

Fatoração de Expressões Algébricas

Curso completo de Matemática — 9º ano do Ensino Fundamental

Alinhado à habilidade EF09MA09 da BNCC

Sumário

1	Apresentação e objetivos de aprendizagem	1
2	O significado de fatorar	1
3	Fator comum em evidência	2
4	Fatoração por agrupamento	3
5	Diferença de dois quadrados	4
5.1	Fatoração em várias etapas	5
6	Trinômio quadrado perfeito	5
7	Trinômio $x^2 + sx + p$	6
8	Trinômio geral $ax^2 + bx + c$	6
9	Substituição e técnicas combinadas	7
10	Conjunto numérico e irredutibilidade	8
11	Frações algébricas e restrições	8
12	Princípio do produto nulo	9
13	Aplicações geométricas e aritméticas	9
13.1	Dimensões a partir da área	9
13.2	Divisibilidade por meio de fatores	10
14	Extensão: soma e diferença de cubos	10
15	Tecnologia, investigação e verificação	11
16	Erros frequentes e roteiro de decisão	11

17 Exercícios de consolidação	13
17.1 Bloco A — Fator comum e agrupamento	13
17.2 Bloco B — Produtos notáveis inversos	13
17.3 Bloco C — Trinômios e técnicas combinadas	14
17.4 Bloco D — Análise e aplicações	14
18 Questões de aprofundamento	14
19 Avaliação-síntese	15
20 Gabarito comentado	16
20.1 Bloco A	16
20.2 Bloco B	17
20.3 Bloco C	17
20.4 Bloco D	19
20.5 Questões de aprofundamento	19
20.6 Avaliação-síntese	20
21 Resumo final	21

1 Apresentação e objetivos de aprendizagem

Fatorar uma expressão é reescrevê-la como produto. Esse processo é a operação inversa do desenvolvimento pela propriedade distributiva e pelos produtos notáveis. A forma fatorada revela estrutura, facilita cálculos, permite simplificar frações algébricas e transforma certas equações em produtos iguais a zero.

Ao concluir este curso, espera-se que o estudante seja capaz de:

- compreender fator, produto e forma fatorada;
- reconhecer e extrair o máximo fator comum;
- fatorar por agrupamento de termos;
- reconhecer diferenças de quadrados;
- reconhecer trinômios quadrados perfeitos;
- fatorar trinômios do tipo $x^2 + sx + p$;
- fatorar trinômios gerais simples $ax^2 + bx + c$;
- combinar técnicas em expressões de várias etapas;
- verificar uma fatoração por desenvolvimento;
- simplificar frações algébricas sem perder restrições de domínio;
- aplicar o princípio do produto nulo;
- resolver e elaborar problemas algébricos e geométricos.

Correspondência com a BNCC

Este curso desenvolve a parte de **fatoração** da habilidade **EF09MA09**: compreender processos de fatoração e sua relação com os produtos notáveis para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do segundo grau.

2 O significado de fatorar

Definição 2.1: Fator e produto

Em uma multiplicação $A \cdot B$, as expressões A e B são *fatores* e o resultado é o *produto*. Por exemplo, em $3x(x + 2)$, os fatores são 3, x e $x + 2$.

Definição 2.2: Fatoração

Fatorar uma expressão é escrevê-la como produto de expressões mais simples. Assim,

$$6x + 12 = 6(x + 2)$$

é uma fatoração, pois o membro da direita é um produto.

Teorema 2.1: Fatoração como distributiva inversa

Para quaisquer expressões A , B e C ,

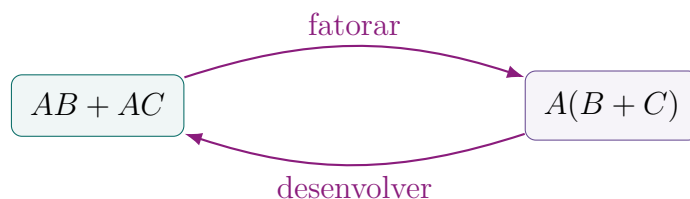
$$AB + AC = A(B + C), \quad AB - AC = A(B - C).$$

Demonstração

As igualdades decorrem diretamente da propriedade distributiva:

$$A(B + C) = AB + AC \quad \text{e} \quad A(B - C) = AB - AC.$$

Como a igualdade pode ser lida nos dois sentidos, obtemos a fatoração.



Definição 2.3: Fatoração completa

Uma fatoração é considerada *completa*, em certo conjunto numérico, quando os fatores não podem mais ser decompostos nesse conjunto pelas técnicas disponíveis.

A forma fatorada não é literalmente única

A ordem dos fatores pode mudar e fatores -1 podem ser redistribuídos:

$$(x - 2)(x + 3) = (x + 3)(x - 2) = -(2 - x)(x + 3).$$

Essas escritas representam o mesmo produto.

3 Fator comum em evidência

Definição 3.1: Fator comum

Um *fator comum* é uma expressão que divide todos os termos de uma soma algébrica. Colocá-lo em evidência significa usar a distributiva inversa.

Teorema 3.1: Máximo fator comum de monômios

Para obter o máximo fator comum de monômios com coeficientes inteiros:

1. calcule o máximo divisor comum dos coeficientes;
2. conserve apenas as letras presentes em todos os termos;
3. em cada letra comum, escolha o menor expoente.

Exemplo

Nos termos $18x^3y^2$ e $24x^2y^3$, temos

$$\text{mdc}(18, 24) = 6,$$

e os menores expoentes são x^2 e y^2 . Logo, o máximo fator comum é $6x^2y^2$.

Teorema 3.2: Extração do fator comum

Se F é fator de todos os termos, então

$$FA_1 + FA_2 + \cdots + FA_n = F(A_1 + A_2 + \cdots + A_n).$$

Exemplo

$$\begin{aligned} 12x^2y - 18xy^2 &= 6xy(2x) - 6xy(3y) \\ &= 6xy(2x - 3y). \end{aligned}$$

Fator comum polinomial

$$5x(x - 2) + 3(x - 2) = (x - 2)(5x + 3).$$

O fator comum pode ser um binômio inteiro.

Verificação obrigatória

Desenvolva o resultado:

$$6xy(2x - 3y) = 12x^2y - 18xy^2.$$

Se a expressão original não for recuperada, a fatoração está incorreta.

4 Fatoração por agrupamento

Definição 4.1: Agrupamento

Fatorar por *agrupamento* consiste em separar os termos em grupos, extrair um fator comum de cada grupo e produzir um novo fator comum.

Teorema 4.1: Padrão básico do agrupamento

Para quaisquer a, b, x, y ,

$$ax + ay + bx + by = (a + b)(x + y).$$

Demonstração

Agrupando os dois primeiros e os dois últimos termos,

$$\begin{aligned}ax + ay + bx + by &= a(x + y) + b(x + y) \\ &= (a + b)(x + y).\end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}2x^2 - 6x + xy - 3y &= (2x^2 - 6x) + (xy - 3y) \\ &= 2x(x - 3) + y(x - 3) \\ &= (x - 3)(2x + y).\end{aligned}$$

A ordem pode ser modificada

Às vezes é necessário reordenar termos antes de agrupar. A comutatividade da adição permite essa reorganização, desde que cada termo conserve seu sinal.

Nem todo agrupamento funciona

Os grupos precisam produzir o mesmo fator polinomial. Se isso não acontecer, tente outra organização ou outra técnica.

5 Diferença de dois quadrados

Teorema 5.1: Fatoração da diferença de quadrados

Para quaisquer $A, B \in \mathbb{R}$,

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B).$$

Demonstração

Desenvolvendo o membro direito,

$$(A - B)(A + B) = A^2 + AB - AB - B^2 = A^2 - B^2.$$

Exemplo

$$9x^2 - 25y^2 = (3x)^2 - (5y)^2 = (3x - 5y)(3x + 5y).$$

5.1 Fatoração em várias etapas

Exemplo

$$\begin{aligned}x^4 - 16 &= (x^2)^2 - 4^2 \\&= (x^2 - 4)(x^2 + 4) \\&= (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4).\end{aligned}$$

Nos números reais, $x^2 + 4$ não se decompõe em fatores lineares reais.

Diferença, não soma

O padrão exige subtração. Em geral, $A^2 + B^2$ não pode ser fatorado em fatores lineares reais. Já $A^2 - B^2$ possui os fatores conjugados $A - B$ e $A + B$.

6 Trinômio quadrado perfeito

Teorema 6.1: Fatoração de trinômios quadrados perfeitos

Para quaisquer $A, B \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}A^2 + 2AB + B^2 &= (A + B)^2, \\A^2 - 2AB + B^2 &= (A - B)^2.\end{aligned}$$

Critério de reconhecimento

1. O primeiro e o terceiro termos devem ser quadrados.
2. O termo central deve ser o dobro do produto de suas bases.
3. O sinal do termo central determina o sinal no binômio.

Exemplo

Em $16m^2 - 40mn + 25n^2$,

$$16m^2 = (4m)^2, \quad 25n^2 = (5n)^2$$

e

$$-40mn = -2(4m)(5n).$$

Portanto,

$$16m^2 - 40mn + 25n^2 = (4m - 5n)^2.$$

Conferir o termo central

$x^2 + 8x + 9$ não é trinômio quadrado perfeito: as bases dos extremos são x e 3 , mas o dobro do produto seria $6x$, não $8x$.

7 Trinômio $x^2 + sx + p$

Teorema 7.1: Fatoração pelo par soma-produto

Se existem números r e t tais que

$$r + t = s \quad \text{e} \quad rt = p,$$

então

$$x^2 + sx + p = (x + r)(x + t).$$

Demonstração

$$(x + r)(x + t) = x^2 + (r + t)x + rt = x^2 + sx + p.$$

Constante positiva e soma positiva

Para fatorar $x^2 + 7x + 12$, buscamos dois números de produto 12 e soma 7. Os números são 3 e 4:

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4).$$

Constante negativa

Para $x^2 - x - 12$, o produto é -12 , então os números têm sinais opostos. Como $-4 + 3 = -1$ e $(-4) \cdot 3 = -12$,

$$x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3).$$

Sinal de $p = rt$	Sinal de $s = r + t$	Informação
$p > 0$	$s > 0$	r e t positivos
$p > 0$	$s < 0$	r e t negativos
$p < 0$	qualquer	sinais opostos

8 Trinômio geral $ax^2 + bx + c$

Quando $a \neq 1$, uma técnica útil é decompor o termo central e agrupar.

Teorema 8.1: Método do produto ac

Considere $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Se existem m e n tais que

$$m + n = b \quad \text{e} \quad mn = ac,$$

então substituímos bx por $mx + nx$ e fatoramos por agrupamento.

Exemplo

Para $2x^2 + 7x + 3$, temos $ac = 6$. Os números 1 e 6 têm produto 6 e soma 7:

$$\begin{aligned}2x^2 + 7x + 3 &= 2x^2 + x + 6x + 3 \\&= x(2x + 1) + 3(2x + 1) \\&= (2x + 1)(x + 3).\end{aligned}$$

Coeficiente central negativo

Para $3x^2 - 11x - 4$, temos $ac = -12$. Escolhemos 1 e -12 :

$$\begin{aligned}3x^2 - 11x - 4 &= 3x^2 + x - 12x - 4 \\&= x(3x + 1) - 4(3x + 1) \\&= (3x + 1)(x - 4).\end{aligned}$$

Quando não encontramos inteiros

A ausência de um par inteiro não prova que o trinômio seja impossível de fatorar sobre os reais; seus fatores podem envolver números irracionais. Neste curso, priorizamos fatorações com coeficientes inteiros ou racionais simples.

9 Substituição e técnicas combinadas

Substituição $u = x^2$

Em

$$x^4 - 5x^2 + 4,$$

faça $u = x^2$. Então

$$u^2 - 5u + 4 = (u - 1)(u - 4).$$

Voltando a x ,

$$\begin{aligned}x^4 - 5x^2 + 4 &= (x^2 - 1)(x^2 - 4) \\&= (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2).\end{aligned}$$

Fator comum seguido de produto notável

$$\begin{aligned}2x^3 + 8x^2 + 8x &= 2x(x^2 + 4x + 4) \\&= 2x(x + 2)^2.\end{aligned}$$

Ordem eficiente de investigação

1. Existe fator comum em todos os termos?
2. Há quatro termos que podem ser agrupados?

3. Há diferença de quadrados?
4. Há trinômio quadrado perfeito?
5. Há trinômio do segundo grau fatorável?
6. Após fatorar, algum fator ainda pode ser decomposto?

10 Conjunto numérico e irreducibilidade

Definição 10.1: Polinômio irreducível no conjunto considerado

Um polinômio é *irreducível* em um conjunto de coeficientes quando não pode ser escrito como produto de polinômios de grau menor com coeficientes nesse conjunto.

Exemplo

$x^2 - 2$ não se fatora em fatores lineares com coeficientes racionais, pois $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Nos reais,

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

Portanto, a resposta depende do conjunto numérico permitido.

Teorema 10.1: Positividade da soma de quadrados

Para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $a > 0$,

$$x^2 + a^2 > 0.$$

Logo, $x^2 + a^2$ não possui fator linear real.

Demonstração

Como $x^2 \geq 0$ e $a^2 > 0$, a soma é estritamente positiva. Um fator linear real produziria uma raiz real, o que é impossível.

11 Frações algébricas e restrições

Teorema 11.1: Cancelamento de fator não nulo

Se $B \neq 0$, então

$$\frac{AB}{B} = A.$$

Cancelam-se fatores, não parcelas.

Exemplo

Para $x \neq 3$,

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3.$$

A expressão simplificada coincide com a original apenas no domínio original, que exclui $x = 3$.

Não cancelar termos de uma soma

É incorreto cancelar x em

$$\frac{x+3}{x}.$$

O numerador não possui x como fator de todos os termos. Já em $\frac{x(x+3)}{x}$, com $x \neq 0$, o cancelamento é válido.

12 Princípio do produto nulo

Teorema 12.1: Princípio do produto nulo

Para números reais A e B ,

$$AB = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

Demonstração

Se $A = 0$ ou $B = 0$, o produto é zero. Reciprocamente, suponha $AB = 0$. Se $A = 0$, terminamos. Se $A \neq 0$, podemos dividir ambos os lados por A e obter $B = 0$.

Exemplo

Resolver $x^2 - 5x + 6 = 0$:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Logo,

$$(x - 2)(x - 3) = 0 \implies x = 2 \text{ ou } x = 3.$$

O produto deve estar igual a zero

De $(x - 2)(x + 5) = 12$ não podemos concluir $x - 2 = 12$ ou $x + 5 = 12$. O princípio aplica-se somente quando o produto é igual a zero.

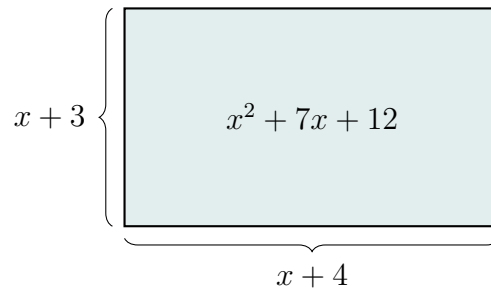
13 Aplicações geométricas e aritméticas

13.1 Dimensões a partir da área

Se uma área retangular é representada por

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4),$$

os fatores podem representar as dimensões $x + 3$ e $x + 4$.



13.2 Divisibilidade por meio de fatores

Teorema 13.1: Produto de três inteiros consecutivos

Para todo $n \in \mathbb{Z}$, o número $n^3 - n$ é divisível por 6.

Demonstração

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1).$$

Os fatores são três inteiros consecutivos. Entre eles há pelo menos um número par, fornecendo fator 2, e exatamente um múltiplo de 3. Portanto, o produto é divisível por $2 \cdot 3 = 6$.

14 Extensão: soma e diferença de cubos

Teorema 14.1: Fatoração de cubos

Para quaisquer $A, B \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} A^3 - B^3 &= (A - B)(A^2 + AB + B^2), \\ A^3 + B^3 &= (A + B)(A^2 - AB + B^2). \end{aligned}$$

Demonstração

Pela distributiva,

$$\begin{aligned} (A - B)(A^2 + AB + B^2) &= A^3 + A^2B + AB^2 - A^2B - AB^2 - B^3 \\ &= A^3 - B^3. \end{aligned}$$

A identidade da soma é verificada analogamente.

Exemplo

$$8x^3 - 27 = (2x)^3 - 3^3 = (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9).$$

15 Tecnologia, investigação e verificação

Uma planilha ou sistema de álgebra computacional pode desenvolver o produto fatorado e compará-lo à expressão original. Porém, a ferramenta não substitui a escolha justificada da técnica.

Teste sistemático de pares

Para fatorar $x^2 + sx + p$ com coeficientes inteiros, construa uma tabela com todos os pares de divisores inteiros de p . Registre a soma de cada par e selecione aquele cuja soma é s . A atividade transforma tentativa aleatória em busca organizada.

Verificação por substituição

Compare a expressão original e a forma fatorada para $x = -2, -1, 0, 1, 2$. Se algum valor produzir resultados diferentes, a fatoração está errada. Se todos coincidirem, ainda é necessário desenvolver o produto para uma prova completa.

16 Erros frequentes e roteiro de decisão

Erros frequentes

- Não extrair o máximo fator comum antes de procurar outro padrão.
- Retirar um fator sem dividir corretamente todos os termos.
- Confundir diferença de quadrados com soma de quadrados.
- Reconhecer um trinômio quadrado perfeito sem conferir o termo central.
- No método soma-produto, conferir somente o produto e esquecer a soma.
- Encerrar antes de fatorar completamente os fatores obtidos.
- Cancelar parcelas em vez de fatores.
- Perder as restrições do denominador original.
- Aplicar o produto nulo quando o produto não está igual a zero.

Roteiro de decisão

1. Ordene e reduza termos semelhantes.
2. Extraia o fator comum máximo.
3. Conte os termos e procure um padrão compatível.
4. Aplique agrupamento ou produto notável inverso.
5. Para trinômios, use soma-produto ou decomposição do termo central.
6. Fatore novamente cada fator, quando possível.

7. Desenvolva o resultado para verificar.
8. Em frações, registre restrições antes de cancelar.

17 Exercícios de consolidação

17.1 Bloco A — Fator comum e agrupamento

- A1. Fatore $6x + 12$.
- A2. Fatore $15a^2b - 10ab^2$.
- A3. Fatore $x^3 + x^2$.
- A4. Fatore $-4y^2 + 12y$.
- A5. Fatore $7mn + 14m$.
- A6. Fatore $3x(a - b) + 5(a - b)$.
- A7. Fatore por agrupamento $ax + ay + bx + by$.
- A8. Fatore $2x^2 - 6x + xy - 3y$.
- A9. Determine o máximo fator comum de $18x^3y^2$ e $24x^2y^3$.
- A10. Fatore completamente $12x^2y - 18xy^2$.
- A11. Verifique por desenvolvimento que $4a(a + 2) - 3(a + 2) = (a + 2)(4a - 3)$.
- A12. Fatore $5x(x - 2) + 3(x - 2)$.

17.2 Bloco B — Produtos notáveis inversos

- B1. Fatore $x^2 - 49$.
- B2. Fatore $9a^2 - 25b^2$.
- B3. Fatore $4x^2 + 12x + 9$.
- B4. Fatore $y^2 - 10y + 25$.
- B5. Fatore $16m^2 - 40mn + 25n^2$.
- B6. Fatore $25p^2 + 20pq + 4q^2$.
- B7. Fatore completamente, com coeficientes inteiros, $81x^4 - 1$.
- B8. Fatore $(x + 3)^2 - 16$.
- B9. Fatore $a^4 - b^4$.
- B10. Fatore completamente, nos reais, $x^4 - 16$.
- B11. Fatore $49x^2 - 70x + 25$.
- B12. Fatore $36a^2 - b^2$.

17.3 Bloco C — Trinômios e técnicas combinadas

- C1. Fatore $x^2 + 7x + 12$.
- C2. Fatore $x^2 - x - 12$.
- C3. Fatore $x^2 - 9x + 20$.
- C4. Fatore $x^2 + 2x - 35$.
- C5. Fatore $x^2 - 16x + 64$.
- C6. Fatore $2x^2 + 7x + 3$.
- C7. Fatore $3x^2 - 11x - 4$.
- C8. Fatore $6x^2 + x - 2$.
- C9. Fatore $4x^2 - 4x - 15$.
- C10. Fatore completamente $x^3 - 4x$.
- C11. Fatore completamente $2x^3 + 8x^2 + 8x$.
- C12. Fatore completamente $x^4 - 5x^2 + 4$.

17.4 Bloco D — Análise e aplicações

- D1. Um aluno afirmou que $x^2 + 6x + 8 = (x + 1)(x + 8)$. Identifique o erro e apresente a fatoração correta.
- D2. Explique por que $x^2 + 4$ não possui fatores lineares reais.
- D3. Determine k para que $x^2 + kx + 24 = (x + 4)(x + 6)$.
- D4. Complete: $4x^2 - \square x + 9 = (2x - 3)^2$.
- D5. Resolva $x^2 - 5x + 6 = 0$ por fatoração.
- D6. Resolva $2x^2 - 8 = 0$ por fatoração.
- D7. Simplifique $\frac{x^2-9}{x-3}$ e declare a restrição.
- D8. Um retângulo de lados x e $x + 2$ tem área 48. Determine suas dimensões positivas por fatoração.

18 Questões de aprofundamento

- P1. Demonstre o critério soma-produto para $x^2 + sx + p$.
- P2. Se $P(x) = (x - r)Q(x)$, demonstre que $P(r) = 0$.
- P3. Fatore $x^6 - 1$ completamente em fatores com coeficientes inteiros.
- P4. Demonstre as fórmulas de fatoração de $A^3 - B^3$ e $A^3 + B^3$.

P5. Demonstre que $n^3 - n$ é múltiplo de 6 para todo $n \in \mathbb{Z}$.

P6. Explique e demonstre por que $x^2 - 2$ é irredutível em $\mathbb{Q}$, mas redutível em $\mathbb{R}$.

19 Avaliação-síntese

S1. Fatore $12x^2 + 18x$.

S2. Fatore $ax + ay + bx + by$.

S3. Fatore $x^2 - 121$.

S4. Fatore $25x^2 - 30x + 9$.

S5. Fatore $x^2 + 11x + 24$.

S6. Fatore $2x^2 - 5x - 3$.

S7. Fatore completamente $x^3 - 9x$.

S8. Fatore completamente $4x^3 + 12x^2 + 9x$.

S9. Resolva $x^2 - 7x + 12 = 0$.

S10. Simplifique $\frac{x^2-16}{x-4}$ e indique a restrição.

S11. Uma área é expressa por $x^2 - 25$. Escreva dimensões algébricas compatíveis para um retângulo.

S12. Dois inteiros positivos consecutivos têm produto 72. Determine-os por meio de uma equação fatorada.

20 Gabarito comentado

20.1 Bloco A

A1. O máximo fator comum é 6:

$$6x + 12 = 6(x + 2).$$

A2. O máximo fator comum é $5ab$:

$$15a^2b - 10ab^2 = 5ab(3a - 2b).$$

A3.

$$x^3 + x^2 = x^2(x + 1).$$

A4. Uma forma com primeiro termo interno positivo é

$$-4y^2 + 12y = -4y(y - 3).$$

Também é correto escrever $4y(3 - y)$.

A5.

$$7mn + 14m = 7m(n + 2).$$

A6. O fator comum é o binômio $a - b$:

$$3x(a - b) + 5(a - b) = (a - b)(3x + 5).$$

A7.

$$\begin{aligned} ax + ay + bx + by &= a(x + y) + b(x + y) \\ &= (a + b)(x + y). \end{aligned}$$

A8.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 6x + xy - 3y &= 2x(x - 3) + y(x - 3) \\ &= (x - 3)(2x + y). \end{aligned}$$

A9. Como $\text{mdc}(18, 24) = 6$ e os menores expoentes comuns são x^2 e y^2 , o máximo fator comum é $6x^2y^2$.

A10.

$$12x^2y - 18xy^2 = 6xy(2x - 3y).$$

A11. Desenvolvendo o membro direito,

$$(a + 2)(4a - 3) = 4a^2 + 8a - 3a - 6 = 4a^2 + 5a - 6.$$

No membro esquerdo,

$$4a(a + 2) - 3(a + 2) = 4a^2 + 8a - 3a - 6 = 4a^2 + 5a - 6.$$

Logo, a identidade é verdadeira.

A12.

$$5x(x - 2) + 3(x - 2) = (x - 2)(5x + 3).$$

20.2 Bloco B

B1.

$$x^2 - 49 = (x - 7)(x + 7).$$

B2.

$$9a^2 - 25b^2 = (3a - 5b)(3a + 5b).$$

B3. Como $12x = 2(2x)(3)$,

$$4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2.$$

B4.

$$y^2 - 10y + 25 = (y - 5)^2.$$

B5.

$$16m^2 - 40mn + 25n^2 = (4m - 5n)^2.$$

B6.

$$25p^2 + 20pq + 4q^2 = (5p + 2q)^2.$$

B7. Aplicando diferença de quadrados duas vezes,

$$\begin{aligned} 81x^4 - 1 &= (9x^2 - 1)(9x^2 + 1) \\ &= (3x - 1)(3x + 1)(9x^2 + 1). \end{aligned}$$

B8.

$$(x + 3)^2 - 16 = [(x + 3) - 4][(x + 3) + 4] = (x - 1)(x + 7).$$

B9.

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2).$$

B10.

$$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4).$$

O fator $x^2 + 4$ não possui fatores lineares reais.

B11.

$$49x^2 - 70x + 25 = (7x - 5)^2.$$

B12.

$$36a^2 - b^2 = (6a - b)(6a + b).$$

20.3 Bloco C

C1. Produto 12 e soma 7: 3 e 4. Logo,

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4).$$

C2. Produto -12 e soma -1 : -4 e 3 . Logo,

$$x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3).$$

C3. Produto 20 e soma -9 : -4 e -5 . Assim,

$$x^2 - 9x + 20 = (x - 4)(x - 5).$$

C4. Produto -35 e soma 2 : 7 e -5 . Portanto,

$$x^2 + 2x - 35 = (x + 7)(x - 5).$$

C5. É um trinômio quadrado perfeito:

$$x^2 - 16x + 64 = (x - 8)^2.$$

C6. Decompondo $7x = x + 6x$,

$$2x^2 + 7x + 3 = (2x + 1)(x + 3).$$

C7. Como $1 + (-12) = -11$ e $1 \cdot (-12) = -12 = 3 \cdot (-4)$,

$$3x^2 - 11x - 4 = (3x + 1)(x - 4).$$

C8. O produto $ac = -12$ e $4 + (-3) = 1$:

$$\begin{aligned} 6x^2 + x - 2 &= 6x^2 + 4x - 3x - 2 \\ &= 2x(3x + 2) - 1(3x + 2) \\ &= (3x + 2)(2x - 1). \end{aligned}$$

C9. O produto $ac = -60$ e $6 + (-10) = -4$:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4x - 15 &= 4x^2 + 6x - 10x - 15 \\ &= 2x(2x + 3) - 5(2x + 3) \\ &= (2x - 5)(2x + 3). \end{aligned}$$

C10.

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2).$$

C11.

$$2x^3 + 8x^2 + 8x = 2x(x^2 + 4x + 4) = 2x(x + 2)^2.$$

C12. Fazendo $u = x^2$,

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 + 4 &= (x^2 - 1)(x^2 - 4) \\ &= (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2). \end{aligned}$$

20.4 Bloco D

D1. No produto proposto, os números 1 e 8 têm produto 8, mas soma 9, não 6. Como $2 \cdot 4 = 8$ e $2 + 4 = 6$,

$$x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4).$$

D2. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ e, portanto, $x^2 + 4 \geq 4 > 0$. A expressão não possui raiz real; logo, não possui fator linear real.

D3. Desenvolvendo,

$$(x + 4)(x + 6) = x^2 + 10x + 24.$$

Portanto, $k = 10$.

D4.

$$(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9.$$

A lacuna é 12.

D5.

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) = 0.$$

Pelo produto nulo, $x = 2$ ou $x = 3$.

D6.

$$2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4) = 2(x - 2)(x + 2) = 0.$$

Portanto, $x = 2$ ou $x = -2$.

D7. A restrição original é $x \neq 3$. Então

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3, \quad x \neq 3.$$

D8. A equação é

$$x(x + 2) = 48 \implies x^2 + 2x - 48 = 0.$$

Fatorando,

$$(x + 8)(x - 6) = 0.$$

As soluções são $x = -8$ e $x = 6$, mas apenas $x = 6$ é comprimento positivo. As dimensões são 6 e 8.

20.5 Questões de aprofundamento

P1. Se $r + t = s$ e $rt = p$, então

$$(x + r)(x + t) = x^2 + (r + t)x + rt = x^2 + sx + p.$$

Isso demonstra o critério.

P2. Substituindo $x = r$ em $P(x) = (x - r)Q(x)$,

$$P(r) = (r - r)Q(r) = 0 \cdot Q(r) = 0.$$

P3.

$$\begin{aligned}x^6 - 1 &= (x^3 - 1)(x^3 + 1) \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1).\end{aligned}$$

Os dois fatores quadráticos não se fatoram com coeficientes inteiros.

P4. Desenvolvendo,

$$\begin{aligned}(A - B)(A^2 + AB + B^2) &= A^3 - B^3, \\ (A + B)(A^2 - AB + B^2) &= A^3 + B^3,\end{aligned}$$

pois os termos mistos se cancelam em cada produto.

P5.

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1).$$

Entre três inteiros consecutivos, um é múltiplo de 3 e pelo menos um é par. Logo, o produto possui os fatores 2 e 3 e é múltiplo de 6.

P6. Se $x^2 - 2$ tivesse fator linear racional, possuiria raiz racional r com $r^2 = 2$, isto é, $r = \pm\sqrt{2}$, mas $\sqrt{2}$ é irracional. Portanto, é irredutível em $\mathbb{Q}$. Em $\mathbb{R}$, as raízes pertencem ao conjunto e

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

20.6 Avaliação-síntese

S1.

$$12x^2 + 18x = 6x(2x + 3).$$

S2.

$$ax + ay + bx + by = (a + b)(x + y).$$

S3.

$$x^2 - 121 = (x - 11)(x + 11).$$

S4.

$$25x^2 - 30x + 9 = (5x - 3)^2.$$

S5. Produto 24 e soma 11: 3 e 8. Logo,

$$x^2 + 11x + 24 = (x + 3)(x + 8).$$

S6. Como $1 + (-6) = -5$ e $1 \cdot (-6) = -6 = 2 \cdot (-3)$,

$$2x^2 - 5x - 3 = (2x + 1)(x - 3).$$

S7.

$$x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x - 3)(x + 3).$$

S8.

$$4x^3 + 12x^2 + 9x = x(4x^2 + 12x + 9) = x(2x + 3)^2.$$

S9.

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4) = 0.$$

Portanto, $x = 3$ ou $x = 4$.

S10. A restrição é $x \neq 4$. Assim,

$$\frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4} = x + 4, \quad x \neq 4.$$

S11.

$$x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5).$$

Assim, dimensões compatíveis são $x - 5$ e $x + 5$, com $x > 5$ em uma situação geométrica.

S12. Seja n o menor inteiro. Então

$$n(n + 1) = 72 \implies n^2 + n - 72 = 0.$$

Fatorando,

$$(n + 9)(n - 8) = 0.$$

Como os inteiros são positivos, $n = 8$. Os números são 8 e 9.

21 Resumo final

Mapa de fatorações essenciais

$$\begin{aligned} AB + AC &= A(B + C), \\ A^2 - B^2 &= (A - B)(A + B), \\ A^2 + 2AB + B^2 &= (A + B)^2, \\ A^2 - 2AB + B^2 &= (A - B)^2, \\ x^2 + (r + t)x + rt &= (x + r)(x + t), \\ A^3 - B^3 &= (A - B)(A^2 + AB + B^2), \\ A^3 + B^3 &= (A + B)(A^2 - AB + B^2). \end{aligned}$$

- Fatorar é aplicar distributividade e produtos notáveis no sentido inverso.
- O fator comum deve ser procurado antes dos demais padrões.
- Uma fatoração precisa ser verificada por desenvolvimento.
- A fatoração completa pode exigir mais de uma técnica.
- O conjunto numérico permitido influencia os fatores possíveis.
- Em frações, cancelam-se fatores não nulos e preservam-se restrições.
- O produto nulo transforma fatores em soluções de equações.
- A forma fatorada revela dimensões, raízes e propriedades aritméticas.

Referência normativa

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Matemática, 9º ano, habilidade EF09MA09. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.

Fim do curso — Fatoração de Expressões Algébricas