

# Equações Polinomiais do Segundo Grau por Fatoração

Curso completo de Matemática — 9º ano do Ensino Fundamental

Alinhado à habilidade EF09MA09 da BNCC

---

## Sumário

|           |                                                           |           |
|-----------|-----------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b>  | <b>Apresentação e objetivos de aprendizagem</b>           | <b>1</b>  |
| <b>2</b>  | <b>Equações, soluções e equivalência</b>                  | <b>1</b>  |
| <b>3</b>  | <b>Definição e forma reduzida</b>                         | <b>2</b>  |
| 3.1       | Redução à forma padrão . . . . .                          | 3         |
| <b>4</b>  | <b>Classificação: completa e incompleta</b>               | <b>3</b>  |
| <b>5</b>  | <b>Princípio do produto nulo</b>                          | <b>3</b>  |
| <b>6</b>  | <b>Equações incompletas com fator comum</b>               | <b>4</b>  |
| <b>7</b>  | <b>Equações incompletas sem termo linear</b>              | <b>5</b>  |
| <b>8</b>  | <b>Trinômios quadrados perfeitos</b>                      | <b>5</b>  |
| <b>9</b>  | <b>Equações completas por soma e produto</b>              | <b>6</b>  |
| <b>10</b> | <b>Equações completas com coeficiente principal geral</b> | <b>6</b>  |
| <b>11</b> | <b>Relações entre raízes e coeficientes</b>               | <b>7</b>  |
| <b>12</b> | <b>Raízes e representação gráfica</b>                     | <b>7</b>  |
| <b>13</b> | <b>Equações redutíveis e restrições</b>                   | <b>8</b>  |
| <b>14</b> | <b>Modelagem de problemas</b>                             | <b>9</b>  |
| 14.1      | Área de retângulo . . . . .                               | 9         |
| 14.2      | Números consecutivos . . . . .                            | 9         |
| 14.3      | Movimento vertical simplificado . . . . .                 | 10        |
| <b>15</b> | <b>Extensão: completar quadrados e fórmula geral</b>      | <b>10</b> |

|                                                       |           |
|-------------------------------------------------------|-----------|
| <b>16 Tecnologia e investigação</b>                   | <b>11</b> |
| <b>17 Erros frequentes e roteiro de resolução</b>     | <b>11</b> |
| <b>18 Exercícios de consolidação</b>                  | <b>13</b> |
| 18.1 Bloco A — Conceitos e classificação . . . . .    | 13        |
| 18.2 Bloco B — Resolução por fatoração . . . . .      | 13        |
| 18.3 Bloco C — Modelagem e aplicações . . . . .       | 14        |
| 18.4 Bloco D — Análise crítica e elaboração . . . . . | 14        |
| <b>19 Questões de aprofundamento</b>                  | <b>14</b> |
| <b>20 Avaliação-síntese</b>                           | <b>15</b> |
| <b>21 Gabarito comentado</b>                          | <b>16</b> |
| 21.1 Bloco A . . . . .                                | 16        |
| 21.2 Bloco B . . . . .                                | 16        |
| 21.3 Bloco C . . . . .                                | 17        |
| 21.4 Bloco D . . . . .                                | 18        |
| 21.5 Questões de aprofundamento . . . . .             | 19        |
| 21.6 Avaliação-síntese . . . . .                      | 20        |
| <b>22 Resumo final</b>                                | <b>21</b> |

# 1 Apresentação e objetivos de aprendizagem

Uma equação do segundo grau relaciona uma incógnita ao seu quadrado. Muitas situações de área, produtos de números, movimento e otimização elementar levam a esse tipo de modelo. Neste curso, o método central será a fatoração: a equação é transformada em um produto igual a zero e cada fator é analisado.

Ao concluir este curso, espera-se que o estudante seja capaz de:

- reconhecer uma equação polinomial do segundo grau;
- identificar os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  na forma reduzida;
- distinguir equações completas e incompletas;
- compreender solução, raiz, conjunto-solução e multiplicidade;
- aplicar corretamente o princípio do produto nulo;
- resolver equações por fator comum e produtos notáveis;
- fatorar trinômios e obter suas raízes;
- verificar soluções na equação original;
- interpretar soma e produto das raízes;
- relacionar raízes, fatores e interceptos de um gráfico;
- modelar e validar problemas em diferentes contextos;
- reconhecer limites e restrições de cada modelo.

## Correspondência com a BNCC

Este curso completa a habilidade **EF09MA09**: compreender processos de fatoração e produtos notáveis para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do segundo grau. A resolução por fatoração é o foco normativo; a fórmula geral aparece apenas como extensão.

# 2 Equações, soluções e equivalência

## Definição 2.1: Equação

Uma *equação* é uma igualdade que contém uma ou mais incógnitas. Resolver a equação significa determinar todos os valores que tornam a igualdade verdadeira.

## Definição 2.2: Raiz ou solução

Uma *raiz* ou *solução* de uma equação em  $x$  é um número que, substituído no lugar de  $x$ , produz uma igualdade verdadeira.

### Conjunto-solução

O conjunto de todas as soluções é indicado por  $S$ . Por exemplo, se as soluções são 2 e 5, escrevemos

$$S = \{2, 5\}.$$

Se não há solução real, escrevemos  $S = \emptyset$  em  $\mathbb{R}$ .

### Definição 2.3: Equações equivalentes

Duas equações são *equivalentes* quando possuem o mesmo conjunto-solução no conjunto numérico considerado.

### Teorema 2.1: Operações que preservam a equivalência

Uma equação permanece equivalente quando:

- somamos ou subtraímos a mesma expressão em ambos os membros;
- multiplicamos ou dividimos ambos os membros pelo mesmo número não nulo;
- substituímos uma expressão por outra identicamente igual.

### Operações não reversíveis

Elevar ambos os membros ao quadrado ou multiplicar por uma expressão que pode ser zero pode introduzir soluções estranhas ou perder soluções. Sempre confira as respostas na equação original.

## 3 Definição e forma reduzida

### Definição 3.1: Equação polinomial do segundo grau

Uma equação polinomial do segundo grau em  $x$  pode ser escrita na forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0,$$

em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais. O coeficiente  $a$  é quadrático,  $b$  é linear e  $c$  é o termo constante.

### Por que $a \neq 0$ ?

Se  $a = 0$ , o termo  $ax^2$  desaparece. A equação deixa de ser do segundo grau e pode tornar-se uma equação do primeiro grau, uma identidade ou uma impossibilidade.

### Exemplo

Na equação

$$3x^2 - 5x + 2 = 0,$$

temos  $a = 3$ ,  $b = -5$  e  $c = 2$ . O sinal negativo pertence ao coeficiente  $b$ .

### 3.1 Redução à forma padrão

Antes de classificar ou resolver, devemos desenvolver produtos, retirar parênteses, reunir termos semelhantes e levar todos os termos para um membro.

#### Exemplo

$$\begin{aligned}(x+1)(x-2) &= 3 \\ x^2 - x - 2 &= 3 \\ x^2 - x - 5 &= 0.\end{aligned}$$

Assim,  $a = 1$ ,  $b = -1$  e  $c = -5$ .

## 4 Classificação: completa e incompleta

#### Definição 4.1: Equação completa

Uma equação do segundo grau é *completa* quando  $a$ ,  $b$  e  $c$  são todos não nulos.

#### Definição 4.2: Equação incompleta

Uma equação é *incompleta* quando  $b = 0$ ,  $c = 0$  ou ambos. Há três formas:

$$ax^2 + bx = 0, \text{ ou } ax^2 + c = 0, \text{ ou } ax^2 = 0.$$

| Forma           | Técnica imediata                       | Exemplo          |
|-----------------|----------------------------------------|------------------|
| $ax^2 + bx = 0$ | fator comum $x$                        | $3x^2 - 12x = 0$ |
| $ax^2 + c = 0$  | isolar $x^2$ ou diferença de quadrados | $2x^2 - 18 = 0$  |
| $ax^2 = 0$      | dividir por $a$                        | $5x^2 = 0$       |

## 5 Princípio do produto nulo

#### Teorema 5.1: Princípio do produto nulo

Para números reais  $A$  e  $B$ ,

$$AB = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

#### Demonstração

Se  $A = 0$  ou  $B = 0$ , o produto é zero. Reciprocamente, suponha  $AB = 0$ . Se  $A = 0$ , terminamos. Se  $A \neq 0$ , podemos dividir por  $A$  e obter  $B = 0$ .

### Teorema 5.2: Forma fatorada de uma equação quadrática

Se

$$a(x - r_1)(x - r_2) = 0, \quad a \neq 0,$$

então as soluções são  $r_1$  e  $r_2$ .

#### Demonstração

Como  $a \neq 0$ , o produto é zero exatamente quando

$$x - r_1 = 0 \quad \text{ou} \quad x - r_2 = 0.$$

Logo,  $x = r_1$  ou  $x = r_2$ .

#### O produto precisa ser igual a zero

De  $(x-2)(x+3) = 6$  não podemos concluir que um fator vale zero. Primeiro é necessário transformar a equação em uma expressão igual a zero.

## 6 Equações incompletas com fator comum

### Teorema 6.1: Caso $ax^2 + bx = 0$

Para  $a \neq 0$ ,

$$ax^2 + bx = x(ax + b).$$

Portanto,

$$ax^2 + bx = 0 \implies x = 0 \text{ ou } x = -\frac{b}{a}.$$

#### Exemplo

$$3x^2 - 12x = 0$$

$$3x(x - 4) = 0.$$

Logo,  $x = 0$  ou  $x = 4$ , e  $S = \{0, 4\}$ .

#### Não dividir pela incógnita

Dividir  $x^2 - 5x = 0$  por  $x$  produziria  $x - 5 = 0$  e perderia a solução  $x = 0$ . O correto é fatorar:  $x(x - 5) = 0$ .

## 7 Equações incompletas sem termo linear

### Teorema 7.1: Caso $ax^2 + c = 0$

Para  $a \neq 0$ ,

$$ax^2 + c = 0 \iff x^2 = -\frac{c}{a}.$$

No conjunto dos reais:

- se  $-c/a > 0$ , há duas raízes opostas;
- se  $-c/a = 0$ , há uma raiz 0;
- se  $-c/a < 0$ , não há raiz real.

### Exemplo

$$\begin{aligned}5x^2 - 45 &= 0 \\5(x^2 - 9) &= 0 \\5(x - 3)(x + 3) &= 0.\end{aligned}$$

Portanto,  $S = \{-3, 3\}$ .

### Ausência de solução real

Em  $x^2 + 4 = 0$ , teríamos  $x^2 = -4$ . Como o quadrado de um real é não negativo, não existe solução real:  $S = \emptyset$  em  $\mathbb{R}$ .

## 8 Trinômios quadrados perfeitos

### Teorema 8.1: Equação quadrada perfeita

Se

$$(px + q)^2 = 0,$$

então  $px + q = 0$  e a única raiz é  $x = -q/p$ , para  $p \neq 0$ . Essa raiz é chamada *raiz dupla*.

### Exemplo

$$\begin{aligned}x^2 + 8x + 16 &= 0 \\(x + 4)^2 &= 0 \\x + 4 &= 0.\end{aligned}$$

Logo,  $x = -4$  é raiz dupla.

### Definição 8.1: Multiplicidade

Na forma fatorada, a multiplicidade de uma raiz é o número de vezes que seu fator se repete. Em  $(x - r)^2 = 0$ , a raiz  $r$  possui multiplicidade 2.

## 9 Equações completas por soma e produto

### Teorema 9.1: Caso mônico

Se  $r + t = s$  e  $rt = p$ , então

$$x^2 + sx + p = (x + r)(x + t).$$

Assim, as raízes da equação  $x^2 + sx + p = 0$  são  $-r$  e  $-t$ .

### Exemplo

Resolver  $x^2 - 7x + 12 = 0$ . Buscamos dois números de produto 12 e soma  $-7$ :  $-3$  e  $-4$ . Portanto,

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4) = 0,$$

e  $S = \{3, 4\}$ .

### Exemplo

$$x^2 + x - 20 = (x + 5)(x - 4) = 0.$$

Logo,  $S = \{-5, 4\}$ .

## 10 Equações completas com coeficiente principal geral

Quando  $a \neq 1$ , podemos decompor o termo central e fatorar por agrupamento.

### Exemplo

Resolver  $2x^2 + 5x + 2 = 0$ . Como  $ac = 4$ , buscamos números de produto 4 e soma 5: 1 e 4.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5x + 2 &= 2x^2 + x + 4x + 2 \\ &= x(2x + 1) + 2(2x + 1) \\ &= (2x + 1)(x + 2). \end{aligned}$$

Logo,

$$2x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 2 = 0,$$

e  $S = \left\{-2, -\frac{1}{2}\right\}$ .

### Exemplo

$$\begin{aligned}3x^2 - 10x - 8 &= 3x^2 + 2x - 12x - 8 \\&= x(3x + 2) - 4(3x + 2) \\&= (3x + 2)(x - 4).\end{aligned}$$

Assim,  $S = \left\{-\frac{2}{3}, 4\right\}$ .

## 11 Relações entre raízes e coeficientes

### Teorema 11.1: Forma fatorada pelas raízes

Se  $r_1$  e  $r_2$  são as raízes de  $ax^2 + bx + c$ , com  $a \neq 0$ , então

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2).$$

### Teorema 11.2: Relações de soma e produto

Para as raízes  $r_1$  e  $r_2$  de  $ax^2 + bx + c = 0$ ,

$$\boxed{r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}}, \quad \boxed{r_1 r_2 = \frac{c}{a}}.$$

### Demonstração

Desenvolvendo a forma fatorada,

$$\begin{aligned}a(x - r_1)(x - r_2) &= a[x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2] \\&= ax^2 - a(r_1 + r_2)x + ar_1 r_2.\end{aligned}$$

Comparando com  $ax^2 + bx + c$ , obtemos  $-a(r_1 + r_2) = b$  e  $ar_1 r_2 = c$ .

### Exemplo

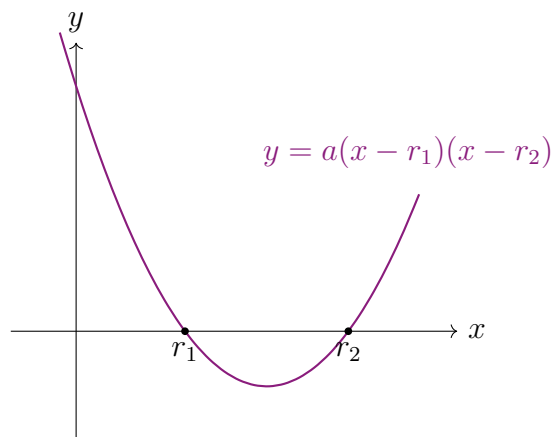
Em  $3x^2 - 12x + 9 = 0$ , a soma das raízes é 4 e o produto é 3. De fato,

$$3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3),$$

cujas raízes são 1 e 3.

## 12 Raízes e representação gráfica

Considere a função quadrática  $y = ax^2 + bx + c$ . As raízes da equação  $ax^2 + bx + c = 0$  são exatamente as abscissas dos pontos em que o gráfico encontra o eixo  $x$ .



### Três possibilidades reais

Uma parábola pode cortar o eixo  $x$  em dois pontos, tocá-lo em um único ponto associado a uma raiz dupla, ou não encontrá-lo. Isso corresponde a duas, uma ou nenhuma raiz real distinta.

## 13 Equações redutíveis e restrições

Algumas equações não são inicialmente quadráticas, mas podem ser reduzidas por substituição. Outras contêm denominadores e exigem restrições.

### Equação biquadrada fatorável

Resolver

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$$

Fatorando,

$$(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0.$$

Logo,  $x^2 = 1$  ou  $x^2 = 4$ , e

$$S = \{-2, -1, 1, 2\}.$$

Essa é uma equação de quarto grau redutível, não uma equação quadrática.

### Restrição de domínio

Considere

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = 0.$$

O domínio exige  $x \neq 3$ . Como

$$\frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3 \quad (x \neq 3),$$

a única solução é  $x = -3$ . O valor 3 nunca pode ser recuperado.

## 14 Modelagem de problemas

### Etapas de modelagem

1. Defina a incógnita e sua unidade.
2. Traduza as relações do enunciado para expressões.
3. Construa e reduza a equação.
4. Resolva por fatoração.
5. Verifique as raízes na equação original.
6. Descarte valores incompatíveis com o contexto.
7. Responda com unidade e interpretação.

### 14.1 Área de retângulo

#### Exemplo

Um retângulo tem largura  $x$  e comprimento  $x + 3$ , com área  $40 \text{ m}^2$ . Então

$$x(x + 3) = 40 \implies x^2 + 3x - 40 = 0.$$

Fatorando,

$$(x + 8)(x - 5) = 0.$$

As raízes são  $-8$  e  $5$ , mas comprimento não pode ser negativo. Portanto, as dimensões são  $5 \text{ m}$  e  $8 \text{ m}$ .

### 14.2 Números consecutivos

#### Exemplo

Dois inteiros positivos consecutivos têm produto  $56$ . Se o menor é  $n$ ,

$$n(n + 1) = 56 \implies n^2 + n - 56 = 0.$$

Como  $(n + 8)(n - 7) = 0$ , temos  $n = -8$  ou  $n = 7$ . Pelo contexto, os números são  $7$  e  $8$ .

## 14.3 Movimento vertical simplificado

### Exemplo

A altura, em metros, de um objeto é  $h(t) = -5t^2 + 20t$ . Para encontrar quando ele está no solo, fazemos  $h(t) = 0$ :

$$-5t(t - 4) = 0.$$

Logo,  $t = 0$  representa o lançamento e  $t = 4$  s representa o retorno ao solo.

## 15 Extensão: completar quadrados e fórmula geral

Esta seção amplia o curso. A habilidade EF09MA09 não exige especificamente a fórmula geral, mas ela mostra que toda equação quadrática pode ser resolvida quando trabalhamos nos reais ou nos complexos adequados.

### Teorema 15.1: Fórmula geral

Para  $ax^2 + bx + c = 0$ , com  $a \neq 0$ , defina

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Quando  $\Delta \geq 0$ , as raízes reais são

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

### Demonstração

Dividindo a equação por  $a$  e completando o quadrado,

$$\begin{aligned}x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a}, \\x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}, \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{\Delta}{4a^2}.\end{aligned}$$

Extraindo as raízes e isolando  $x$ ,

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

### Teorema 15.2: Classificação pelo discriminante

No conjunto dos reais:

- $\Delta > 0$ : duas raízes reais distintas;
- $\Delta = 0$ : uma raiz real dupla;
- $\Delta < 0$ : nenhuma raiz real.

## 16 Tecnologia e investigação

Calculadoras, planilhas e sistemas de álgebra podem verificar raízes e comparar as formas desenvolvida e fatorada. Uma planilha pode avaliar  $f(x) = ax^2 + bx + c$  em uma lista de valores e localizar mudanças de sinal.

### Tabela de verificação

Para  $f(x) = x^2 - 7x + 12$ , calcule  $f(x)$  para  $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . Identifique os zeros e compare-os aos fatores  $(x - 3)(x - 4)$ . Depois altere o termo constante e observe como as raízes mudam.

### Conferência independente

Após resolver uma equação por fatoração, substitua cada raiz na equação original e também confira a soma e o produto pelas relações  $r_1 + r_2 = -b/a$  e  $r_1 r_2 = c/a$ .

## 17 Erros frequentes e roteiro de resolução

### Erros frequentes

- Não reduzir a equação à forma igual a zero.
- Dividir pela incógnita e perder a raiz zero.
- Aplicar o produto nulo quando o produto não vale zero.
- Trocar sinais ao transpor termos.
- Fatorar um trinômio sem conferir soma e produto.
- Esquecer o coeficiente principal  $a$ .
- Aceitar dimensões, tempos ou quantidades negativas sem interpretar.
- Confundir raiz dupla com duas raízes distintas.
- Não verificar respostas na equação original.

### Roteiro seguro

1. Defina o domínio e reduza a equação a  $ax^2 + bx + c = 0$ .
2. Identifique  $a$ ,  $b$  e  $c$  com seus sinais.
3. Procure fator comum e produtos notáveis.
4. Fatore completamente.
5. Aplique o princípio do produto nulo.
6. Resolva cada equação de primeiro grau obtida.
7. Verifique todas as raízes na equação original.

8. Interprete e descarte valores incompatíveis com o contexto.

## 18 Exercícios de consolidação

### 18.1 Bloco A — Conceitos e classificação

- A1.** Identifique  $a$ ,  $b$  e  $c$  em  $3x^2 - 5x + 2 = 0$ .
- A2.** Classifique  $7x^2 - 14x = 0$  como completa ou incompleta.
- A3.** Classifique  $4x^2 - 36 = 0$  e indique o coeficiente ausente.
- A4.** Classifique  $5x^2 = 0$ .
- A5.** Resolva mentalmente  $x(x - 4) = 0$ .
- A6.** Resolva mentalmente  $(x + 3)(x - 7) = 0$ .
- A7.** Verifique se  $x = 2$  é raiz de  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .
- A8.** Reduza  $(x + 1)(x - 2) = 3$  à forma padrão.
- A9.** Explique por que  $\frac{2}{x} + x = 3$  não é uma equação polinomial em seu domínio original.
- A10.** Determine o grau de  $(x^2 - 1)(x + 2) = 0$  após desenvolver.
- A11.** Quantas raízes reais distintas uma equação do segundo grau pode ter?
- A12.** Diferencie a identidade  $(x - 2)(x + 2) = x^2 - 4$  da equação  $(x - 2)(x + 2) = 0$ .

### 18.2 Bloco B — Resolução por fatoração

- B1.** Resolva  $3x^2 - 12x = 0$ .
- B2.** Resolva  $5x^2 - 45 = 0$ .
- B3.** Resolva  $2x^2 = 0$ .
- B4.** Resolva  $x^2 + 8x + 16 = 0$ .
- B5.** Resolva  $x^2 - 7x + 12 = 0$ .
- B6.** Resolva  $x^2 + x - 20 = 0$ .
- B7.** Resolva  $2x^2 + 5x + 2 = 0$ .
- B8.** Resolva  $3x^2 - 10x - 8 = 0$ .
- B9.** Resolva  $4x^2 - 25 = 0$ .
- B10.** Resolva  $(x - 1)^2 = 9$  por diferença de quadrados.
- B11.** Resolva  $(2x + 3)^2 = 0$ .
- B12.** Resolva  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$  e classifique o grau da equação original.

### 18.3 Bloco C — Modelagem e aplicações

- C1. Um retângulo de lados  $x$  e  $x + 3$  tem área  $40 \text{ m}^2$ . Determine as dimensões positivas.
- C2. Dois inteiros positivos consecutivos têm produto 56. Determine-os.
- C3. Um terreno quadrado tem área  $144 \text{ m}^2$ . Determine o lado positivo.
- C4. Um triângulo retângulo tem base  $x + 2$ , altura  $x$  e área 24. Determine base e altura positivas.
- C5. A altura de um objeto é  $h(t) = -5t^2 + 20t$ . Quando ele retorna ao solo após o lançamento?
- C6. Um retângulo tem lados  $x$  e  $x - 4$  e área 45. Determine as dimensões.
- C7. Dois números têm soma 13 e produto 40. Determine-os.
- C8. Um retângulo tem lados  $x$  e  $x + 4$  e área 96. Determine as dimensões.
- C9. Duas idades positivas diferem por 3 anos e seu produto é 108. Determine-as.
- C10. Determine os números reais cujo quadrado é igual a seis vezes o número mais 7.
- C11. A área de um quadrado de lado  $x$  é igual a  $5x + 24$ . Determine o lado positivo.
- C12. Elabore um problema de área representado por  $x^2 + 6x - 16 = 0$ , resolva-o e interprete a raiz admissível.

### 18.4 Bloco D — Análise crítica e elaboração

- D1. Explique o erro de dividir  $x^2 - 5x = 0$  por  $x$  e resolva corretamente.
- D2. Resolva  $(x - 2)(x + 3) = 6$  sem aplicar indevidamente o produto nulo.
- D3. Justifique por que  $x^2 + 4 = 0$  não possui solução real.
- D4. Determine  $k$  para que  $x^2 - kx + 12 = 0$  tenha raízes 3 e 4.
- D5. Resolva  $x^2 - 10x + 25 = 0$  e explique a multiplicidade da raiz.
- D6. Verifique se 2 e 5 são as raízes de  $2x^2 - 14x + 20 = 0$ .
- D7. Construa uma equação quadrática de coeficiente principal 1 cujas raízes sejam  $-2$  e  $6$ .
- D8. Explique por que uma raiz negativa pode ser algebricamente correta e, ainda assim, ser descartada em um problema geométrico.

## 19 Questões de aprofundamento

- P1. Se  $r$  é raiz de  $P(x)$  e  $P(x) = (x - r)Q(x)$ , explique a relação entre raiz e fator.
- P2. Demonstre as relações de soma e produto das raízes.
- P3. Uma equação mônica possui soma das raízes 7 e produto 10. Construa a equação e determine as raízes.

- P4.** Demonstre que uma equação com forma  $a(x - r)^2 = 0$ ,  $a \neq 0$ , possui uma única raiz distinta de multiplicidade 2.
- P5.** Deduza a fórmula geral completando quadrados.
- P6.** Justifique por que uma equação quadrática não nula não pode possuir três raízes reais distintas.

## 20 Avaliação-síntese

- S1.** Classifique  $2x^2 - 3 = 0$  e identifique  $a$ ,  $b$  e  $c$ .
- S2.** Resolva  $6x^2 + 9x = 0$ .
- S3.** Resolva  $x^2 - 81 = 0$ .
- S4.** Resolva  $x^2 + 12x + 36 = 0$ .
- S5.** Resolva  $x^2 - 11x + 28 = 0$ .
- S6.** Resolva  $2x^2 - x - 6 = 0$ .
- S7.** Resolva  $(x + 5)^2 = 16$  por fatoração.
- S8.** Resolva  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ .
- S9.** Determine a soma e o produto das raízes de  $3x^2 - 12x + 9 = 0$  e confirme por fatoração.
- S10.** Um retângulo de lados  $x$  e  $x + 5$  tem área 84. Determine as dimensões.
- S11.** Dois inteiros positivos consecutivos têm produto 90. Determine-os.
- S12.** Construa e verifique uma equação quadrática mônica cujas raízes sejam  $-4$  e  $3$ .

## 21 Gabarito comentado

### 21.1 Bloco A

A1.  $a = 3$ ,  $b = -5$  e  $c = 2$ .

A2. É incompleta, pois  $c = 0$ .

A3. É incompleta e o coeficiente linear está ausente:  $b = 0$ .

A4. É incompleta com  $b = 0$  e  $c = 0$ .

A5. Pelo produto nulo,  $x = 0$  ou  $x = 4$ .

A6.  $x + 3 = 0$  ou  $x - 7 = 0$ . Logo,  $S = \{-3, 7\}$ .

A7. Substituindo  $x = 2$ ,

$$2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0.$$

Portanto, 2 é raiz.

A8.

$$(x + 1)(x - 2) = 3 \implies x^2 - x - 2 = 3 \implies x^2 - x - 5 = 0.$$

A9. A incógnita aparece no denominador. Antes de qualquer transformação,  $x = 0$  é proibido, e a expressão  $2/x$  não é polinomial.

A10.

$$(x^2 - 1)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - x - 2.$$

A equação original é de terceiro grau.

A11. Pode possuir duas raízes reais distintas, uma raiz real dupla ou nenhuma raiz real; portanto, no máximo duas raízes reais distintas.

A12. A primeira igualdade é verdadeira para todo  $x$ , logo é uma identidade. A segunda é verdadeira apenas para  $x = 2$  ou  $x = -2$ , logo é uma equação.

### 21.2 Bloco B

B1.

$$3x^2 - 12x = 3x(x - 4) = 0,$$

então  $S = \{0, 4\}$ .

B2.

$$5x^2 - 45 = 5(x - 3)(x + 3) = 0,$$

portanto  $S = \{-3, 3\}$ .

B3.  $2x^2 = 0$  implica  $x^2 = 0$ , então  $S = \{0\}$ ; a raiz é dupla.

B4.

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2 = 0.$$

Logo,  $S = \{-4\}$ , com raiz dupla.

**B5.**

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4) = 0,$$

então  $S = \{3, 4\}$ .

**B6.**

$$x^2 + x - 20 = (x + 5)(x - 4) = 0,$$

então  $S = \{-5, 4\}$ .

**B7.**

$$2x^2 + 5x + 2 = (2x + 1)(x + 2) = 0.$$

Portanto,  $S = \left\{-2, -\frac{1}{2}\right\}$ .

**B8.**

$$3x^2 - 10x - 8 = (3x + 2)(x - 4) = 0,$$

então  $S = \left\{-\frac{2}{3}, 4\right\}$ .

**B9.**

$$4x^2 - 25 = (2x - 5)(2x + 5) = 0,$$

logo  $S = \left\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\}$ .

**B10.** Levando 9 para o primeiro membro,

$$(x - 1)^2 - 3^2 = 0.$$

Assim,

$$(x - 4)(x + 2) = 0,$$

e  $S = \{-2, 4\}$ .

**B11.**  $(2x + 3)^2 = 0$  implica  $2x + 3 = 0$ . Logo,  $S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ , com raiz dupla.

**B12.**

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0.$$

Portanto,  $x = \pm 1$  ou  $x = \pm 2$  e  $S = \{-2, -1, 1, 2\}$ . A equação é de quarto grau.

## 21.3 Bloco C

**C1.**

$$x(x + 3) = 40 \implies x^2 + 3x - 40 = (x + 8)(x - 5) = 0.$$

A raiz positiva é  $x = 5$ ; as dimensões são 5 m e 8 m.

**C2.**

$$n(n + 1) = 56 \implies n^2 + n - 56 = (n + 8)(n - 7) = 0.$$

Os inteiros positivos são 7 e 8.

**C3.**  $x^2 = 144$  implica  $(x - 12)(x + 12) = 0$ . Como o lado é positivo, mede 12 m.

**C4.**

$$\frac{x(x + 2)}{2} = 24 \implies x^2 + 2x - 48 = (x + 8)(x - 6) = 0.$$

A altura é 6 e a base é 8.

**C5.**

$$-5t^2 + 20t = -5t(t - 4) = 0.$$

Os instantes são 0 e 4 s. Após o lançamento, retorna ao solo em 4 s.

**C6.**

$$x(x - 4) = 45 \implies x^2 - 4x - 45 = (x - 9)(x + 5) = 0.$$

Como  $x = 9$  é a raiz admissível, as dimensões são 9 e 5.

**C7.** Se um número é  $x$ , o outro é  $13 - x$ . Então

$$x(13 - x) = 40 \implies x^2 - 13x + 40 = (x - 5)(x - 8) = 0.$$

Os números são 5 e 8.

**C8.**

$$x(x + 4) = 96 \implies x^2 + 4x - 96 = (x + 12)(x - 8) = 0.$$

As dimensões positivas são 8 e 12.

**C9.** Se a menor idade é  $x$ ,

$$x(x + 3) = 108 \implies x^2 + 3x - 108 = (x + 12)(x - 9) = 0.$$

As idades positivas são 9 e 12 anos.

**C10.**

$$x^2 = 6x + 7 \implies x^2 - 6x - 7 = (x - 7)(x + 1) = 0.$$

Os números reais são 7 e  $-1$ .

**C11.**

$$x^2 = 5x + 24 \implies x^2 - 5x - 24 = (x - 8)(x + 3) = 0.$$

O lado positivo é 8.

**C12.** Resposta pessoal. Exemplo: um retângulo tem lados  $x$  e  $x + 6$  e área 16. Então

$$x(x + 6) = 16 \implies x^2 + 6x - 16 = (x + 8)(x - 2) = 0.$$

A raiz admissível é  $x = 2$ ; as dimensões são 2 e 8.

## 21.4 Bloco D

**D1.** Dividir por  $x$  pressupõe  $x \neq 0$  e elimina indevidamente essa raiz. O correto é

$$x^2 - 5x = x(x - 5) = 0,$$

logo  $S = \{0, 5\}$ .

**D2.** Desenvolvendo e reduzindo,

$$(x - 2)(x + 3) = 6$$

$$x^2 + x - 6 = 6$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x + 4)(x - 3) = 0.$$

Assim,  $S = \{-4, 3\}$ .

**D3.** Para todo real  $x$ ,  $x^2 \geq 0$ , então  $x^2 + 4 \geq 4 > 0$ . A expressão nunca vale zero nos reais.

**D4.** Uma equação mônica de raízes 3 e 4 é

$$(x - 3)(x - 4) = x^2 - 7x + 12 = 0.$$

Portanto,  $k = 7$ .

**D5.**

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2 = 0.$$

A única raiz distinta é 5, e o fator  $x - 5$  aparece duas vezes; sua multiplicidade é 2.

**D6.**

$$2x^2 - 14x + 20 = 2(x^2 - 7x + 10) = 2(x - 2)(x - 5).$$

Logo, 2 e 5 são exatamente as raízes.

**D7.**

$$(x + 2)(x - 6) = x^2 - 4x - 12.$$

Uma equação possível é  $x^2 - 4x - 12 = 0$ .

**D8.** Uma equação descreve relações algébricas, mas o contexto acrescenta restrições. Uma raiz negativa pode satisfazer a igualdade e ainda não representar um comprimento, uma área, uma idade ou uma quantidade física.

## 21.5 Questões de aprofundamento

**P1.** Se  $P(x) = (x - r)Q(x)$ , então

$$P(r) = (r - r)Q(r) = 0.$$

Assim, o fator  $x - r$  produz a raiz  $r$ ; reciprocamente, para polinômios, uma raiz  $r$  está associada ao fator  $x - r$ .

**P2.** Se

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2),$$

o desenvolvimento fornece

$$ax^2 - a(r_1 + r_2)x + ar_1r_2.$$

Comparando coeficientes,

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}, \quad r_1r_2 = \frac{c}{a}.$$

**P3.** A equação mônica é

$$x^2 - 7x + 10 = 0.$$

Como  $(x - 2)(x - 5) = 0$ , as raízes são 2 e 5.

**P4.** Como  $a \neq 0$ ,  $a(x - r)^2 = 0$  equivale a  $(x - r)^2 = 0$ , que implica  $x - r = 0$ . Logo,  $x = r$  é a única raiz distinta. O fator aparece ao quadrado, portanto sua multiplicidade é 2.

**P5.** Dividindo por  $a$  e completando o quadrado,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Extraindo a raiz e isolando  $x$ ,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

**P6.** Se uma quadrática não nula tivesse três raízes distintas  $r_1, r_2, r_3$ , teria os três fatores lineares  $(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$ , cujo produto tem grau 3. Isso contradiz o grau 2. Portanto, há no máximo duas raízes distintas.

## 21.6 Avaliação-síntese

**S1.** É incompleta, pois  $b = 0$ . Temos  $a = 2$ ,  $b = 0$  e  $c = -3$ .

**S2.**

$$6x^2 + 9x = 3x(2x + 3) = 0.$$

Logo,  $S = \left\{-\frac{3}{2}, 0\right\}$ .

**S3.**

$$x^2 - 81 = (x - 9)(x + 9) = 0,$$

então  $S = \{-9, 9\}$ .

**S4.**

$$x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2 = 0.$$

Logo,  $S = \{-6\}$ , com raiz dupla.

**S5.**

$$x^2 - 11x + 28 = (x - 4)(x - 7) = 0,$$

então  $S = \{4, 7\}$ .

**S6.**

$$2x^2 - x - 6 = (2x + 3)(x - 2) = 0.$$

Portanto,  $S = \left\{-\frac{3}{2}, 2\right\}$ .

**S7.**

$$(x + 5)^2 - 4^2 = 0 \implies (x + 1)(x + 9) = 0.$$

Logo,  $S = \{-9, -1\}$ .

**S8.** Fazendo  $u = x^2$ ,

$$u^2 - 13u + 36 = (u - 4)(u - 9) = 0.$$

Assim,  $x^2 = 4$  ou  $x^2 = 9$ , e  $S = \{-3, -2, 2, 3\}$ .

**S9.** Pelas relações,

$$r_1 + r_2 = \frac{12}{3} = 4, \quad r_1 r_2 = \frac{9}{3} = 3.$$

Como  $3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$ , as raízes são 1 e 3.

S10.

$$x(x + 5) = 84 \implies x^2 + 5x - 84 = (x + 12)(x - 7) = 0.$$

As dimensões positivas são 7 e 12.

S11.

$$n(n + 1) = 90 \implies n^2 + n - 90 = (n + 10)(n - 9) = 0.$$

Os inteiros positivos são 9 e 10.

S12.

$$(x + 4)(x - 3) = x^2 + x - 12.$$

Portanto, uma equação é  $x^2 + x - 12 = 0$ . A substituição de  $-4$  ou  $3$  produz zero, confirmando as raízes.

## 22 Resumo final

### Mapa essencial

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0, & a &\neq 0, \\ AB &= 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0, \\ a(x - r_1)(x - r_2) &= 0, \\ r_1 + r_2 &= -\frac{b}{a}, \\ r_1 r_2 &= \frac{c}{a}, \\ \Delta &= b^2 - 4ac, \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}. \end{aligned}$$

- Toda equação deve ser reduzida a uma forma igual a zero antes da fatoração.
- O princípio do produto nulo é a ligação entre fatores e raízes.
- Equações incompletas possuem técnicas diretas e devem ser reconhecidas.
- Uma raiz dupla corresponde a um fator linear repetido.
- Soma e produto das raízes permitem conferir ou construir equações.
- A verificação na equação original evita soluções estranhas.
- O contexto determina quais raízes são admissíveis.
- A fórmula geral amplia o método, mas a fatoração permanece o foco da BNCC.

### Referência normativa

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Matemática, 9º ano, habilidade EF09MA09. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf).

