

Probabilidade e Espaço Amostral

Matemática – 8º Ano

Experimentos aleatórios, espaço amostral, eventos, princípio multiplicativo e cálculo de probabilidades

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste curso, o estudante deverá ser capaz de:

- 1) compreender o conceito de experimento aleatório;
- 2) distinguir fenômenos determinísticos e aleatórios;
- 3) identificar resultados possíveis de um experimento;
- 4) construir espaços amostrais;
- 5) compreender o significado de evento;
- 6) distinguir evento elementar, evento composto, evento certo e evento impossível;
- 7) utilizar linguagem de conjuntos em situações probabilísticas;
- 8) reconhecer resultados equiprováveis;
- 9) calcular probabilidades em espaços amostrais equiprováveis;
- 10) compreender que:
$$0 \leq P(A) \leq 1;$$
- 11) interpretar probabilidades como frações, números decimais e porcentagens;
- 12) compreender que:
$$P(\Omega) = 1;$$
- 13) compreender que:
$$P(\emptyset) = 0;$$
- 14) demonstrar que a soma das probabilidades de todos os resultados elementares é 1;
- 15) utilizar o evento complementar;
- 16) aplicar:
$$P(A^c) = 1 - P(A);$$
- 17) utilizar tabelas e árvores de possibilidades;
- 18) utilizar o princípio multiplicativo da contagem na determinação do número de resultados possíveis;
- 19) calcular probabilidades em lançamentos de moedas, dados e escolhas sucessivas;
- 20) distinguir probabilidade teórica de frequência relativa observada em experimentos.

Sumário

1	Introdução	1
2	Experimentos determinísticos	1
3	Experimentos aleatórios	1
4	Resultado de um experimento	2
5	Espaço amostral	2
6	Exemplo: moeda	2
7	Exemplo: dado	3
8	Evento	3
9	Evento elementar	3
10	Evento composto	4
11	Evento certo	4
12	Evento impossível	4
13	Probabilidade	5
14	Interpretação dos extremos	5
15	Probabilidade em percentagem	5
16	Resultados equiprováveis	6
17	Regra clássica da probabilidade	6
18	Casos favoráveis e casos possíveis	6
19	Exemplo fundamental com dado	7
20	Exemplo com número maior que 4	8
21	Exemplo de evento impossível	8

22 Exemplo de evento certo	9
23 A soma das probabilidades	9
24 Teorema da soma total	10
25 Caso equiprovável	10
26 Exemplo com dado	11
27 Evento complementar	11
28 Exemplo de complementar	11
29 Probabilidade do complementar	12
30 Exemplo com complementar	12
31 Dois lançamentos de uma moeda	13
32 Espaço amostral de duas moedas	13
33 Árvore de possibilidades	14
34 Probabilidade em duas moedas	14
35 Exemplo: exatamente uma cara	14
36 Princípio multiplicativo da contagem	15
37 Exemplo com moeda e dado	16
38 Espaço amostral de moeda e dado	16
39 Exemplo com princípio multiplicativo	17
40 Espaço amostral de três moedas	17
41 Exemplo: três caras	17
42 Exemplo: pelo menos uma cara	18
43 Dois dados	18

44	Representação por pares ordenados	18
45	Tabela para dois dados	19
46	Exemplo: soma igual a 7	19
47	Exemplo: números iguais	20
48	Probabilidade e ordem	21
49	Urna com fichas	21
50	Resultados não necessariamente equiprováveis	22
51	Exemplo com probabilidades dadas	22
52	Probabilidade como frequência relativa	23
53	Probabilidade teórica e experimental	23
54	Exemplo experimental	23
55	Estabilização da frequência relativa	24
56	Eventos mutuamente exclusivos	25
57	Soma de eventos incompatíveis	25
58	Exemplo	25
59	Probabilidade de “não”	26
60	Exemplo: não obter 6	26
61	Exemplo: pelo menos um sucesso	27
62	Problema com cartões numerados	27
63	Problema com divisibilidade	28
64	Problema com escolha de roupa	29
65	Construindo corretamente o espaço amostral	30

66 Estratégia geral para calcular probabilidades	30
67 Erros comuns	31
68 Mapa conceitual	32
69 Resumo teórico	33
70 Exercícios	34
70.1 Parte A – Conceitos	34
70.2 Parte B – Espaços amostrais	34
70.3 Parte C – Eventos em um dado	34
70.4 Parte D – Probabilidade em dado	35
70.5 Parte E – Complementar	35
70.6 Parte F – Duas moedas	36
70.7 Parte G – Três moedas	36
70.8 Parte H – Moeda e dado	36
70.9 Parte I – Dois dados	37
70.10 Parte J – Cartões numerados	37
70.11 Parte K – Soma das probabilidades	37
70.12 Parte L – Frequência experimental	38
70.13 Parte M – Princípio multiplicativo	39
70.14 Parte N – Desafios	39
71 Gabarito comentado	39
71.1 Parte A	39
71.2 Parte B	40
71.3 Parte C	40
71.4 Parte D	41
71.5 Parte E	42
71.6 Parte F	42
71.7 Parte G	43
71.8 Parte H	44
71.9 Parte I	44
71.10 Parte J	45
71.11 Parte K	46

71.12Parte L	47
71.13Parte M	47
71.14Parte N	48
72 Avaliação final	50
72.1 Gabarito da avaliação final	51
73 Conclusão	53

1 Introdução

Nem todos os fenômenos podem ser previstos com certeza.

Se soltarmos um objeto próximo à superfície da Terra, esperamos que ele caia.

Por outro lado, se lançarmos uma moeda, não podemos afirmar previamente se o resultado será:

cara

ou:

coroa.

Mesmo conhecendo todos os resultados possíveis, existe incerteza quanto ao resultado que efetivamente ocorrerá.

A Matemática que estuda quantitativamente situações desse tipo é a:

Probabilidade.

2 Experimentos determinísticos

Definição 2.1: Experimento determinístico

Um experimento é chamado **determinístico** quando, mantidas as mesmas condições, seu resultado pode ser previsto com certeza.

Por exemplo:

$$2 + 3 = 5.$$

O resultado não depende do acaso.

3 Experimentos aleatórios

Definição 3.1: Experimento aleatório

Um **experimento aleatório** é um procedimento cujo resultado individual não pode ser previsto com certeza antes de sua realização, embora os resultados possíveis possam ser conhecidos.

Exemplos:

- lançar uma moeda;
- lançar um dado;

- retirar ao acaso uma ficha de uma urna;
- sortear um número;
- observar o sexo de um filhote ao nascer, em um modelo simplificado;
- escolher aleatoriamente um estudante de uma turma.

4 Resultado de um experimento

Definição 4.1: Resultado

Um **resultado** é uma das possíveis ocorrências individuais de um experimento aleatório.

No lançamento de um dado comum, alguns resultados possíveis são:

1, 2, 3, 4, 5, 6.

Cada número é um resultado possível.

5 Espaço amostral

Definição 5.1: Espaço amostral

O **espaço amostral** de um experimento aleatório é o conjunto de todos os seus resultados possíveis.

Usaremos frequentemente a letra grega:

$$\Omega$$

para representar o espaço amostral.

6 Exemplo: moeda

No lançamento de uma moeda:

$$\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}.$$

Portanto:

$$|\Omega| = 2,$$

onde:

$$|\Omega|$$

representa o número de elementos do espaço amostral.

7 Exemplo: dado

No lançamento de um dado comum de seis faces:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Logo:

$$|\Omega| = 6.$$

8 Evento

Definição 8.1: Evento

Um **evento** é qualquer subconjunto do espaço amostral.

Se:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

podemos definir o evento:

$$A = \{\text{obter número par}\}.$$

Então:

$$A = \{2, 4, 6\}.$$

Como:

$$A \subseteq \Omega,$$

A é um evento.

9 Evento elementar

Definição 9.1: Evento elementar

Um evento é **elementar** quando possui apenas um resultado.

No dado:

$$A = \{4\}$$

é um evento elementar.

10 Evento composto

Definição 10.1: Evento composto

Um evento é **composto** quando contém dois ou mais resultados do espaço amostral.

Por exemplo:

$$B = \{2, 4, 6\}.$$

Esse evento representa:

obter um número par.

11 Evento certo

Definição 11.1: Evento certo

O **evento certo** é aquele que ocorre em qualquer resultado possível do experimento.

Ele coincide com o espaço amostral:

$$A = \Omega.$$

Logo:

$$P(\Omega) = 1.$$

12 Evento impossível

Definição 12.1: Evento impossível

O **evento impossível** é aquele que não possui nenhum resultado favorável.

Ele é representado pelo conjunto vazio:

$$\emptyset.$$

Sua probabilidade é:

$$P(\emptyset) = 0.$$

13 Probabilidade

Definição 13.1: Probabilidade

A probabilidade de um evento é uma medida numérica da possibilidade de esse evento ocorrer.

Uma probabilidade satisfaz:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

14 Interpretação dos extremos

Se:

$$P(A) = 0,$$

o evento é impossível.

Se:

$$P(A) = 1,$$

o evento é certo.

Valores entre 0 e 1 representam diferentes graus de possibilidade.

15 Probabilidade em porcentagem

Uma probabilidade pode ser expressa como:

- fração;
- número decimal;
- porcentagem.

Por exemplo:

$$\frac{1}{4} = 0,25 = 25\%.$$

Portanto:

$$P(A) = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%.$$

16 Resultados equiprováveis

Definição 16.1: Resultados equiprováveis

Resultados são **equiprováveis** quando possuem a mesma probabilidade de ocorrer.

Por exemplo, em um dado ideal:

$$P(1) = P(2) = \dots = P(6).$$

Como existem seis resultados e a soma das probabilidades deve ser 1:

$$P(1) = \frac{1}{6}.$$

17 Regra clássica da probabilidade

Teorema 17.1: Probabilidade em espaço equiprovável

Se todos os resultados de um espaço amostral finito são equiprováveis, então:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)},$$

onde:

$$n(A)$$

é o número de resultados favoráveis ao evento A , e:

$$n(\Omega)$$

é o número total de resultados possíveis.

18 Casos favoráveis e casos possíveis

Podemos escrever:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}.$$

Atenção

Essa fórmula só pode ser utilizada diretamente dessa forma quando os resultados elementares considerados são equiprováveis.

19 Exemplo fundamental com dado

Exemplo

Um dado comum é lançado.

Qual é a probabilidade de obter um número par?

Resolução

O espaço amostral é:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Logo:

$$n(\Omega) = 6.$$

O evento é:

$$A = \{2, 4, 6\}.$$

Assim:

$$n(A) = 3.$$

Portanto:

$$P(A) = \frac{3}{6}.$$

Simplificando:

$$P(A) = \frac{1}{2}.$$

Em porcentagem:

$$P(A) = 50\%.$$

20 Exemplo com número maior que 4

Exemplo

Ao lançar um dado, qual é a probabilidade de obter um número maior que 4?

Resolução

O evento é:

$$A = \{5, 6\}.$$

Logo:

$$n(A) = 2.$$

Como:

$$n(\Omega) = 6,$$

temos:

$$P(A) = \frac{2}{6}.$$

Logo:

$$P(A) = \frac{1}{3}.$$

21 Exemplo de evento impossível

Exemplo

Qual é a probabilidade de obter o número 8 em um dado comum?

Resolução

Como:

$$8 \notin \Omega,$$

não existe resultado favorável.

Logo:

$$n(A) = 0.$$

Assim:

$$P(A) = \frac{0}{6}.$$

Portanto:

$$\boxed{P(A) = 0.}$$

22 Exemplo de evento certo

Exemplo

Qual é a probabilidade de obter um número menor que 7 em um dado comum?

Resolução

Todos os resultados satisfazem a condição:

$$A = \Omega.$$

Portanto:

$$\boxed{P(A) = 1.}$$

Ou:

$$\boxed{P(A) = 100\%.}$$

23 A soma das probabilidades

Considere um espaço amostral finito:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}.$$

Como exatamente um dos resultados elementares ocorre a cada realização do experimento, temos:

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots + P(\omega_n) = 1.$$

24 Teorema da soma total

Teorema 24.1: Soma das probabilidades dos resultados elementares

Se:

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\},$$

então:

$$\sum_{i=1}^n P(\omega_i) = 1.$$

Essa propriedade é fundamental em Probabilidade.

25 Caso equiprovável

Se os n resultados são equiprováveis, então existe um número p tal que:

$$P(\omega_i) = p$$

para todos os resultados.

Como:

$$p + p + \cdots + p = 1,$$

com n parcelas, temos:

$$np = 1.$$

Logo:

$$p = \frac{1}{n}.$$

Assim, cada resultado elementar possui probabilidade:

$$\frac{1}{n(\Omega)}.$$

26 Exemplo com dado

Em um dado ideal:

$$6 \cdot \frac{1}{6} = 1.$$

Portanto:

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1.$$

27 Evento complementar

Definição 27.1: Evento complementar

O evento complementar de A , indicado por A^c , é o evento formado por todos os resultados do espaço amostral que não pertencem a A .

Em símbolos:

$$A^c = \Omega \setminus A.$$

28 Exemplo de complementar

Considere:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Se:

$$A = \{2, 4, 6\},$$

então:

$$A^c = \{1, 3, 5\}.$$

Logo:

$$A^c$$

representa:

$$\text{obter número ímpar.}$$

29 Probabilidade do complementar

Teorema 29.1: Probabilidade do evento complementar

Para qualquer evento A :

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Isso ocorre porque:

$$A \cup A^c = \Omega$$

e:

$$A \cap A^c = \emptyset.$$

Assim:

$$P(A) + P(A^c) = 1.$$

30 Exemplo com complementar

Exemplo

A probabilidade de chover em determinado modelo é:

$$0,35.$$

Qual é a probabilidade de não chover?

Resolução

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Logo:

$$P(A^c) = 1 - 0,35.$$

Portanto:

$$P(A^c) = 0,65.$$

Ou:

$$65\%.$$

31 Dois lançamentos de uma moeda

Considere o lançamento de uma moeda duas vezes.

Em cada lançamento temos:

$$2$$

possibilidades.

Pelo princípio multiplicativo:

$$2 \cdot 2 = 4.$$

Portanto existem:

$$\boxed{4}$$

resultados possíveis.

32 Espaço amostral de duas moedas

Representando:

$$C = \text{cara}$$

e:

$$K = \text{coroa},$$

temos:

$$\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}.$$

Observe que:

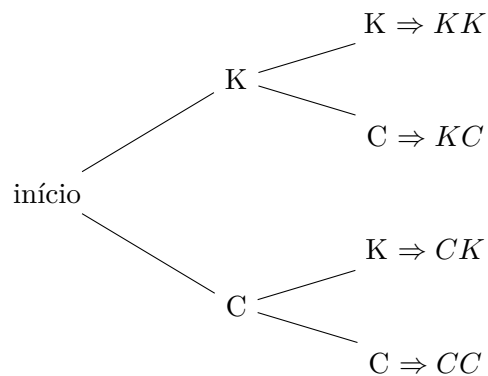
$$CK$$

e:

$$KC$$

são resultados diferentes, pois correspondem a ordens diferentes.

33 Árvore de possibilidades



A árvore ajuda a organizar sistematicamente todos os resultados.

34 Probabilidade em duas moedas

Se as moedas são ideais, os quatro resultados são equiprováveis.

Assim:

$$P(CC) = P(CK) = P(KC) = P(KK) = \frac{1}{4}.$$

35 Exemplo: exatamente uma cara

Exemplo

Duas moedas são lançadas.

Qual é a probabilidade de obter exatamente uma cara?

Resolução

O espaço amostral é:

$$\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}.$$

O evento é:

$$A = \{CK, KC\}.$$

Assim:

$$n(A) = 2$$

e:

$$n(\Omega) = 4.$$

Logo:

$$P(A) = \frac{2}{4}.$$

Portanto:

$$P(A) = \frac{1}{2}.$$

36 Princípio multiplicativo da contagem

Teorema 36.1: Princípio multiplicativo

Se uma experiência ocorre em etapas sucessivas, com:

$$n_1$$

possibilidades na primeira etapa,

$$n_2$$

na segunda,

e assim por diante, então o número total de resultados possíveis é:

$$n_1 n_2 \cdots n_k,$$

desde que cada sequência completa de escolhas corresponda a um resultado.

37 Exemplo com moeda e dado

Exemplo

Uma moeda e um dado são lançados.
Quantos resultados possíveis existem?

Resolução

A moeda possui:

2

resultados.

O dado possui:

6

resultados.

Logo:

$$2 \cdot 6 = 12.$$

Portanto:

$$|\Omega| = 12.$$

38 Espaço amostral de moeda e dado

Podemos escrever:

$$\Omega = \{(C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 5), (C, 6),$$

$$(K, 1), (K, 2), (K, 3), (K, 4), (K, 5), (K, 6)\}.$$

Logo:

$$|\Omega| = 12.$$

39 Exemplo com princípio multiplicativo

Exemplo

Uma moeda é lançada três vezes.
Quantos resultados possíveis existem?

Resolução

Cada lançamento possui:

2

resultados.

Logo:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3.$$

Assim:

$$|\Omega| = 8.$$

40 Espaço amostral de três moedas

Temos:

$$\Omega = \{CCC, CCK, CKC, CKK, KCC, KCK, KKC, KKK\}.$$

Portanto:

$$|\Omega| = 8.$$

41 Exemplo: três caras

A probabilidade de obter três caras é:

$$P(\{CCC\}) = \frac{1}{8}.$$

Logo:

$$P(\text{três caras}) = \frac{1}{8}.$$

42 Exemplo: pelo menos uma cara

Exemplo

Três moedas ideais são lançadas.

Qual é a probabilidade de obter pelo menos uma cara?

Resolução

Podemos contar diretamente todos os resultados com pelo menos uma cara.

Entretanto, é mais simples usar o complementar.

O único resultado sem nenhuma cara é:

KKK .

Então:

$$P(\text{nenhuma cara}) = \frac{1}{8}.$$

Logo:

$$P(\text{pelo menos uma cara}) = 1 - \frac{1}{8}.$$

Portanto:

$$P = \frac{7}{8}.$$

43 Dois dados

Ao lançar dois dados, cada dado possui:

6

resultados.

Pelo princípio multiplicativo:

$$6 \cdot 6 = 36.$$

Logo:

$$|\Omega| = 36.$$

44 Representação por pares ordenados

Os resultados podem ser representados como:

$$(i, j),$$

onde:

$$i$$

é o resultado do primeiro dado e:

$$j$$

o resultado do segundo.

Por exemplo:

$$(2, 5)$$

é diferente de:

$$(5, 2).$$

45 Tabela para dois dados

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

46 Exemplo: soma igual a 7

Exemplo

Dois dados ideais são lançados.
Qual é a probabilidade de a soma ser 7?

Resolução

Os resultados favoráveis são:

$$(1, 6),$$

$$(2, 5),$$

$$(3, 4),$$

$$(4, 3),$$

$$(5, 2),$$

$$(6, 1).$$

Logo:

$$n(A) = 6.$$

Como:

$$n(\Omega) = 36,$$

temos:

$$P(A) = \frac{6}{36}.$$

Portanto:

$$P(A) = \frac{1}{6}.$$

47 Exemplo: números iguais

Exemplo

Dois dados são lançados.

Qual é a probabilidade de obter números iguais?

Resolução

Os resultados são:

$$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6).$$

Logo:

$$n(A) = 6.$$

Portanto:

$$P(A) = \frac{6}{36} = \boxed{\frac{1}{6}}.$$

48 Probabilidade e ordem

Atenção

Em experimentos sucessivos, a ordem dos resultados pode ser importante.
Por exemplo:

$$(2, 5) \neq (5, 2),$$

quando distinguimos o primeiro e o segundo lançamento.
Por isso, ambos devem aparecer no espaço amostral.

49 Urna com fichas

Considere uma urna contendo:

3

fichas vermelhas e:

2

fichas azuis, todas igualmente prováveis de serem retiradas.

Existem:

5

fichas.

Logo:

$$P(\text{vermelha}) = \frac{3}{5}$$

e:

$$P(\text{azul}) = \frac{2}{5}.$$

Observe:

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1.$$

50 Resultados não necessariamente equiprováveis

Atenção

Nem todo experimento possui resultados equiprováveis.
Por exemplo, uma roleta pode ter regiões de tamanhos diferentes.
Nesse caso, não podemos simplesmente escrever:

$$P(A) = \frac{\text{quantidade de nomes favoráveis}}{\text{quantidade de nomes possíveis}}.$$

Precisamos conhecer as probabilidades associadas aos resultados.

51 Exemplo com probabilidades dadas

Considere:

$$\Omega = \{A, B, C\}$$

com:

$$P(A) = 0,2,$$

$$P(B) = 0,5.$$

Qual é:

$$P(C)?$$

Como:

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1,$$

temos:

$$0,2 + 0,5 + P(C) = 1.$$

Logo:

$$P(C) = 0,3.$$

Portanto:

$$P(C) = 0,3.$$

52 Probabilidade como frequência relativa

Quando repetimos muitas vezes um experimento, podemos observar a frequência de ocorrência de um evento.

Definição 52.1: Frequência relativa

Se um evento ocorre f vezes em n realizações de um experimento, sua frequência relativa é:

$$\frac{f}{n}.$$

53 Probabilidade teórica e experimental

Definição 53.1: Probabilidade teórica

É a probabilidade determinada a partir de um modelo matemático do experimento.

Definição 53.2: Probabilidade experimental

É a frequência relativa observada em uma sequência de realizações do experimento.

54 Exemplo experimental

Uma moeda foi lançada:

100

vezes.

Foram observadas:

caras.

A frequência relativa de caras é:

$$\frac{53}{100} = 0,53.$$

Logo:

$$\boxed{53\%}.$$

Isso não significa que a probabilidade teórica da moeda ideal seja 53%.

Para uma moeda ideal:

$$\boxed{P(\text{cara}) = \frac{1}{2} = 50\%}.$$

55 Estabilização da frequência relativa

Em muitos experimentos aleatórios, quando o número de repetições aumenta, a frequência relativa tende a aproximar-se da probabilidade teórica.

Por exemplo, uma moeda ideal pode produzir:

7

caras em:

10

lançamentos.

Isso representa:

70%.

Mas, com milhares de lançamentos, a proporção tende a ficar mais próxima de:

50%.

Observação

Esse comportamento constitui uma ideia intuitiva da Lei dos Grandes Números, que será estudada rigorosamente em níveis posteriores.

56 Eventos mutuamente exclusivos

Definição 56.1: Eventos mutuamente exclusivos

Dois eventos são mutuamente exclusivos quando não podem ocorrer simultaneamente em uma mesma realização do experimento.

Em linguagem de conjuntos:

$$A \cap B = \emptyset.$$

Por exemplo, em um único lançamento de dado:

$$A = \{\text{resultado par}\},$$

$$B = \{\text{resultado ímpar}\}.$$

Esses eventos não podem ocorrer simultaneamente.

57 Soma de eventos incompatíveis

Se:

$$A \cap B = \emptyset,$$

então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

58 Exemplo

Exemplo

Um dado é lançado.

Qual é a probabilidade de obter:

1

ou:

6?

Resolução

Os eventos são:

$$A = \{1\},$$

$$B = \{6\}.$$

Eles são mutuamente exclusivos.

Assim:

$$P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}.$$

Logo:

$$P = \frac{1}{3}.$$

59 Probabilidade de “não”

Problemas com palavras como:

- não;
- nenhum;
- pelo menos um;
- diferente de;

podem frequentemente ser resolvidos pelo evento complementar.

60 Exemplo: não obter 6

Exemplo

Qual é a probabilidade de não obter 6 em um dado?

Resolução

$$P(6) = \frac{1}{6}.$$

Logo:

$$P(\text{não } 6) = 1 - \frac{1}{6}.$$

Portanto:

$$P = \frac{5}{6}.$$

61 Exemplo: pelo menos um sucesso

Em situações com várias tentativas, o evento:

“pelo menos um sucesso”

é complementar de:

“nenhum sucesso”.

Assim:

$$P(\text{pelo menos um}) = 1 - P(\text{nenhum}).$$

Essa estratégia pode simplificar muito a contagem.

62 Problema com cartões numerados

Exemplo

São colocados em uma caixa cartões numerados de:

1

a:

20.

Um cartão é escolhido ao acaso.

Qual é a probabilidade de o número ser múltiplo de 4?

Resolução

Os múltiplos de 4 entre 1 e 20 são:

$$4, 8, 12, 16, 20.$$

Logo:

$$n(A) = 5.$$

O total é:

$$n(\Omega) = 20.$$

Assim:

$$P(A) = \frac{5}{20}.$$

Portanto:

$$P(A) = \frac{1}{4}.$$

63 Problema com divisibilidade

Exemplo

Um número inteiro é escolhido ao acaso entre:

$$1$$

e:

$$30.$$

Qual é a probabilidade de ser divisível por 5?

Resolução

Os resultados favoráveis são:

$$5, 10, 15, 20, 25, 30.$$

Logo:

$$n(A) = 6.$$

Como:

$$n(\Omega) = 30,$$

temos:

$$P(A) = \frac{6}{30}.$$

Portanto:

$$P(A) = \frac{1}{5}.$$

64 Problema com escolha de roupa

Uma pessoa possui:

$$3$$

camisetas e:

$$2$$

calças.

Se uma camiseta e uma calça são escolhidas ao acaso entre todas as combinações, existem:

$$3 \cdot 2 = 6$$

combinações.

Esse é um exemplo de aplicação conjunta de:

princípio multiplicativo

e:

probabilidade.

65 Construindo corretamente o espaço amostral

Um método sistemático é:

- 1) identificar cada etapa do experimento;
- 2) listar os resultados possíveis em cada etapa;
- 3) usar tabela, pares ordenados ou árvore de possibilidades;
- 4) verificar se nenhum resultado foi esquecido;
- 5) verificar se nenhum resultado foi contado duas vezes.

66 Estratégia geral para calcular probabilidades

Notação

Em um problema de probabilidade:

- 1) identifique o experimento;
- 2) determine o espaço amostral:
 Ω ;
- 3) identifique o evento:
 A ;
- 4) verifique se os resultados são equiprováveis;

- 5) conte:
 $n(\Omega)$

e:
 $n(A)$;

- 6) utilize, quando apropriado:
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)};$$

- 7) simplifique a fração;
- 8) se necessário, converta para decimal ou porcentagem;
- 9) verifique se:

$$0 \leq P(A) \leq 1;$$

- 10) considere o evento complementar quando ele simplificar a resolução.

67 Erros comuns

Atenção

Erro 1: esquecer resultados do espaço amostral.

O cálculo da probabilidade depende de uma enumeração correta dos resultados possíveis.

Atenção

Erro 2: contar resultados que não são equiprováveis como se fossem.

A fórmula:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

pressupõe resultados elementares equiprováveis.

Atenção

Erro 3: obter probabilidade maior que 1.

Toda probabilidade deve satisfazer:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Atenção

Erro 4: obter probabilidade negativa.

Uma probabilidade nunca pode ser negativa.

Atenção

Erro 5: esquecer a ordem em experimentos sucessivos.

Por exemplo:

CK

e:

KC

são resultados diferentes em dois lançamentos sucessivos.

Atenção

Erro 6: confundir evento com resultado.

Um resultado é uma ocorrência elementar.

Um evento é um conjunto de resultados.

Atenção

Erro 7: afirmar que um evento de probabilidade pequena é impossível.

Por exemplo:

$$P(A) = 0,01$$

é uma probabilidade pequena, mas não é zero.
Logo, o evento é possível.

Atenção

Erro 8: acreditar que a frequência experimental deve coincidir exatamente com a probabilidade teórica.

Em uma quantidade finita de repetições, podem ocorrer diferenças devido à variabilidade aleatória.

Atenção

Erro 9: somar probabilidades de eventos que podem ocorrer simultaneamente sem analisar a interseção.

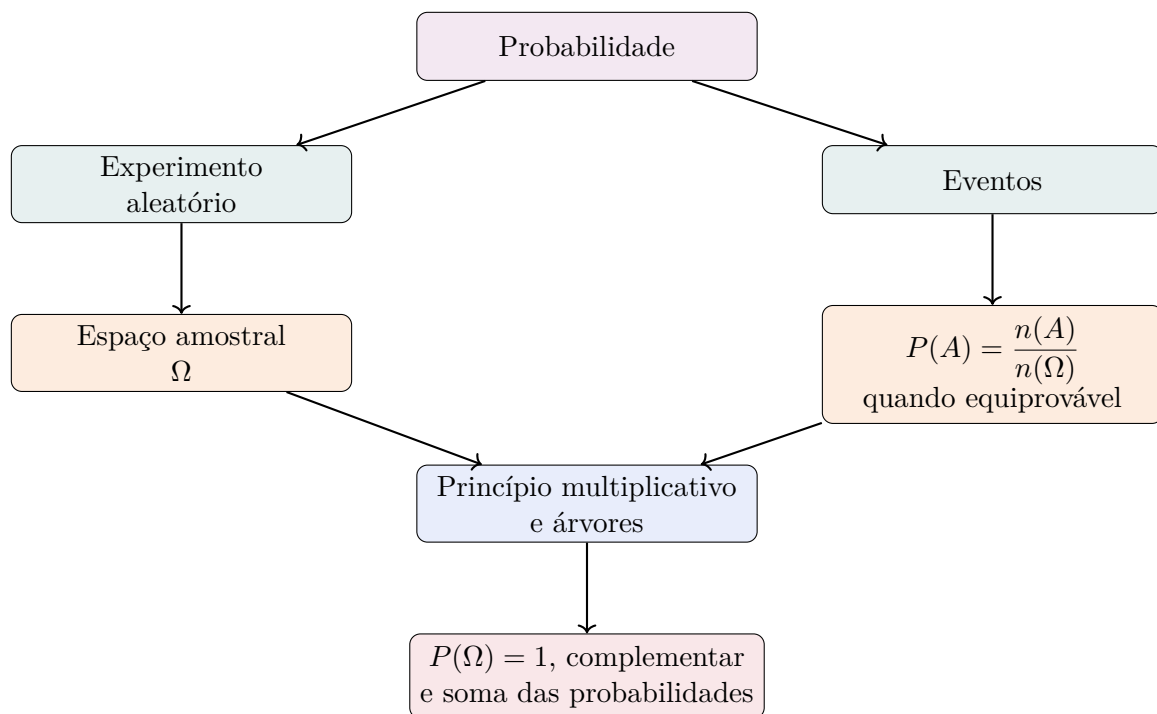
A regra simples:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

vale diretamente quando:

$$A \cap B = \emptyset.$$

68 Mapa conceitual



69 Resumo teórico

Conceito	Relação
Espaço amostral	todos os resultados possíveis
Evento	subconjunto de Ω
Evento certo	$P(\Omega) = 1$
Evento impossível	$P(\emptyset) = 0$
Probabilidade equiprovável	$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$
Complementar	$P(A^c) = 1 - P(A)$
Soma dos resultados elementares	$\sum P(\omega_i) = 1$
Princípio multiplicativo	$n_1 n_2 \cdots n_k$
Frequência relativa	$\frac{f}{n}$

Notação

Propriedades fundamentais:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

e:

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1.$$

Em espaços equiprováveis:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

70 Exercícios

70.1 Parte A – Conceitos

Exercício

Responda:

- a) O que é um experimento aleatório?
- b) O que é espaço amostral?
- c) O que é um evento?
- d) O que é um evento elementar?
- e) Qual é a probabilidade de um evento certo?
- f) Qual é a probabilidade de um evento impossível?

70.2 Parte B – Espaços amostrais

Exercício

Escreva o espaço amostral dos experimentos:

- a) lançamento de uma moeda;
- b) lançamento de um dado;
- c) dois lançamentos de uma moeda;
- d) escolha ao acaso de um número inteiro de 1 a 5.

70.3 Parte C – Eventos em um dado

Exercício

Considere:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Escreva os eventos:

- a) A : obter número par;
- b) B : obter número maior que 3;
- c) C : obter múltiplo de 3;
- d) D : obter número primo;
- e) E : obter número maior que 6.

70.4 Parte D – Probabilidade em dado

Exercício

Um dado ideal é lançado.

Determine:

- a) $P(\text{obter } 2)$;
- b) $P(\text{obter número par})$;
- c) $P(\text{obter número ímpar})$;
- d) $P(\text{obter número maior que } 4)$;
- e) $P(\text{obter número menor que } 7)$;
- f) $P(\text{obter } 8)$.

70.5 Parte E – Complementar

Exercício

Determine o complementar.

- a) Se:

$$P(A) = 0,4,$$

determine $P(A^c)$.

- b) Se:

$$P(B) = \frac{3}{8},$$

determine $P(B^c)$.

c) Se:

$$P(C^c) = 0,15,$$

determine $P(C)$.

70.6 Parte F – Duas moedas

Exercício

Duas moedas ideais são lançadas.

- a) escreva o espaço amostral;
- b) determine a probabilidade de duas caras;
- c) determine a probabilidade de exatamente uma cara;
- d) determine a probabilidade de nenhuma cara;
- e) determine a probabilidade de pelo menos uma cara.

70.7 Parte G – Três moedas

Exercício

Três moedas ideais são lançadas.

Determine:

- a) o número total de resultados;
- b) a probabilidade de três caras;
- c) a probabilidade de nenhuma cara;
- d) a probabilidade de pelo menos uma cara.

70.8 Parte H – Moeda e dado

Exercício

Uma moeda e um dado são lançados simultaneamente.

- a) quantos resultados possíveis existem?
- b) qual é a probabilidade de sair cara e número 4?
- c) qual é a probabilidade de sair cara e número par?

70.9 Parte I – Dois dados

Exercício

Dois dados ideais são lançados.
Determine:

- a) o número de resultados possíveis;
- b) a probabilidade de soma 2;
- c) a probabilidade de soma 7;
- d) a probabilidade de números iguais;
- e) a probabilidade de soma 12.

70.10 Parte J – Cartões numerados

Exercício

Um cartão é escolhido ao acaso dentre os números:

$$1, 2, \dots, 20.$$

Determine a probabilidade de o número ser:

- a) par;
- b) múltiplo de 5;
- c) primo;
- d) maior que 15.

70.11 Parte K – Soma das probabilidades

Exercício

Um experimento possui três resultados:

$$A, \quad B, \quad C.$$

Sabemos que:

$$P(A) = 0,25,$$

$$P(B) = 0,35.$$

Determine:

$$P(C).$$

Exercício

Um experimento possui quatro resultados elementares com probabilidades:

$$0,1, \quad 0,2, \quad 0,3, \quad x.$$

Determine x .

70.12 Parte L – Frequência experimental

Exercício

Uma moeda foi lançada:

$$200$$

vezes.

Foram observadas:

$$112$$

caras.

Determine:

- a) a frequência relativa de caras;
- b) a porcentagem correspondente;
- c) compare com a probabilidade teórica de uma moeda ideal.

70.13 Parte M – Princípio multiplicativo

Exercício

Determine o número de resultados possíveis.

- a) três lançamentos de uma moeda;
- b) dois lançamentos de um dado;
- c) uma moeda e dois dados;
- d) escolha de uma camiseta entre 4 e uma calça entre 3.

70.14 Parte N – Desafios

Exercício

Dois dados são lançados.

Qual é a probabilidade de a soma ser maior que 9?

Exercício

Três moedas são lançadas.

Qual é a probabilidade de obter exatamente duas caras?

Exercício

Um número é escolhido ao acaso entre:

1

e:

30.

Qual é a probabilidade de ele ser múltiplo de 4 ou de 5, sabendo que devemos contar cada número apenas uma vez?

71 Gabarito comentado

71.1 Parte A

Resolução

- a) Experimento aleatório é aquele cujo resultado individual não pode ser previsto com certeza antes de sua realização.
- b) Espaço amostral é o conjunto de todos os resultados possíveis.
- c) Evento é qualquer subconjunto do espaço amostral.

d) Evento elementar possui exatamente um resultado.

e) :

1

f) :

0

71.2 Parte B

Resolução

a)

$$\Omega = \{C, K\}.$$

b)

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

c)

$$\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}.$$

d)

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

71.3 Parte C

Resolução

$$A = \{2, 4, 6\}.$$

$$B = \{4, 5, 6\}.$$

$$C = \{3, 6\}.$$

Os primos entre 1 e 6 são:

$$2, 3, 5.$$

Logo:

$$D = \{2, 3, 5\}.$$

Não há resultado maior que 6:

$$E = \emptyset.$$

71.4 Parte D

Resolução

a)

$$P = \frac{1}{6}.$$

b)

$$P = \frac{3}{6}.$$

$$P = \frac{1}{2}.$$

c)

$$P = \frac{1}{2}.$$

d)

Resultados:

$$5, 6.$$

Logo:

$$P = \frac{1}{3}.$$

e)

Evento certo:

$$P = 1.$$

f)

Evento impossível:

$$P = 0.$$

71.5 Parte E

Resolução

a)

$$P(A^c) = 1 - 0,4.$$

$$P(A^c) = 0,6.$$

b)

$$P(B^c) = 1 - \frac{3}{8}.$$

$$P(B^c) = \frac{5}{8}.$$

$$P(B^c) = \frac{5}{8}.$$

c)

$$P(C) = 1 - 0,15.$$

$$P(C) = 0,85.$$

71.6 Parte F

Resolução

$$\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}.$$

Duas caras:

$$P = \frac{1}{4}.$$

Exatamente uma cara:

$$\frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Nenhuma cara:

$$P = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

Pelo menos uma cara:

$$1 - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

71.7 Parte G

Resolução

Número total:

$$2^3 = 8.$$

Logo:

$$\boxed{8}.$$

Três caras:

$$\boxed{\frac{1}{8}}.$$

Nenhuma cara:

$$\boxed{\frac{1}{8}}.$$

Pelo menos uma cara:

$$1 - \frac{1}{8}.$$

Logo:

$$\boxed{\frac{7}{8}}.$$

71.8 Parte H

Resolução

Número total:

$$2 \cdot 6 = 12.$$

$$\boxed{12}$$

Cara e número 4 corresponde a um único resultado:

$$(C, 4).$$

Logo:

$$P = \frac{1}{12}.$$

Cara e número par:

$$(C, 2), (C, 4), (C, 6).$$

São:

$$3$$

resultados.

Logo:

$$P = \frac{3}{12}.$$

$$P = \frac{1}{4}.$$

71.9 Parte I

Resolução

Número total:

$$6 \cdot 6 = 36.$$

$$\boxed{36}$$

Soma 2:

$$(1, 1).$$

Logo:

	$P = \frac{1}{36}.$
Soma 7:	
	6
resultados.	
Logo:	
	$P = \frac{1}{6}.$
Números iguais:	
	6
resultados.	
Logo:	
	$P = \frac{1}{6}.$
Soma 12:	
	(6, 6).
Logo:	
	$P = \frac{1}{36}.$

71.10 Parte J

Resolução	
Total:	
	20.
a) Pares	
Existem:	
	10.
Logo:	
	$P = \frac{1}{2}.$
b) Múltiplos de 5	
	5, 10, 15, 20.

Logo:

$$P = \frac{4}{20}.$$

$$P = \frac{1}{5}.$$

c) Primos

Entre 1 e 20:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

São:

8.

Logo:

$$P = \frac{8}{20}.$$

$$P = \frac{2}{5}.$$

d) Maiores que 15

16, 17, 18, 19, 20.

São:

5.

Logo:

$$P = \frac{1}{4}.$$

71.11 Parte K

Resolução

Primeiro problema:

$$0,25 + 0,35 + P(C') = 1.$$

$$0,60 + P(C) = 1.$$

Logo:

$$P(C) = 0,40.$$

Segundo:

$$0,1 + 0,2 + 0,3 + x = 1.$$

$$0,6 + x = 1.$$

Portanto:

$$x = 0,4.$$

71.12 Parte L

Resolução

Frequência relativa:

$$\frac{112}{200}.$$

$$\frac{112}{200} = 0,56.$$

Logo:

$$0,56.$$

Em porcentagem:

$$56\%.$$

A probabilidade teórica de cara para uma moeda ideal é:

$$50\%.$$

A frequência experimental não precisa coincidir exatamente com o valor teórico.

71.13 Parte M

Resolução

a)

$$2^3 = \boxed{8}.$$

b)

$$6^2 = \boxed{36}.$$

c)

$$2 \cdot 6 \cdot 6 = \boxed{72}.$$

d)

$$4 \cdot 3 = \boxed{12}.$$

71.14 Parte N

Resolução

1. Soma maior que 9

As somas possíveis são:

$$10, \quad 11, \quad 12.$$

Para soma 10:

$$(4, 6), (5, 5), (6, 4).$$

São:

$$3.$$

Para soma 11:

$$(5, 6), (6, 5).$$

São:

$$2.$$

Para soma 12:

$$(6, 6).$$

São:

$$1.$$

Total:

$$3 + 2 + 1 = 6.$$

Logo:

$$P = \frac{6}{36}.$$

Portanto:

$$\boxed{P = \frac{1}{6}}.$$

2. Exatamente duas caras

Os resultados favoráveis são:

$$CCK,$$

$CKC,$

$KCC.$

São:

3.

Como existem:

8

resultados possíveis:

$$P = \frac{3}{8}.$$

3. Múltiplo de 4 ou de 5

Múltiplos de 4:

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28.

São:

7.

Múltiplos de 5:

5, 10, 15, 20, 25, 30.

São:

6.

O número:

20

foi contado nas duas listas.

Logo, o número de resultados favoráveis distintos é:

$$7 + 6 - 1 = 12.$$

Assim:

$$P = \frac{12}{30}.$$

Simplificando:

$$P = \frac{2}{5}.$$

72 Avaliação final

Avaliação final – Probabilidade e espaço amostral

Resolva.

1. Defina experimento aleatório.
2. Defina espaço amostral e evento.
3. Um dado ideal é lançado. Escreva:

$$\Omega.$$

4. No mesmo dado, determine a probabilidade de obter um número primo.
5. Uma moeda é lançada duas vezes. Determine:
 - a) o espaço amostral;
 - b) a probabilidade de exatamente uma cara.
6. Três moedas são lançadas. Quantos resultados possíveis existem? Justifique pelo princípio multiplicativo.
7. Um experimento possui resultados:

$$A, \quad B, \quad C$$

com:

$$P(A) = 0,2, \quad P(B) = 0,45.$$

Determine:

$$P(C).$$

8. Se:

$$P(E) = 0,72,$$

determine:

$$P(E^c).$$

9. Dois dados são lançados. Determine a probabilidade de a soma ser 7.
10. Uma urna possui:

$$5$$

fichas vermelhas,

$$3$$

fichas azuis e

$$2$$

fichas verdes.

Uma ficha é escolhida ao acaso.

Determine:

- a) a probabilidade de vermelha;
- b) a probabilidade de azul;
- c) a probabilidade de verde;
- d) verifique que a soma das três probabilidades é 1.

72.1 Gabarito da avaliação final

Resolução

1. Experimento aleatório é aquele cujo resultado individual não pode ser previsto com certeza, embora os resultados possíveis sejam conhecidos.
2. Espaço amostral é o conjunto de todos os resultados possíveis. Evento é um subconjunto do espaço amostral.
3. :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

4. Números primos:

$$2, 3, 5.$$

Portanto:

$$P = \frac{3}{6}.$$

Logo:

$$P = \frac{1}{2}.$$

5. :

- a)

$$\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}.$$

- b) Exatamente uma cara:

$$\{CK, KC\}.$$

Logo:

$$P = \frac{2}{4}.$$

Portanto:

$$P = \frac{1}{2}.$$

6. Cada lançamento possui:

$$2$$

resultados.

Logo:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

Portanto:

$$\boxed{8 \text{ resultados.}}$$

7. :

$$0,2 + 0,45 + P(C) = 1.$$

$$0,65 + P(C) = 1.$$

Logo:

$$\boxed{P(C) = 0,35.}$$

8. :

$$P(E^c) = 1 - 0,72.$$

Logo:

$$\boxed{P(E^c) = 0,28.}$$

9. Existem:

$$36$$

resultados possíveis.

Os favoráveis são:

$$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1).$$

Logo:

$$P = \frac{6}{36}.$$

Assim:

$$\boxed{P = \frac{1}{6}.$$

10. O total de fichas é:

$$5 + 3 + 2 = 10.$$

a)

$$P(V) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

b)

$$P(A) = \frac{3}{10}.$$

c)

$$P(G) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

d)

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{1}{5}.$$

Com denominador 10:

$$\frac{5}{10} + \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{10}{10}.$$

Portanto:

$$P(V) + P(A) + P(G) = 1.$$

73 Conclusão

A Probabilidade permite estudar matematicamente situações em que existe incerteza.

O ponto de partida é identificar corretamente:

o experimento aleatório,

o espaço amostral

e:

o evento de interesse.

As principais ideias estudadas foram:

- 1) o espaço amostral contém todos os resultados possíveis;
- 2) um evento é um subconjunto do espaço amostral;

3) probabilidades assumem valores entre 0 e 1;

4) o evento impossível possui probabilidade:

$$0;$$

5) o evento certo possui probabilidade:

$$1;$$

6) em espaços equiprováveis:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)};$$

7) a soma das probabilidades de todos os resultados elementares é:

$$1;$$

8) o complementar satisfaz:

$$P(A^c) = 1 - P(A);$$

9) o princípio multiplicativo permite contar resultados em experimentos realizados em várias etapas;

10) tabelas e árvores ajudam a organizar espaços amostrais;

11) frequência experimental e probabilidade teórica são conceitos relacionados, mas não idênticos.

Notação

Resumo fundamental:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$$

e, em espaços equiprováveis:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

Para contagem em etapas:

$$n(\Omega) = n_1 n_2 \cdots n_k.$$

Assim:

contagem + espaço amostral + eventos $\implies$ probabilidade.

Fim do curso