

Funções: Representações Numérica, Algébrica e Gráfica

Curso completo de Matemática — 9º ano do Ensino Fundamental

Alinhado à habilidade EF09MA06 da BNCC

Sumário

1	Apresentação e objetivos de aprendizagem	1
2	Grandezas, variáveis e relações	2
2.1	Grandezas constantes e variáveis	2
2.2	Variável independente e variável dependente	2
2.3	Pares ordenados e relações	3
3	O conceito de função	3
3.1	Dependência unívoca	3
3.2	O que significa $f(x)$	4
4	Domínio, contradomínio e imagem	5
4.1	Domínio fornecido e domínio natural	6
4.2	Igualdade de funções	6
5	Cinco representações de uma função	6
5.1	Representação verbal	6
5.2	Representação numérica por tabela	7
5.3	Representação algébrica	7
5.4	Diagrama de correspondência	7
5.5	Representação gráfica	7
6	O gráfico de uma função	9
6.1	Definição e construção	9
6.2	O teste da reta vertical	10
6.3	Gráficos discretos e contínuos	10
7	Leitura e análise de gráficos	11
7.1	Valores, zeros e interseções	11

7.2	Crescimento, decrescimento e constância	11
7.3	Máximos e mínimos	12
7.4	Taxa média de variação	12
8	Funções de proporcionalidade direta	13
9	Funções afins	14
9.1	Determinação da lei por dois pontos	15
10	Modelos não lineares introdutórios	15
10.1	Modelo quadrático	16
10.2	Proporcionalidade inversa	16
10.3	Outros modelos	17
11	Da tabela para a fórmula	17
11.1	Reconhecimento de padrões	17
11.2	Tabela proporcional	18
11.3	Tabela afim	18
11.4	Tabela de proporcionalidade inversa	18
12	Modelagem de situações-problema	19
12.1	Conversão de temperatura	19
12.2	Consumo de combustível	19
12.3	Geometria	20
12.4	Comparação de planos	20
13	Tecnologia, planilhas e investigação	21
13.1	Construção de tabela em uma planilha	21
13.2	Janela gráfica e escala	21
14	Erros frequentes e critérios de validação	22
15	Exercícios de consolidação	23
15.1	Bloco A — Conceitos e notação	23
15.2	Bloco B — Tabelas, fórmulas e gráficos	24
15.3	Bloco C — Aplicações e modelagem	25
15.4	Bloco D — Análise crítica e elaboração	26

16 Questões de aprofundamento	26
17 Avaliação-síntese	27
18 Gabarito comentado	27
18.1 Bloco A	27
18.2 Bloco B	28
18.3 Bloco C	29
18.4 Bloco D	30
18.5 Questões de aprofundamento	30
18.6 Avaliação-síntese	31
19 Resumo final	32

1 Apresentação e objetivos de aprendizagem

Uma quantidade frequentemente depende de outra: a distância percorrida depende do tempo; o valor de uma corrida pode depender da distância; a área de um quadrado depende da medida do lado. O conceito de função organiza relações desse tipo e permite descrevê-las por palavras, tabelas, fórmulas, diagramas e gráficos.

Ao concluir este curso, espera-se que o estudante seja capaz de:

- identificar grandezas variáveis e relações de dependência;
- distinguir uma relação qualquer de uma relação funcional;
- reconhecer variável independente e variável dependente;
- compreender domínio, contradomínio, imagem e lei de formação;
- calcular valores de uma função e interpretar a notação $f(x)$;
- converter uma representação verbal em tabela, fórmula ou gráfico;
- construir e interpretar gráficos no plano cartesiano;
- analisar crescimento, decréscimo, constância, zeros e sinais;
- reconhecer modelos proporcionais, afins e não lineares simples;
- obter leis de formação a partir de dados e condições;
- utilizar funções para resolver problemas e comparar alternativas;
- validar modelos, unidades de medida e restrições do contexto;
- empregar calculadoras, planilhas e recursos digitais de modo crítico.

Correspondência com a BNCC

Este curso desenvolve principalmente a habilidade **EF09MA06**: compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica, utilizando esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

Escopo do curso

O objetivo central não é decorar famílias de fórmulas, mas compreender a ideia de dependência unívoca e transitar entre representações. Funções afins, quadráticas e inversamente proporcionais aparecem como modelos introdutórios, adequados ao 9º ano.

2 Grandezas, variáveis e relações

2.1 Grandezas constantes e variáveis

Definição 2.1: Grandeza

Uma *grandeza* é uma característica que pode ser medida ou contada. Tempo, comprimento, massa, temperatura, custo, quantidade de objetos e área são exemplos de grandezas.

Definição 2.2: Constante e variável

Em uma situação determinada:

- uma *constante* mantém o mesmo valor;
- uma *variável* pode assumir valores diferentes.

Uma letra pode representar uma variável, mas a letra não é a própria grandeza: é apenas o símbolo escolhido para representá-la.

Perímetro de um quadrado

Se l é a medida do lado e P é o perímetro, então

$$P = 4l.$$

As grandezas l e P variam, enquanto o número 4 é constante. Escolhido um valor para l , o perímetro fica determinado.

2.2 Variável independente e variável dependente

Definição 2.3: Variáveis independente e dependente

Em uma relação de dependência:

- a *variável independente* é aquela cujos valores são escolhidos ou controlados dentro das condições do problema;
- a *variável dependente* é calculada ou observada a partir da variável independente.

Exemplo

Em $P = 4l$, normalmente l é a variável independente e P é a variável dependente. Se $l = 3,5$ cm, então

$$P = 4 \cdot 3,5 = 14 \text{ cm.}$$

O contexto determina os papéis

A mesma relação pode ser lida em sentido diferente. De $P = 4l$, também se pode escrever $l = P/4$. Se o perímetro for fornecido e o lado for procurado, P passa a desempenhar o papel de variável independente naquela análise.

2.3 Pares ordenados e relações

Definição 2.4: Par ordenado

Um par ordenado (x, y) registra dois valores em uma ordem determinada. Em geral, o primeiro valor representa a variável independente e o segundo, a variável dependente. Os pares $(2, 5)$ e $(5, 2)$ são diferentes, pois a ordem dos elementos importa.

Definição 2.5: Relação entre dois conjuntos

Dados conjuntos A e B , uma *relação de A em B* é qualquer coleção de pares ordenados (x, y) em que $x \in A$ e $y \in B$.

Exemplo

Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$, então

$$R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$$

é uma relação de A em B . Ela expressa a regra “o segundo número é o dobro do primeiro”.

3 O conceito de função

3.1 Dependência unívoca

Definição 3.1: Função

Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma *função f de A em B* é uma regra que associa a **cada** elemento $x \in A$ **exatamente um** elemento $y \in B$.

Escreve-se

$$f: A \longrightarrow B, \quad x \longmapsto y = f(x).$$

A expressão “exatamente um” caracteriza a *dependência unívoca*.

Para verificar se uma relação de A em B é função, são necessárias duas condições:

1. **existência:** todo elemento de A deve ter uma imagem em B ;
2. **unicidade:** cada elemento de A deve ter somente uma imagem.

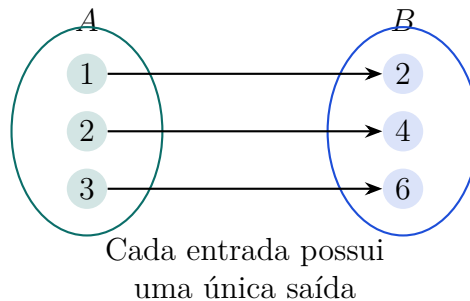
Teorema 3.1: Critério dos primeiros elementos

Uma relação de A em B , descrita por pares ordenados, é função se, e somente se, cada elemento de A aparece exatamente uma vez como primeiro elemento dos pares, admitindo-se repetição no segundo elemento.

Demonstração

Se a relação é função, todo $x \in A$ possui uma imagem, portanto aparece como primeiro elemento de algum par. Como a imagem é única, x não pode aparecer associado a

dois segundos elementos diferentes. Reciprocamente, se cada elemento de A aparece exatamente uma vez como primeiro elemento, então cada $x \in A$ está associado a um único $y \in B$; logo, a relação é função.



Relação que é função

De $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ em $B = \{0, 1, 4\}$, considere

$$f = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}.$$

Todo elemento de A aparece e possui uma única imagem. É permitido que -1 e 1 tenham a mesma imagem, pois uma função pode associar entradas diferentes à mesma saída.

Relações que não são funções

Considere $A = \{1, 2, 3\}$.

- $R = \{(1, 4), (1, 5), (2, 6), (3, 7)\}$ não é função, pois a entrada 1 possui duas saídas.
- $S = \{(1, 4), (2, 6)\}$ não é função de A em outro conjunto, pois a entrada 3 não possui saída.

Uma entrada, uma saída

Uma função não proíbe que entradas diferentes tenham a mesma saída. A proibição é outra: uma mesma entrada não pode produzir duas saídas diferentes.

3.2 O que significa $f(x)$

Imagem de um elemento

O símbolo $f(x)$ lê-se “ f de x ” e indica a imagem de x pela função f . Não se trata, em geral, de uma multiplicação entre f e x .

Exemplo

Para $f(x) = 3x - 2$:

$$f(0) = -2, \quad f(4) = 3 \cdot 4 - 2 = 10, \quad f(-2) = 3(-2) - 2 = -8.$$

Além disso,

$$f(a) = 3a - 2 \quad \text{e} \quad f(a + 1) = 3(a + 1) - 2 = 3a + 1.$$

Substituição completa

Em $f(x) = x^2 - 3x$, para calcular $f(-2)$, substitui-se *cada ocorrência* de x por -2 :

$$f(-2) = (-2)^2 - 3(-2) = 4 + 6 = 10.$$

Os parênteses evitam erros de sinal.

4 Domínio, contradomínio e imagem

Definição 4.1: Domínio, contradomínio e imagem

Em uma função $f: A \rightarrow B$:

- A é o *domínio*, conjunto das entradas permitidas;
- B é o *contradomínio*, conjunto no qual as saídas são procuradas;
- a *imagem* é o conjunto dos valores de B que efetivamente são produzidos.

Em símbolos,

$$\text{Dom}(f) = A, \quad \text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in A\}, \quad \text{Im}(f) \subseteq B.$$

Exemplo

Se $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ é dada por $f(x) = x^2$, então

$$\text{Dom}(f) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \quad \text{Im}(f) = \{0, 1, 4\}.$$

Os números 2, 3 e 5 pertencem ao contradomínio, mas não à imagem.

Teorema 4.1: A imagem está contida no contradomínio

Para toda função $f: A \rightarrow B$, vale $\text{Im}(f) \subseteq B$.

Demonstração

Pela definição de função de A em B , cada valor $f(x)$ produzido pertence a B . Como a imagem reúne precisamente os valores produzidos, todos os seus elementos pertencem a B . Portanto, $\text{Im}(f) \subseteq B$.

4.1 Domínio fornecido e domínio natural

Definição 4.2: Domínio natural de uma expressão

Quando uma função real é apresentada apenas por uma fórmula, sem domínio explicitado, seu *domínio natural* é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ em que a expressão está definida como número real.

Exemplo

$$\begin{array}{lll} f(x) = 2x + 5 & \implies & \text{Dom}(f) = \mathbb{R}; \\ g(x) = \frac{1}{x-3} & \implies & \text{Dom}(g) = \mathbb{R} \setminus \{3\}; \\ h(x) = \sqrt{x+4} & \implies & \text{Dom}(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -4\}. \end{array}$$

O contexto também restringe o domínio

A fórmula $A(l) = l^2$ está definida algebricamente para todo $l \in \mathbb{R}$. Se l representa o lado de um quadrado, contudo, o modelo exige $l > 0$. Uma fórmula e um problema concreto podem ter domínios diferentes.

4.2 Igualdade de funções

Teorema 4.2: Critério de igualdade de funções

Duas funções são iguais quando possuem o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e o mesmo valor para cada entrada do domínio.

Exemplo

As expressões $f(x) = (x+1)^2$ e $g(x) = x^2 + 2x + 1$ definem a mesma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, pois, pelo produto notável, fornecem valores iguais para todo $x \in \mathbb{R}$. Já $u(x) = x^2$ com domínio $\mathbb{R}$ e $v(x) = x^2$ com domínio $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ não são a mesma função, embora tenham a mesma fórmula.

5 Cinco representações de uma função

Uma função pode ser descrita de modos diferentes. Nenhuma representação é sempre superior às demais: cada uma evidencia certos aspectos.

5.1 Representação verbal

Uma descrição verbal explica a regra em linguagem cotidiana.

Exemplo

“O preço total é uma taxa fixa de R\$ 6,00 acrescida de R\$ 2,50 por quilômetro percorrido.” Se d é a distância em quilômetros e C é o custo em reais, essa descrição antecede a fórmula $C(d) = 6 + 2,5d$.

5.2 Representação numérica por tabela

d (km)	0	1	2	4	6
$C(d)$ (R\$)	6,00	8,50	11,00	16,00	21,00

A tabela apresenta valores específicos e facilita comparações, mas pode não mostrar todos os valores possíveis.

5.3 Representação algébrica

A fórmula

$$C(d) = 6 + 2,5d$$

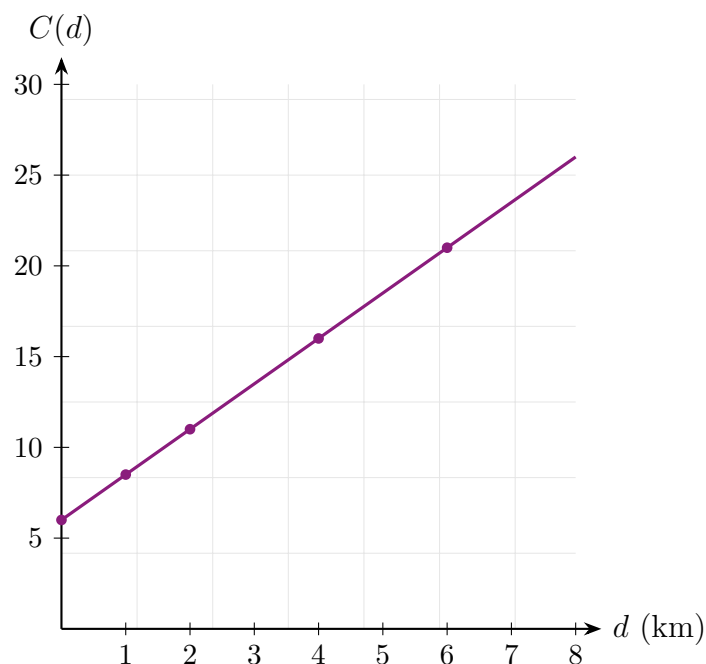
permite calcular diretamente o custo para qualquer distância admissível.

5.4 Diagrama de correspondência

O diagrama explicita entradas, saídas e associações. É especialmente útil para conjuntos finitos, mas pouco prático quando há infinitos valores.

5.5 Representação gráfica

Cada par $(d, C(d))$ é representado por um ponto do plano cartesiano. Se a distância pode assumir todos os valores reais não negativos, os pontos formam uma parte de reta.



O que cada representação evidencia

Representação	Principal utilidade
Verbal	Comunicar o contexto e o significado das variáveis.
Tabela	Exibir valores específicos e padrões numéricos.
Algébrica	Calcular valores e generalizar a relação.
Diagrama	Visualizar associações em conjuntos finitos.
Gráfica	Perceber comportamento global, variações, zeros e tendências.

Teorema 5.1: Coerência entre representações

Se uma tabela, uma fórmula e um gráfico representam a mesma função, então todo par (x, y) da tabela satisfaz $y = f(x)$ e corresponde a um ponto do gráfico.

Demonstração

A tabela registra pares $(x, f(x))$. A fórmula determina o segundo elemento de cada par e o gráfico é, por definição, o conjunto dos pontos $(x, f(x))$. Portanto, as três representações registram a mesma correspondência por meios diferentes.

6 O gráfico de uma função

6.1 Definição e construção

Definição 6.1: Gráfico de uma função

O gráfico de f é o conjunto dos pontos do plano cartesiano cujas coordenadas são $(x, f(x))$, com x pertencente ao domínio:

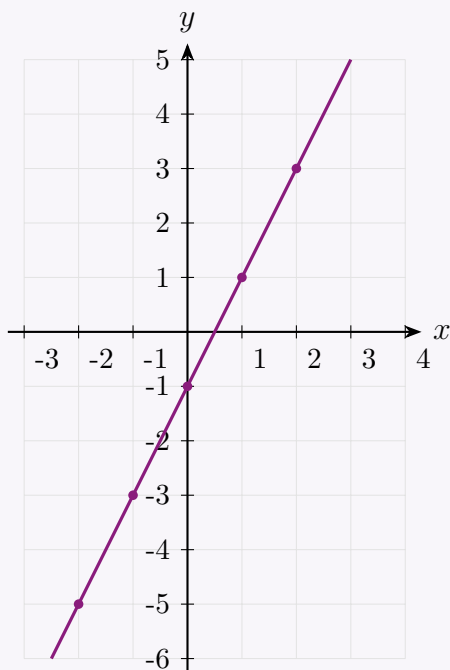
$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \text{Dom}(f)\}.$$

Para construir um gráfico a partir de uma fórmula:

1. determine o domínio relevante;
2. escolha valores de x ;
3. calcule $f(x)$;
4. marque os pontos $(x, f(x))$;
5. una ou não os pontos conforme a natureza das variáveis;
6. identifique e nomeie os eixos, as unidades e a escala.

Construção do gráfico de $f(x) = 2x - 1$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	-3	-1	1	3



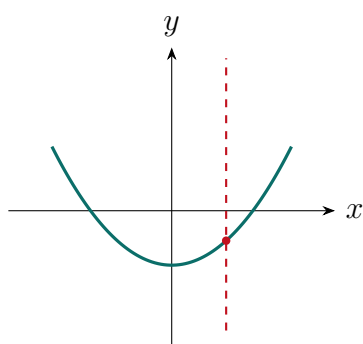
6.2 O teste da reta vertical

Teorema 6.1: Teste da reta vertical

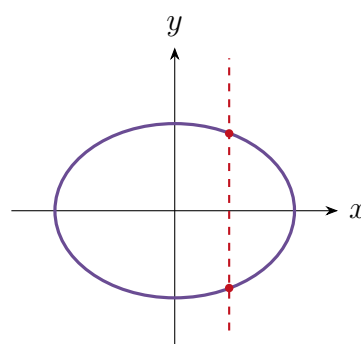
Um conjunto de pontos do plano representa o gráfico de uma função de x se, e somente se, toda reta vertical $x = a$, com a no domínio, intercepta o gráfico em exatamente um ponto.

Demonstração

Fixar a reta vertical $x = a$ significa fixar uma entrada a . Cada interseção corresponde a uma saída associada a essa entrada. Como uma função atribui exatamente uma saída a cada entrada do domínio, deve haver exatamente uma interseção. Reciprocamente, se toda entrada admitida determina uma única interseção, então determina uma única saída, caracterizando uma função.



É função



Não é função de x

Observação

Retas verticais que passam fora do domínio não precisam interceptar o gráfico. O teste exige uma interseção para cada x do domínio e, sobretudo, impede duas ou mais saídas para a mesma entrada.

6.3 Gráficos discretos e contínuos

Definição 6.2: Variável discreta e variável contínua

Uma variável é *discreta* quando assume valores separados, geralmente obtidos por contagem. É *contínua* quando pode assumir todos os valores de um intervalo, geralmente obtidos por medição.

Exemplo

Se n é o número de ingressos comprados, então $n \in \mathbb{N}$ e o gráfico do custo é formado por pontos separados. Se t é o tempo decorrido, ele pode assumir valores como 1,2 s ou 1,237 s, e um trecho contínuo pode ser adequado.

Não uma pontos automaticamente

Unir pontos de um gráfico discreto pode criar valores sem significado. Não faz sentido comprar 2,4 ingressos, mesmo que a reta entre os pontos pareça visualmente natural.

7 Leitura e análise de gráficos

7.1 Valores, zeros e interseções

No gráfico de $y = f(x)$:

- $f(a)$ é a ordenada do ponto do gráfico cuja abscissa é a ;
- $f(x) = 0$ nos pontos em que o gráfico intercepta o eixo x ;
- $f(0)$ é a interseção com o eixo y , quando 0 pertence ao domínio;
- $f(x) > 0$ onde o gráfico está acima do eixo x ;
- $f(x) < 0$ onde o gráfico está abaixo do eixo x .

Definição 7.1: Zero ou raiz de uma função

Um número a do domínio é um *zero* de f quando

$$f(a) = 0.$$

Graficamente, $(a, 0)$ é um ponto de interseção com o eixo das abscissas.

Exemplo

Para $f(x) = 3x - 6$,

$$f(x) = 0 \iff 3x - 6 = 0 \iff x = 2.$$

Logo, o gráfico intercepta o eixo x no ponto $(2, 0)$. Como $f(0) = -6$, a interseção com o eixo y é $(0, -6)$.

7.2 Crescimento, decrescimento e constância

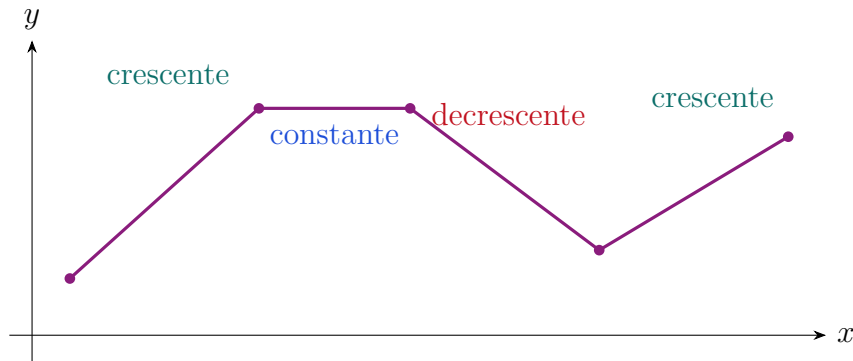
Definição 7.2: Comportamento em um intervalo

Em um intervalo do domínio, uma função é:

- *crescente* quando entradas maiores produzem saídas maiores;
- *decrescente* quando entradas maiores produzem saídas menores;
- *constante* quando todas as entradas produzem a mesma saída.

Em linguagem simbólica, se $x_1 < x_2$:

$$\begin{array}{ll} f(x_1) < f(x_2) & \text{em um trecho crescente,} \\ f(x_1) > f(x_2) & \text{em um trecho decrescente,} \\ f(x_1) = f(x_2) & \text{em um trecho constante.} \end{array}$$



7.3 Máximos e mínimos

Definição 7.3: Valor máximo e valor mínimo

Um valor M é máximo de f em determinado domínio quando $f(x) \leq M$ para toda entrada considerada e existe alguma entrada a tal que $f(a) = M$. Analogamente, m é mínimo quando $f(x) \geq m$ para toda entrada considerada e $f(b) = m$ para alguma entrada b .

Observação

Um ponto pode ser o maior de um trecho sem ser o maior de todo o gráfico. Por isso, sempre se deve indicar o intervalo ou domínio analisado.

7.4 Taxa média de variação

Definição 7.4: Taxa média de variação

Entre duas entradas distintas x_1 e x_2 , a taxa média de variação de f é

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Ela mede a variação média da saída por unidade de variação da entrada.

Exemplo

Uma população passa de 1 200 para 1 500 indivíduos entre os anos 2 e 5. A taxa média de variação é

$$\frac{1\,500 - 1\,200}{5 - 2} = 100$$

indivíduos por ano. Isso não afirma que o crescimento foi exatamente 100 em cada ano; descreve apenas a média no intervalo.

8 Funções de proporcionalidade direta

Definição 8.1: Função de proporcionalidade direta

Uma função de proporcionalidade direta possui a forma

$$f(x) = kx,$$

em que k é uma constante real, chamada *constante de proporcionalidade*.

Teorema 8.1: Razão constante

Se $f(x) = kx$ e $x \neq 0$, então

$$\frac{f(x)}{x} = k.$$

Reciprocamente, se a razão $f(x)/x$ é igual a uma mesma constante k para toda entrada não nula, então $f(x) = kx$.

Demonstração

Se $f(x) = kx$, então $f(x)/x = kx/x = k$, pois $x \neq 0$. No sentido inverso, de $f(x)/x = k$, multiplicando ambos os membros por x , obtém-se $f(x) = kx$.

Teorema 8.2: Gráfico da proporcionalidade direta

O gráfico de $f(x) = kx$ está contido em uma reta que passa pela origem $(0, 0)$. Se $k > 0$, a função é crescente; se $k < 0$, é decrescente; se $k = 0$, é constante.

Demonstração

Como $f(0) = k \cdot 0 = 0$, o gráfico passa pela origem. Para duas entradas $x_1 < x_2$,

$$f(x_2) - f(x_1) = k(x_2 - x_1).$$

Como $x_2 - x_1 > 0$, o sinal da diferença é o sinal de k . Isso determina crescimento, decrescimento ou constância.

Preço por quilograma

Se um alimento custa R\$ 18,40 por quilograma, o preço de m quilogramas é

$$P(m) = 18,40m, \quad m \geq 0.$$

A razão $P(m)/m = 18,40$ é constante e possui unidade R\$/kg.

Passar pela origem é necessário

Uma relação diretamente proporcional precisa produzir saída zero quando a entrada é zero. A fórmula $y = 3x + 5$ não representa proporcionalidade direta, pois $y(0) = 5$.

9 Funções afins

Definição 9.1: Função afim

Uma função afim é dada por

$$f(x) = ax + b,$$

em que $a, b \in \mathbb{R}$. O número a é o *coeficiente de variação* e b é o *valor inicial*, pois $f(0) = b$.

Teorema 9.1: Variações iguais das entradas

Se $f(x) = ax + b$, então, para qualquer variação h ,

$$f(x + h) - f(x) = ah.$$

Portanto, aumentos iguais na entrada provocam aumentos iguais na saída.

Demonstração

$$\begin{aligned} f(x + h) - f(x) &= [a(x + h) + b] - (ax + b) \\ &= ax + ah + b - ax - b \\ &= ah. \end{aligned}$$

Teorema 9.2: Taxa de variação da função afim

Para $x_1 \neq x_2$, a taxa média de variação de $f(x) = ax + b$ é sempre a :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a.$$

Demonstração

$$\frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a.$$

Teorema 9.3: Comportamento da função afim

Para $f(x) = ax + b$:

- se $a > 0$, f é crescente;
- se $a < 0$, f é decrescente;
- se $a = 0$, f é constante.

Se $a \neq 0$, seu zero é

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Demonstração

Para $x_1 < x_2$, temos $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$. Como $x_2 - x_1 > 0$, o sinal da diferença é determinado por a . Para obter o zero, resolve-se $ax + b = 0$, resultando em $x = -b/a$ quando $a \neq 0$.

Corrida por aplicativo

Uma corrida custa R\$ 5,50 de taxa inicial e R\$ 2,20 por quilômetro. O modelo é

$$C(d) = 2,20d + 5,50, \quad d \geq 0.$$

O coeficiente 2,20 mede a variação do preço por quilômetro, e 5,50 é o preço quando $d = 0$ no modelo simplificado.

9.1 Determinação da lei por dois pontos

Teorema 9.4: Função afim por dois pontos

Dados dois pontos distintos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , com $x_1 \neq x_2$, existe uma única função afim cujo gráfico passa por esses pontos. Seus coeficientes são

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad b = y_1 - ax_1.$$

Demonstração

Se $y_1 = ax_1 + b$ e $y_2 = ax_2 + b$, a subtração das equações fornece

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1).$$

Como $x_2 - x_1 \neq 0$, segue a fórmula de a . Substituindo o valor encontrado em $y_1 = ax_1 + b$, obtém-se $b = y_1 - ax_1$. Os cálculos determinam um único par (a, b) .

Exemplo

Uma função afim satisfaz $f(2) = 7$ e $f(5) = 16$. Então

$$a = \frac{16 - 7}{5 - 2} = 3, \quad b = 7 - 3 \cdot 2 = 1.$$

Logo, $f(x) = 3x + 1$.

10 Modelos não lineares introdutórios

Nem toda dependência apresenta variação constante. Reconhecer que um modelo *não* é afim é tão importante quanto saber trabalhar com retas.

10.1 Modelo quadrático

Área de um quadrado

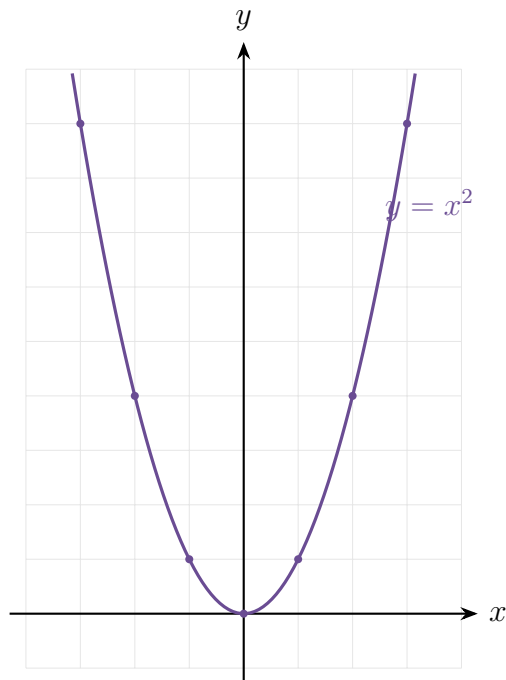
Se $l > 0$ é a medida do lado, a área é

$$A(l) = l^2.$$

Valores igualmente espaçados de l não produzem variações iguais de área:

l	0	1	2	3	4
$A(l)$	0	1	4	9	16
diferença		1	3	5	7

O gráfico não é uma reta.



10.2 Proporcionalidade inversa

Definição 10.1: Função de proporcionalidade inversa

Uma função de proporcionalidade inversa tem a forma

$$f(x) = \frac{k}{x}, \quad k \neq 0,$$

com $x \neq 0$. Nela, o produto $x f(x) = k$ é constante.

Tempo de viagem

Para percorrer uma distância fixa de 120 km a velocidade média constante v , o tempo é

$$t(v) = \frac{120}{v}, \quad v > 0.$$

Se a velocidade dobra, o tempo é reduzido à metade. O modelo não inclui paradas nem variações de velocidade.

Teorema 10.1: Produto constante

Para entradas não nulas, $f(x) = k/x$ se, e somente se, $xf(x) = k$.

Demonstração

Se $f(x) = k/x$, então $xf(x) = x(k/x) = k$. Reciprocamente, se $xf(x) = k$ e $x \neq 0$, a divisão por x fornece $f(x) = k/x$.

Observação

O gráfico de $y = k/x$ não contém ponto com $x = 0$. Também não é uma reta e não deve ser unido atravessando o eixo y .

10.3 Outros modelos

Funções definidas por $f(x) = |x|$, $f(x) = \sqrt{x}$ e regras por partes também podem representar situações reais. O essencial é verificar se cada entrada admitida produz uma única saída.

Valor absoluto

A distância de um ponto de coordenada x até a origem da reta numérica é

$$d(x) = |x|.$$

Assim, $d(-4) = d(4) = 4$. Duas entradas podem ter a mesma imagem sem violar a definição de função.

11 Da tabela para a fórmula

11.1 Reconhecimento de padrões

Uma tabela com poucos valores não determina, por si só, uma única função. É necessário conhecer ou supor o tipo de modelo. Por exemplo, os pontos $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(2, 4)$ pertencem a $y = x^2$, mas inúmeras outras fórmulas poderiam produzir esses mesmos três valores.

Hipótese de modelagem

Ao determinar uma fórmula a partir de uma tabela, declare a hipótese adotada: “supondo proporcionalidade direta”, “supondo uma função afim” ou outra condição. Sem essa informação, dados finitos geralmente não garantem unicidade.

11.2 Tabela proporcional

Se $x \neq 0$ e a razão y/x é constante, o modelo sugerido é $y = kx$.

Exemplo

$$\begin{array}{c|cccc} x & 2 & 4 & 7 & 10 \\ \hline y & 6 & 12 & 21 & 30 \end{array} \implies \frac{y}{x} = 3.$$

Supondo proporcionalidade direta, $f(x) = 3x$.

11.3 Tabela afim

Se aumentos iguais de x produzem aumentos iguais de y , a tabela sugere uma função afim.

Exemplo

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ \hline y & 5 & 11 & 17 & 23 & 29 \end{array}$$

Quando x aumenta 2, y aumenta 6. Portanto, a variação por unidade é $a = 6/2 = 3$. Como $y = 5$ para $x = 0$, temos $b = 5$. Assim,

$$f(x) = 3x + 5.$$

11.4 Tabela de proporcionalidade inversa

Se o produto xy é constante, o modelo sugerido é $y = k/x$.

Exemplo

$$\begin{array}{c|cccc} x & 2 & 3 & 4 & 6 \\ \hline y & 12 & 8 & 6 & 4 \end{array} \implies xy = 24.$$

Supondo proporcionalidade inversa, $f(x) = 24/x$.

12 Modelagem de situações-problema

Definição 12.1: Modelo matemático

Um modelo matemático é uma representação simplificada de uma situação, criada para descrever relações, fazer previsões ou apoiar decisões. Todo modelo se baseia em hipóteses e possui limites de validade.

Um procedimento organizado de modelagem pode seguir estas etapas:

1. identifique as grandezas e suas unidades;
2. escolha as variáveis independente e dependente;
3. determine o domínio coerente com o contexto;
4. traduza a relação em palavras, tabela ou fórmula;
5. calcule ou represente graficamente;
6. interprete o resultado com unidade;
7. verifique se o valor é plausível;
8. explicita hipóteses e limitações.

12.1 Conversão de temperatura

Exemplo

A temperatura F , em graus Fahrenheit, depende da temperatura C , em graus Celsius, pela função

$$F(C) = \frac{9}{5}C + 32.$$

Para $C = 20$:

$$F(20) = \frac{9}{5} \cdot 20 + 32 = 68.$$

Logo, $20^\circ\text{C} = 68^\circ\text{F}$. A taxa $9/5$ indica que uma variação de 5°C corresponde a uma variação de 9°F .

12.2 Consumo de combustível

Exemplo

Um veículo consome, em média, 1 litro a cada 12 km. Supondo consumo médio constante, a quantidade L de litros necessária para percorrer d quilômetros é

$$L(d) = \frac{d}{12}, \quad d \geq 0.$$

Para 330 km, $L(330) = 27,5$ litros. O modelo é uma aproximação: trânsito, velocidade, carga e relevo podem alterar o consumo real.

12.3 Geometria

Exemplo

Um retângulo tem perímetro 40 cm. Se um lado mede x cm, o outro mede $20 - x$ cm e a área é

$$A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2.$$

Para que ambos os lados sejam positivos,

$$0 < x < 20.$$

O domínio contextual faz parte do modelo.

12.4 Comparação de planos

Exemplo

Dois serviços cobram, em reais,

$$A(x) = 30 + 4x, \quad B(x) = 54 + 2x,$$

onde x é a quantidade utilizada. O ponto de igualdade satisfaz

$$30 + 4x = 54 + 2x \iff 2x = 24 \iff x = 12.$$

Ambos custam R\$ 78,00 para 12 unidades. Para $x < 12$, o plano A é mais barato; para $x > 12$, o plano B é mais barato.

Teorema 12.1: Interseção de gráficos

Uma solução da equação $f(x) = g(x)$ corresponde à abscissa de um ponto de interseção dos gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

Demonstração

Se $f(a) = g(a) = b$, então o ponto (a, b) pertence aos dois gráficos. No sentido inverso, se (a, b) pertence a ambos, então $b = f(a)$ e $b = g(a)$; logo, $f(a) = g(a)$.

13 Tecnologia, planilhas e investigação

13.1 Construção de tabela em uma planilha

Para estudar $f(x) = 2,5x + 6$:

1. escreva os valores de x na coluna A;
2. na célula B2, insira a fórmula $=2,5*A2+6$;
3. arraste a fórmula para as demais linhas;
4. selecione as colunas A e B;
5. insira um gráfico de dispersão (XY);
6. nomeie os eixos e confira a escala.

Linha	A: entrada x	B: saída $f(x)$
1	x	$f(x)$
2	0	$=2,5*A2+6$
3	1	$=2,5*A3+6$
4	2	$=2,5*A4+6$

Observação

Conforme a configuração regional, a planilha pode usar vírgula ou ponto como separador decimal. O gráfico de dispersão é adequado porque trata a primeira coluna como valores numéricos do eixo horizontal.

13.2 Janela gráfica e escala

Um recurso digital mostra apenas uma parte do plano, chamada janela de visualização. Um gráfico pode parecer vazio ou constante quando a janela está mal escolhida. Antes de concluir, verifique:

- os limites mínimo e máximo de cada eixo;
- a escala e as unidades;
- o domínio do problema;
- se os dados são discretos ou contínuos;
- se houve erro de digitação na fórmula.

Laboratório de parâmetros

Em uma planilha ou software gráfico, represente simultaneamente

$$y = x, \quad y = 2x, \quad y = -x, \quad y = x + 3, \quad y = 2x + 3.$$

Investigue:

- a) o efeito de alterar o coeficiente de x ;
 - b) o efeito de alterar o termo constante;
 - c) quais retas são paralelas;
 - d) quais gráficos passam pela origem.
- Registre conjecturas e confirme-as por substituição algébrica.

14 Erros frequentes e critérios de validação

Confundir $f(x)$ com multiplicação

$f(x)$ representa a imagem de x pela função f . Somente em uma expressão explicitamente definida como produto seria correto interpretar fx como multiplicação.

Trocar entrada e saída

No ponto (x, y) do gráfico de $y = f(x)$, a entrada é lida no eixo horizontal e a saída, no vertical. Trocar as coordenadas altera a relação.

Ignorar o domínio

A expressão $1/(x - 2)$ não admite $x = 2$. Em um problema, outras restrições podem surgir: quantidades inteiras, comprimentos positivos, capacidades máximas ou tempo não negativo.

Confundir imagem e contradomínio

O contradomínio é declarado na definição da função; a imagem reúne apenas os valores efetivamente obtidos. Em geral, $\text{Im}(f)$ pode ser menor que o contradomínio.

Concluir uma fórmula única com poucos pontos

Uma tabela finita pode ser compatível com várias leis de formação. A escolha de um modelo exige hipótese, contexto ou informação adicional.

Extrapolar sem justificativa

Um modelo ajustado em certo intervalo pode falhar fora dele. Uma tendência observada por cinco dias não necessariamente permanece por cinco anos.

Lista de verificação

Antes de finalizar um problema de função, pergunte:

1. Quais são as variáveis e suas unidades?
2. Qual variável depende da outra?

3. Cada entrada admissível produz exatamente uma saída?
4. Qual é o domínio, inclusive no contexto?
5. As diferentes representações são coerentes?
6. O resultado possui unidade e é plausível?
7. O modelo tem hipóteses ou limitações relevantes?

15 Exercícios de consolidação

15.1 Bloco A — Conceitos e notação

A1. Em cada situação, identifique uma variável independente e uma variável dependente:

- a) custo de maçãs vendidas a preço fixo por quilograma;
- b) área de um círculo em função do raio;
- c) temperatura registrada ao longo do dia.

A2. Explique, com suas palavras, o significado de dependência unívoca.

A3. Determine quais relações de $A = \{1, 2, 3\}$ em $B = \{0, 2, 4, 6\}$ são funções:

- a) $\{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$;
- b) $\{(1, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$;
- c) $\{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$;
- d) $\{(1, 0), (2, 4)\}$.

A4. Para $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, calcule:

- a) $f(0)$;
- b) $f(2)$;
- c) $f(-1)$;
- d) $f(a + 1)$.

A5. Se $g(x) = 5 - 2x$ e $g(a) = 17$, determine a .

A6. Considere $h: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, dada por $h(x) = x^2$. Determine domínio, contradomínio e imagem.

A7. Determine o domínio natural real de:

- a) $f(x) = 7x - 4$;
- b) $g(x) = 1/(x + 5)$;
- c) $h(x) = \sqrt{2x - 6}$.

- A8.** Explique por que $f(x) = x^2$ pode ter domínio natural $\mathbb{R}$, mas o modelo “área de um quadrado de lado x ” exige $x > 0$.
- A9.** Dê um exemplo de função em que duas entradas diferentes tenham a mesma imagem.
- A10.** Uma relação associa a cada pessoa sua idade em uma data fixa. Trata-se de uma função? E a relação que associa a cada idade todas as pessoas com essa idade? Justifique.

15.2 Bloco B — Tabelas, fórmulas e gráficos

- B1.** Complete a tabela de $f(x) = -2x + 5$ para $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$.
- B2.** Construa o gráfico de $f(x) = x + 2$ no intervalo $-4 \leq x \leq 3$ e indique as interseções com os eixos.
- B3.** Para cada tabela, determine uma fórmula, adotando o modelo indicado:
- a) proporcionalidade direta: $\frac{x}{y} \left| \begin{array}{ccc} 2 & 5 & 8 \\ 7 & 17,5 & 28 \end{array} \right.$;
- b) função afim: $\frac{x}{y} \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 10 & 13 \end{array} \right.$;
- c) proporcionalidade inversa: $\frac{x}{y} \left| \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 10 \\ 15 & 7,5 & 3 \end{array} \right.$.
- B4.** Uma função afim satisfaz $f(1) = 4$ e $f(5) = 16$. Determine sua lei.
- B5.** Encontre o zero de cada função:
- a) $f(x) = 4x - 12$;
- b) $g(x) = -3x - 9$;
- c) $h(x) = 7$.
- B6.** Determine se cada função afim é crescente, decrescente ou constante:
- a) $f(x) = 8x - 1$;
- b) $g(x) = 5 - 0,4x$;
- c) $h(x) = -3$.
- B7.** Calcule a taxa média de variação de $f(x) = x^2$:
- a) entre $x = 1$ e $x = 3$;
- b) entre $x = 3$ e $x = 5$.
- O resultado é constante?
- B8.** Uma função é representada pelos pares

$$\{(-2, 3), (-1, 1), (0, -1), (1, -3), (2, -5)\}.$$

Admitindo um modelo afim, determine a fórmula e o zero.

- B9.** O gráfico de uma circunferência representa y como função de x ? Justifique pelo teste da reta vertical.
- B10.** Esboce um gráfico que seja crescente em $[-3, 0]$, constante em $[0, 2]$ e decrescente em $[2, 5]$.

15.3 Bloco C — Aplicações e modelagem

- C1.** Uma copiadora cobra R\$ 8,00 de taxa de serviço e R\$ 0,35 por página. Escreva a função do custo $C(n)$, indique um domínio contextual e calcule o custo de 120 páginas.
- C2.** Um reservatório contém 900 L e perde água a uma taxa constante de 15 L por minuto.
- Escreva $V(t)$.
 - Determine quando o reservatório ficará vazio.
 - Indique o domínio contextual do modelo.
- C3.** Um trabalhador recebe R\$ 1 800,00 fixos mais R\$ 25,00 por unidade vendida. Determine o salário para 32 unidades e quantas unidades geram salário de R\$ 3 050,00.
- C4.** A função $F(C) = \frac{9}{5}C + 32$ converte Celsius em Fahrenheit.
- Calcule $F(-10)$ e $F(35)$.
 - Determine a temperatura em Celsius correspondente a 95°F .
- C5.** O lado de um quadrado mede l cm. Escreva as funções perímetro e área. Qual delas é afim? Calcule ambas para $l = 7,5$.
- C6.** Para uma distância fixa de 240 km, o tempo de viagem é $t(v) = 240/v$. Calcule o tempo para $v = 60, 80$ e 120 km/h. Verifique o produto constante.
- C7.** Dois estacionamento cobram

$$A(t) = 12 + 3t, \quad B(t) = 6 + 5t,$$

com t em horas.

- Em quantas horas os preços são iguais?
 - Qual é mais barato antes e depois desse instante?
- C8.** Um táxi percorre 10 km por litro. O tanque começa com 45 L. Supondo consumo constante, escreva a quantidade $Q(d)$ de combustível após percorrer d km e determine o domínio contextual.
- C9.** Uma empresa registra os dados

mês m	0	1	2	3	4
clientes N	500	540	580	620	660

Admitindo crescimento afim, escreva $N(m)$ e estime $N(10)$. Explique por que a estimativa deve ser usada com cautela.

- C10.** Um retângulo tem lados x e $12 - x$, com $0 < x < 12$.

- a) Escreva a área $A(x)$.
- b) Calcule $A(2)$, $A(6)$ e $A(10)$.
- c) O modelo é afim? Justifique.

15.4 Bloco D — Análise crítica e elaboração

- D1.** Um estudante afirma: “Se o gráfico passa pela origem, a função é diretamente proporcional.” A afirmação é sempre verdadeira? Apresente um contraexemplo.
- D2.** Outro estudante afirma: “Se duas entradas têm a mesma imagem, não é função.” Corrija a afirmação.
- D3.** Uma tabela contém apenas $(0, 1)$, $(1, 2)$ e $(2, 5)$. Mostre que $f(x) = x^2 + 1$ ajusta os dados. Explique por que esses pontos, isoladamente, não garantem que essa seja a única fórmula possível.
- D4.** Elabore uma situação real modelada por $f(x) = 7x + 20$. Identifique unidades, domínio e significado dos coeficientes.
- D5.** Elabore uma situação de proporcionalidade inversa, forneça quatro pares de valores e explique a constante de proporcionalidade.
- D6.** Um gráfico digital de $y = 0,001x + 1000$ parece horizontal na janela $-10 \leq x \leq 10$ e $-1000 \leq y \leq 3000$. A função é constante? Explique.
- D7.** Proponha uma tabela com cinco pares que represente uma função decrescente, mas não afim.
- D8.** Compare os modelos $A(x) = 50 + 2x$ e $B(x) = 20 + 5x$. Formule e responda uma pergunta de decisão envolvendo os dois.

16 Questões de aprofundamento

- P1.** Prove algebricamente que, se $f(x) = ax + b$ e $a \neq 0$, então entradas diferentes possuem imagens diferentes.
- P2.** Se $f(x) = 3x - 4$, mostre que existe exatamente uma entrada cuja imagem é qualquer número real y previamente escolhido.
- P3.** Uma função afim satisfaz $f(f(x)) = 4x + 3$ e possui coeficiente de variação positivo. Determine $f(x)$.
- P4.** Determine uma função afim f tal que $f(2) = 5$ e a taxa de variação seja igual ao próprio valor inicial $f(0)$.
- P5.** O perímetro de um retângulo é 24 cm. Demonstre que a área em função de um lado x pode ser escrita como $A(x) = 12x - x^2$ e explique o domínio contextual.
- P6.** Considere $f(x) = x^2$. Determine todos os pares de entradas distintas que possuem a mesma imagem e explique o que isso revela sobre o gráfico.

17 Avaliação-síntese

- S1.** Defina função utilizando as condições de existência e unicidade.
- S2.** Seja $f: \{-1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{Z}$, dada por $f(x) = x^2 - 1$. Determine domínio, contradomínio, imagem e $f(2)$.
- S3.** Para $g(x) = -3x + 12$, determine $g(-2)$, o zero, o valor inicial e se a função é crescente ou decrescente.
- S4.** Determine a função afim que passa pelos pontos $(-1, 7)$ e $(3, -1)$.
- S5.** Uma tabela apresenta

x	0	2	4	6	8
y	9	14	19	24	29

Admitindo modelo afim, determine a lei de formação.

- S6.** Uma caixa-d'água contém 1 200 L e recebe 25 L por minuto. Escreva a função do volume, calcule o volume após 18 minutos e determine quando o volume alcança 2 000 L.
- S7.** Os planos $A(n) = 40 + 3n$ e $B(n) = 16 + 5n$ têm o mesmo custo para qual valor de n ? Qual plano é mais barato para valores maiores que esse?
- S8.** Explique por que a relação $x^2 + y^2 = 9$ não define y como função de x em todo o intervalo $[-3, 3]$.
- S9.** Para $A(l) = l^2$, calcule a taxa média de variação entre $l = 2$ e $l = 5$ e interprete a unidade se l é medido em centímetros.
- S10.** Uma pessoa afirma que $t(v) = 180/v$ é função afim porque possui uma fórmula. Avalie a afirmação e identifique uma propriedade correta do modelo.
- S11.** Descreva as etapas para construir, em uma planilha, uma tabela e um gráfico de $f(x) = 1,5x - 2$.
- S12.** Elabore um problema envolvendo uma função afim, resolva-o e explicita ao menos uma limitação do modelo.

18 Gabarito comentado

18.1 Bloco A

A1. Respostas possíveis:

- a) massa comprada: independente; custo: dependente;
- b) raio: independente; área: dependente;
- c) horário: independente; temperatura: dependente.

A2. Significa que, para cada entrada admitida, existe uma única saída associada.

A3. São funções a) e c). Em b), a entrada 1 possui duas saídas. Em d), a entrada 3 não possui saída.

A4. a) $f(0) = 1$;

b) $f(2) = 2(4) - 6 + 1 = 3$;

c) $f(-1) = 2 + 3 + 1 = 6$;

d)

$$f(a+1) = 2(a+1)^2 - 3(a+1) + 1 = 2a^2 + a.$$

A5.

$$5 - 2a = 17 \iff -2a = 12 \iff a = -6.$$

A6.

$$\text{Dom}(h) = \{-2, -1, 0, 1, 2\},$$

o contradomínio é $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\text{Im}(h) = \{0, 1, 4\}$.

A7. a) $\mathbb{R}$;

b) $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$;

c) $2x - 6 \geq 0$, portanto $x \geq 3$.

A8. A expressão x^2 é calculável para todo real. No modelo geométrico, entretanto, x mede um comprimento, que deve ser positivo.

A9. Exemplo: $f(x) = x^2$, pois $f(-2) = f(2) = 4$.

A10. Na primeira relação, cada pessoa possui exatamente uma idade na data fixa, portanto é função. Na relação da idade para as pessoas, uma idade pode estar associada a várias pessoas e, assim definida, não é função.

18.2 Bloco B

B1.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	7	5	3	1	-1

B2. Os pontos podem ser obtidos por $y = x + 2$. As interseções são $(-2, 0)$ e $(0, 2)$.

B3. a) $f(x) = 3,5x$;

b) $f(x) = 3x + 4$;

c) $f(x) = 30/x$.

B4.

$$a = \frac{16 - 4}{5 - 1} = 3, \quad b = 4 - 3 = 1,$$

portanto $f(x) = 3x + 1$.

B5. a) $x = 3$;

b) $x = -3$;

c) não possui zero, pois $h(x) = 7 \neq 0$.

B6. a) crescente; b) decrescente; c) constante.

B7.

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = 4, \quad \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{25 - 9}{2} = 8.$$

A taxa não é constante.

B8. A saída diminui 2 quando a entrada aumenta 1, logo $a = -2$. Como $f(0) = -1$, temos $f(x) = -2x - 1$. Seu zero satisfaz $-2x - 1 = 0$, ou seja, $x = -1/2$.

B9. Não. Para diversos valores de x entre os extremos laterais, uma reta vertical encontra a circunferência em dois pontos.

B10. Resposta gráfica pessoal. Deve respeitar os três comportamentos e os intervalos indicados, sem atribuir duas saídas a uma entrada.

18.3 Bloco C

C1.

$$C(n) = 8 + 0,35n, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\text{e } C(120) = 8 + 42 = R\$ 50,00.$$

C2. a) $V(t) = 900 - 15t$;

$$\text{b) } 900 - 15t = 0 \Rightarrow t = 60 \text{ min};$$

$$\text{c) } 0 \leq t \leq 60.$$

C3.

$$S(n) = 1800 + 25n, \quad S(32) = R\$ 2\,600,00.$$

$$\text{Para } S(n) = 3050, \quad 25n = 1250 \text{ e } n = 50.$$

C4. a) $F(-10) = 14$ e $F(35) = 95$;

$$\text{b) } 95 = \frac{9}{5}C + 32 \Rightarrow C = 35^\circ\text{C}.$$

C5.

$$P(l) = 4l, \quad A(l) = l^2, \quad l > 0.$$

O perímetro é função afim e diretamente proporcional; a área não é afim. Para $l = 7,5$, $P = 30$ cm e $A = 56,25$ cm².

C6.

$$t(60) = 4 \text{ h}, \quad t(80) = 3 \text{ h}, \quad t(120) = 2 \text{ h}.$$

$$\text{Em todos os casos, } vt(v) = 240 \text{ km}.$$

C7.

$$12 + 3t = 6 + 5t \iff t = 3.$$

Para $t < 3$, B é mais barato; para $t > 3$, A é mais barato.

C8. O consumo é $d/10$ litros, portanto

$$Q(d) = 45 - \frac{d}{10}.$$

Até o esvaziamento do tanque, $0 \leq d \leq 450$ km.

- C9.** $N(m) = 500 + 40m$, logo $N(10) = 900$. A extrapolação supõe que a taxa de 40 clientes por mês continue constante; mudanças futuras podem invalidá-la.
- C10.** a) $A(x) = x(12 - x) = 12x - x^2$;
 b) $A(2) = 20$, $A(6) = 36$ e $A(10) = 20$;
 c) não é afim, pois contém o termo $-x^2$ e não tem taxa constante.

18.4 Bloco D

- D1.** Não. Por exemplo, $f(x) = x^2$ passa pela origem, mas não é diretamente proporcional, pois $f(x)/x = x$ não é constante para $x \neq 0$.
- D2.** Entradas diferentes podem ter a mesma imagem. O que uma função proíbe é uma única entrada possuir duas imagens diferentes.
- D3.** De fato, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ e $f(2) = 5$. Uma quantidade finita de dados pode ser reproduzida por diferentes regras; é necessária uma hipótese sobre o tipo de função ou informação adicional.
- D4.** Resposta pessoal. Exemplo: um serviço cobra R\$ 20,00 fixos e R\$ 7,00 por item. Então $x \in \mathbb{N}$, $f(x)$ é medido em reais, 7 é o preço unitário e 20 é a taxa fixa.
- D5.** Resposta pessoal. Exemplo: dividir 60 tarefas igualmente entre n pessoas, $t(n) = 60/n$. Pares: (1, 60), (2, 30), (3, 20) e (5, 12). O produto $nt(n) = 60$ é constante.
- D6.** Não. A taxa é 0,001, portanto a função é crescente. A grande escala vertical torna uma pequena variação visualmente quase imperceptível.
- D7.** Exemplo:

$$\{(0, 16), (1, 9), (2, 4), (3, 1), (4, 0)\}.$$

As saídas diminuem, mas as diferenças $-7, -5, -3, -1$ não são constantes.

- D8.** Uma formulação possível: “A partir de qual quantidade B é mais barato?” A igualdade ocorre em

$$50 + 2x = 20 + 5x \iff x = 10.$$

Para $x > 10$, A é mais barato; para $x < 10$, B é mais barato. No ponto 10, os custos são iguais.

18.5 Questões de aprofundamento

- P1.** Se $x_1 \neq x_2$ e $a \neq 0$, então

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1) \neq 0.$$

Logo, $f(x_2) \neq f(x_1)$.

- P2.** Dado $y \in \mathbb{R}$, resolvemos

$$3x - 4 = y \iff x = \frac{y + 4}{3}.$$

Esse valor existe e é único, pois a divisão por 3 é possível.

P3. Escreva $f(x) = ax + b$, com $a > 0$. Então

$$f(f(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + b(a + 1).$$

Comparando com $4x + 3$,

$$a^2 = 4, \quad b(a + 1) = 3.$$

Como $a > 0$, $a = 2$ e $b = 1$. Portanto, $f(x) = 2x + 1$.

P4. Se $f(x) = ax + b$ e a taxa é igual a $f(0)$, então $a = b$. A condição $f(2) = 5$ fornece $2a + b = 3a = 5$, logo $a = b = 5/3$. Portanto,

$$f(x) = \frac{5}{3}x + \frac{5}{3}.$$

P5. Se os lados são x e y , então $2x + 2y = 24$, de modo que $y = 12 - x$. Assim,

$$A(x) = x(12 - x) = 12x - x^2.$$

Como ambos os lados devem ser positivos, $0 < x < 12$.

P6. A igualdade $x_1^2 = x_2^2$ implica

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0.$$

Para entradas distintas, $x_1 \neq x_2$, portanto $x_1 + x_2 = 0$ e $x_2 = -x_1$, com $x_1 \neq 0$. O gráfico é simétrico em relação ao eixo y .

18.6 Avaliação-síntese

S1. Uma função de A em B associa a cada elemento de A uma única imagem em B : todo elemento do domínio deve possuir imagem e não pode possuir duas imagens diferentes.

S2. O domínio é $\{-1, 0, 1, 2\}$, o contradomínio é $\mathbb{Z}$ e

$$\text{Im}(f) = \{-1, 0, 3\}.$$

Além disso, $f(2) = 3$.

S3.

$$g(-2) = 18, \quad -3x + 12 = 0 \Rightarrow x = 4.$$

O valor inicial é $g(0) = 12$. Como o coeficiente de x é negativo, a função é decrescente.

S4.

$$a = \frac{-1 - 7}{3 - (-1)} = -2, \quad 7 = -2(-1) + b \Rightarrow b = 5.$$

Portanto, $f(x) = -2x + 5$.

S5. Para uma variação 2 em x , a saída varia 5, logo $a = 5/2$. Como $f(0) = 9$,

$$f(x) = \frac{5}{2}x + 9.$$

S6.

$$V(t) = 1200 + 25t, \quad V(18) = 1650 \text{ L.}$$

Para $V(t) = 2000$, $25t = 800$ e $t = 32$ minutos.

S7.

$$40 + 3n = 16 + 5n \iff n = 12.$$

Para $n > 12$, o plano A é mais barato, pois sua taxa de crescimento é menor.

S8. Para $-3 < x < 3$ e $x \neq \pm 3$, a equação fornece geralmente duas ordenadas,

$$y = \pm \sqrt{9 - x^2}.$$

Assim, uma reta vertical encontra a circunferência em dois pontos.

S9.

$$\frac{A(5) - A(2)}{5 - 2} = \frac{25 - 4}{3} = 7.$$

A unidade é cm^2/cm : a área aumenta, em média, 7 cm^2 por centímetro de aumento do lado nesse intervalo.

S10. A afirmação é falsa. Ter fórmula não torna uma função afim. O modelo $t(v) = 180/v$ é de proporcionalidade inversa e satisfaz $v t(v) = 180$.

S11. Deve-se inserir valores de x em uma coluna; escrever na coluna seguinte uma fórmula equivalente a $=1,5*A2-2$; preencher as linhas; selecionar os dados; inserir gráfico de dispersão (XY); nomear os eixos; conferir escala e domínio.

S12. Resposta pessoal. Deve conter uma relação coerente do tipo $ax + b$, cálculos corretos, domínio e unidades, além de uma limitação. Exemplo: tarifa fixa mais preço unitário, válida apenas dentro de certo intervalo de consumo.

19 Resumo final

Mapa conceitual essencial

$f: A \rightarrow B, x \mapsto f(x)$	$\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in \text{Dom}(f)\}$
$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \text{Dom}(f)\}$	$f(a) = 0 \iff (a, 0) \in G_f$
$f(x) = kx$	$\frac{f(x)}{x} = k \quad (x \neq 0)$
$f(x) = ax + b$	$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$
$f(x) = \frac{k}{x}$	$xf(x) = k \quad (x \neq 0)$

- Função é uma relação em que cada entrada admitida possui exatamente uma saída.
- Domínio, contradomínio e lei de formação fazem parte da definição.
- A imagem é formada pelos valores efetivamente produzidos.

- Tabelas, fórmulas e gráficos devem representar os mesmos pares $(x, f(x))$.
- O teste da reta vertical verifica a unicidade da saída em um gráfico.
- A função kx representa proporcionalidade direta; a função $ax + b$ tem taxa de variação constante.
- Nem toda função é afim: áreas, relações inversas e valores absolutos fornecem outros comportamentos.
- Todo modelo deve declarar unidades, domínio, hipóteses e limitações.

Referência normativa

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Matemática, 9º ano, habilidade EF09MA06. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf.

Fim do curso — Funções: Representações Numérica, Algébrica e Gráfica