determine t e as dimensões do retângulo.

20 Gabarito comentado

20.1 Bloco A

A1.

$$(x + 5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25.$$

A2.

$$(a - 7)^2 = a^2 - 14a + 49.$$

A3.

$$(3y + 2)^2 = 9y^2 + 12y + 4.$$

A4.

$$(2m - 5)^2 = 4m^2 - 20m + 25.$$

A5. São conjugados:

$$(p + q)(p - q) = p^2 - q^2.$$

A6.

$$(4x + 3)(4x - 3) = (4x)^2 - 3^2 = 16x^2 - 9.$$

A7. Os extremos são x^2 e 7^2 , e $14x = 2 \cdot x \cdot 7$:

$$x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2.$$

A8. Como $9a^2 = (3a)^2$, $16b^2 = (4b)^2$ e $-24ab = -2(3a)(4b)$,

$$9a^2 - 24ab + 16b^2 = (3a - 4b)^2.$$

A9. É uma diferença de quadrados:

$$25m^2 - n^2 = (5m + n)(5m - n).$$

A10. O termo constante é $\square^2 = 9$, com valor positivo 3; além disso, $2(2x)(3) = 12x$. Portanto, $\square = 3$.

A11. Falsa. O desenvolvimento correto é

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Por exemplo, para $a = 3$ e $b = 1$, o lado esquerdo vale 4 e $a^2 - b^2 = 8$.

A12. a) identidade, pelo quadrado da soma;

b) não identidade: falta o termo $4x$;

c) identidade, pelo produto de conjugados.

20.2 Bloco B

B1.

$$(x+3)(x+8) = x^2 + (3+8)x + 3 \cdot 8 = x^2 + 11x + 24.$$

B2.

$$(y-4)(y+9) = y^2 + 5y - 36.$$

B3. Pela distributiva,

$$(2x+1)(2x+7) = 4x^2 + 14x + 2x + 7 = 4x^2 + 16x + 7.$$

B4.

$$(3a-2)(3a-5) = 9a^2 - 15a - 6a + 10 = 9a^2 - 21a + 10.$$

B5. Pela diferença entre quadrados de binômios,

$$(x+4)^2 - (x-4)^2 = 4 \cdot x \cdot 4 = 16x.$$

B6.

$$\begin{aligned}(2y+3)^2 + (2y-3)^2 &= 2(2y)^2 + 2(3)^2 \\ &= 8y^2 + 18.\end{aligned}$$

B7.

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

B8.

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab.$$

B9.

$$\begin{aligned}(x+2)^2 - (x+2)(x-2) &= x^2 + 4x + 4 - (x^2 - 4) \\ &= 4x + 8.\end{aligned}$$

B10.

$$(3x+1)^2 - (3x-1)^2 = 4(3x)(1) = 12x.$$

B11. Reconhecendo $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$,

$$\begin{aligned}(x+3)^2 - (x+3)(x-3) &= x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 9) \\ &= 6x + 18.\end{aligned}$$

B12. Comparando o termo central, $2cx = 10x$, portanto $c = 5$. De fato, $c^2 = 25$.

20.3 Bloco C

C1.

$$101^2 = (100 + 1)^2 = 10000 + 200 + 1 = 10201.$$

C2.

$$998^2 = (1000 - 2)^2 = 1000000 - 4000 + 4 = 996004.$$

C3.

$$53 \cdot 47 = (50 + 3)(50 - 3) = 2500 - 9 = 2491.$$

C4.

$$1003 \cdot 997 = (1000 + 3)(1000 - 3) = 1000000 - 9 = 999991.$$

C5.

$$50^2 = (49 + 1)^2 = 49^2 + 2 \cdot 49 + 1 = 2401 + 98 + 1 = 2500.$$

C6.

$$73^2 - 27^2 = (73 + 27)(73 - 27) = 100 \cdot 46 = 4600.$$

C7. A nova área é

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9.$$

Subtraindo a área antiga x^2 , o aumento é $6x + 9 \text{ m}^2$.

C8.

$$A = (x + 5)(x - 5) = x^2 - 25.$$

Geometricamente, é necessário $x > 5$ para que ambos os lados sejam positivos.

C9. A faixa aumenta cada dimensão em 2 m, pois há 1 m de cada lado:

$$A_{\text{faixa}} = (x + 2)^2 - x^2 = 4x + 4.$$

C10.

$$(2n - 1)(2n + 1) = (2n)^2 - 1 = 4n^2 - 1.$$

Portanto, o produto é uma unidade menor que o quadrado $(2n)^2$.

C11. O fator linear é 1,02. O fator de área é

$$(1,02)^2 = 1,0404.$$

Assim, o aumento exato é 4,04%.

C12.

$$199 \cdot 201 = (200 - 1)(200 + 1) = 40000 - 1 = 39999.$$

20.4 Bloco D

D1. O aluno omitiu o dobro do produto. O correto é

$$(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9.$$

D2. Sim. Os extremos são $(2x)^2$ e 3^2 , e o termo central é $2(2x)(3) = 12x$. Logo,

$$4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2.$$

D3. Como $36 = 6^2$ e o binômio tem termos positivos,

$$(x + 6)^2 = x^2 + 12x + 36.$$

Portanto, $k = 12$.

D4.

$$(3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25.$$

O número que completa a lacuna é 30.

D5. Como $1000 \cdot 1002 = (1001 - 1)(1001 + 1) = 1001^2 - 1$, concluímos que 1001^2 é uma unidade maior.

D6. Desenvolvendo,

$$\begin{aligned}(n + 1)^2 + (n - 1)^2 &= (n^2 + 2n + 1) + (n^2 - 2n + 1) \\ &= 2n^2 + 2.\end{aligned}$$

D7. O quadrado de lado $a + b$ contém dois retângulos distintos: um de lados a e b acima do quadrado a^2 , e outro com os mesmos lados ao lado dele. Suas áreas somam $ab + ab = 2ab$.

D8. Resposta pessoal. Exemplo: “Um pátio quadrado de lado x recebe uma ampliação de 4 m em cada lado. Qual é a nova área?” A solução é

$$(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16.$$

20.5 Questões de aprofundamento

P1.

$(u + v)^2 = (u + v)(u + v)$	definição de quadrado
$= u(u + v) + v(u + v)$	distributividade
$= u^2 + uv + vu + v^2$	distributividade
$= u^2 + uv + uv + v^2$	comutatividade
$= u^2 + 2uv + v^2.$	associatividade

P2.

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 10^2 - 42 = 58.$$

P3. De $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,

$$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab = 25 + 12 = 37.$$

P4. Como $(a - b)^2 \geq 0$,

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0.$$

Somando $4ab$ aos dois lados,

$$(a + b)^2 \geq 4ab.$$

Como $a + b = S$, segue que $S^2 \geq 4ab$, isto é,

$$ab \leq \frac{S^2}{4}.$$

A igualdade ocorre exatamente quando $(a - b)^2 = 0$, ou seja, quando $a = b = S/2$.

P5. Todo inteiro ímpar pode ser escrito como $2k + 1$. Então

$$(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1.$$

Entre k e $k + 1$, um é par; logo, $k(k + 1) = 2q$ para algum inteiro q . Portanto,

$$(2k + 1)^2 = 8q + 1,$$

que deixa resto 1 na divisão por 8.

P6.

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)^2(a + b) \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) \\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

O coeficiente 3 surge de três parcelas iguais a^2b e, depois, de três parcelas iguais ab^2 .

20.6 Avaliação-síntese

S1.

$$(5x + 2)^2 = 25x^2 + 20x + 4.$$

S2.

$$(4a - 3b)^2 = 16a^2 - 24ab + 9b^2.$$

S3.

$$(7m + n)(7m - n) = 49m^2 - n^2.$$

S4. Como $81 = 9^2$ e $-18x = -2 \cdot x \cdot 9$,

$$x^2 - 18x + 81 = (x - 9)^2.$$

S5.

$$(x + 6)(x - 2) = x^2 + 4x - 12.$$

S6.

$$(x + 5)^2 - (x^2 + 10x) = x^2 + 10x + 25 - x^2 - 10x = 25.$$

S7.

$$97^2 = (100 - 3)^2 = 10000 - 600 + 9 = 9409.$$

S8.

$$52 \cdot 48 = (50 + 2)(50 - 2) = 2500 - 4 = 2496.$$

S9.

$$A = (3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4.$$

S10.

$$(4x + 5)^2 = 16x^2 + 40x + 25,$$

portanto $k = 40$.

S11.

$$(x + 3)^2 - (x - 3)^2 = 4 \cdot x \cdot 3 = 12x.$$

Assim, $12x = 60$ e $x = 5$.

S12. Pela diferença de quadrados,

$$(t + 4)(t - 4) = t^2 - 16 = 84.$$

Logo, $t^2 = 100$. Como $t > 4$, temos $t = 10$. As dimensões são $t + 4 = 14$ e $t - 4 = 6$; de fato, $14 \cdot 6 = 84$.

21 Resumo final

Mapa de fórmulas essenciais

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\(a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, \\(a + b)(a - b) &= a^2 - b^2, \\(x + p)(x + q) &= x^2 + (p + q)x + pq, \\(a + b)^2 + (a - b)^2 &= 2a^2 + 2b^2, \\(a + b)^2 - (a - b)^2 &= 4ab, \\(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

- Todo produto notável decorre da propriedade distributiva.
- O termo central do quadrado de um binômio é o dobro do produto.
- O quadrado da diferença termina com um termo positivo.
- Binômios conjugados produzem uma diferença de quadrados.
- Reconhecer padrões exige conferir termos, coeficientes e sinais.
- Identidades podem ser usadas nos dois sentidos.
- Cálculos próximos de números redondos podem ser abreviados com segurança.

- A interpretação geométrica explica os termos das identidades.
- Produtos notáveis preparam o estudo de fatoração e equações quadráticas.

Referência normativa

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Matemática, 9º ano, habilidade EF09MA09. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.

Fim do curso — Produtos Notáveis