

Radiciação e Expoente Fracionário

Matemática – 8º Ano

Curso completo com definições, propriedades, exemplos, exercícios e gabarito

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste curso, o estudante deverá ser capaz de:

- 1) compreender a radiciação como operação inversa da potenciação;
- 2) identificar índice, radicando e radical;
- 3) calcular raízes quadradas, cúbicas e raízes de índice qualquer em casos simples;
- 4) reconhecer quando uma raiz exata pertence ao conjunto dos números naturais, inteiros ou racionais;
- 5) estimar raízes não exatas;
- 6) simplificar radicais por meio da fatoração;
- 7) aplicar propriedades da radiciação em produtos e quocientes;
- 8) compreender a relação entre radical e expoente fracionário;
- 9) escrever radicais na forma de potência com expoente fracionário;
- 10) resolver expressões envolvendo radiciação e expoentes fracionários.

Sumário

1	Introdução	1
2	Potenciação e operação inversa	1
3	Definição de raiz	2
4	Raiz quadrada	4
5	Quadrados perfeitos	5
6	Raiz cúbica	6
7	Cubos perfeitos	7

8	Índice par e índice ímpar	7
9	Propriedades da radiciação	9
9.1	Raiz de um produto	9
9.2	Raiz de um quociente	9
9.3	Raiz de potência	10
10	Simplificação de radicais	10
11	Simplificação usando fatoração	12
12	Estimativa de raízes	13
13	Expoente fracionário	15
14	Radicais escritos como potências	18
15	Expoente fracionário negativo	19
16	Racionalização: introdução simples	20
17	Aplicações geométricas	21
17.1	Lado de um quadrado	21
17.2	Aresta de um cubo	22
17.3	Diagonal de um quadrado	23
18	Erros comuns	23
19	Mapa conceitual	25
20	Resumo teórico	25
21	Exercícios	26
21.1	Parte A – Conceitos básicos	26
21.2	Parte B – Cálculo de raízes exatas	26
21.3	Parte C – Simplificação de radicais	26
21.4	Parte D – Expoente fracionário	26
21.5	Parte E – Cálculo com expoentes fracionários	27
21.6	Parte F – Problemas	27

22 Gabarito comentado	28
22.1 Parte A	28
22.2 Parte B	28
22.3 Parte C	28
22.4 Parte D	29
22.5 Parte E	29
22.6 Parte F	29
23 Avaliação final	30
23.1 Gabarito da avaliação final	31
24 Conclusão	32

1 Introdução

A radiciação é uma operação matemática relacionada à ideia de encontrar um número que, elevado a certo expoente, produz um valor dado.

Por exemplo, sabemos que

$$5^2 = 25.$$

Então dizemos que a raiz quadrada de 25 é 5, e escrevemos:

$$\sqrt{25} = 5.$$

A radiciação é, portanto, uma operação inversa da potenciação.

Observação

A radiciação aparece em vários contextos: cálculo de lados de quadrados, arestas de cubos, medidas geométricas, escalas, fórmulas físicas e simplificação algébrica.

Exemplo

Se a área de um quadrado é 49 cm^2 , então o lado l desse quadrado satisfaz:

$$l^2 = 49.$$

Como

$$7^2 = 49,$$

temos:

$$l = 7 \text{ cm}.$$

Logo:

$$\sqrt{49} = 7.$$

2 Potenciação e operação inversa

Antes de definir radiciação, precisamos lembrar o significado da potenciação.

Definição 2.1: Potência com expoente natural

Se a é um número real e n é um número natural positivo, então

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ fatores}}.$$

O número a é chamado de **base**, e o número n é chamado de **expoente**.

Exemplo

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81.$$

Definição 2.2: Operações inversas

Duas operações são chamadas de **operações inversas** quando uma desfaz o efeito da outra.

Exemplo

A adição e a subtração são operações inversas:

$$7 + 5 = 12$$

e

$$12 - 5 = 7.$$

A multiplicação e a divisão também são operações inversas:

$$4 \cdot 6 = 24$$

e

$$24 \div 6 = 4.$$

Observação

A radiciação desfaz, em certo sentido, uma potenciação. Se

$$a^n = b,$$

então podemos perguntar: qual número elevado a n resulta em b ? Essa pergunta é respondida pela raiz.

3 Definição de raiz

Definição 3.1: Raiz enésima

Seja n um número natural maior ou igual a 2. A raiz enésima de um número a é um número b tal que

$$b^n = a.$$

Escrevemos:

$$\sqrt[n]{a} = b.$$

Nessa expressão, n é chamado de **índice da raiz**, a é chamado de **radicando**, e o símbolo $\sqrt[n]{}$ é chamado de **radical**.

Notação

Na expressão

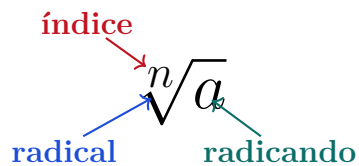
$$\sqrt[n]{a},$$

temos:

$$n = \text{índice}$$

$$a = \text{radicando}$$

$$\sqrt[n]{} = \text{radical.}$$



Exemplo

Na expressão

$$\sqrt[3]{8},$$

o índice é 3, o radicando é 8, e o valor da raiz é 2, pois

$$2^3 = 8.$$

Logo:

$$\sqrt[3]{8} = 2.$$

Exemplo

Na expressão

$$\sqrt[4]{81},$$

o índice é 4, o radicando é 81, e o valor da raiz é 3, pois

$$3^4 = 81.$$

Logo:

$$\sqrt[4]{81} = 3.$$

4 Raiz quadrada

A raiz quadrada é a raiz de índice 2. Por convenção, quando o índice é 2, ele não precisa ser escrito.

Definição 4.1: Raiz quadrada

A raiz quadrada de um número real não negativo a é o número real não negativo b tal que

$$b^2 = a.$$

Escrevemos:

$$\sqrt{a} = b.$$

Notação

A raiz quadrada de a é escrita como:

$$\sqrt{a}.$$

Não escrevemos:

$$\sqrt[2]{a}$$

na maioria dos casos, embora essa escrita também esteja correta.

Exemplo

$$\sqrt{36} = 6,$$

pois

$$6^2 = 36.$$

Exemplo

$$\sqrt{100} = 10,$$

pois

$$10^2 = 100.$$

Atenção

No conjunto dos números reais, a raiz quadrada principal é sempre não negativa. Assim:

$$\sqrt{49} = 7,$$

e não

$$\sqrt{49} = -7.$$

Embora $(-7)^2 = 49$, o símbolo $\sqrt{49}$ representa a raiz principal, isto é, a raiz não negativa.

Observação

A equação

$$x^2 = 49$$

possui duas soluções:

$$x = 7$$

ou

$$x = -7.$$

Mas a expressão

$$\sqrt{49}$$

representa apenas 7.

5 Quadrados perfeitos

Definição 5.1: Quadrado perfeito

Um número natural é chamado de **quadrado perfeito** quando é o quadrado de outro número natural.

Exemplo

Os números abaixo são quadrados perfeitos:

$$1 = 1^2,$$

$$4 = 2^2,$$

$$9 = 3^2,$$

$$16 = 4^2,$$

$$25 = 5^2.$$

Número	Escrita como quadrado	Raiz quadrada
1	1^2	$\sqrt{1} = 1$
4	2^2	$\sqrt{4} = 2$
9	3^2	$\sqrt{9} = 3$
16	4^2	$\sqrt{16} = 4$
25	5^2	$\sqrt{25} = 5$
36	6^2	$\sqrt{36} = 6$
49	7^2	$\sqrt{49} = 7$
64	8^2	$\sqrt{64} = 8$
81	9^2	$\sqrt{81} = 9$
100	10^2	$\sqrt{100} = 10$
121	11^2	$\sqrt{121} = 11$
144	12^2	$\sqrt{144} = 12$

Observação

Memorizar os quadrados perfeitos mais comuns ajuda muito na simplificação de radicais.

6 Raiz cúbica

Definição 6.1: Raiz cúbica

A raiz cúbica de um número real a é o número real b tal que

$$b^3 = a.$$

Escrevemos:

$$\sqrt[3]{a} = b.$$

Exemplo

pois

$$\sqrt[3]{8} = 2,$$

$$2^3 = 8.$$

Exemplo

pois

$$\sqrt[3]{27} = 3,$$

$$3^3 = 27.$$

Exemplo

$$\sqrt[3]{-8} = -2,$$

pois

$$(-2)^3 = -8.$$

Observação

Diferentemente da raiz quadrada, a raiz cúbica de um número negativo existe no conjunto dos números reais.

Por exemplo:

$$\sqrt[3]{-125} = -5.$$

7 Cubos perfeitos

Definição 7.1: Cubo perfeito

Um número inteiro é chamado de **cubo perfeito** quando é o cubo de outro número inteiro.

Número	Escrita como cubo	Raiz cúbica
-125	$(-5)^3$	$\sqrt[3]{-125} = -5$
-64	$(-4)^3$	$\sqrt[3]{-64} = -4$
-27	$(-3)^3$	$\sqrt[3]{-27} = -3$
-8	$(-2)^3$	$\sqrt[3]{-8} = -2$
-1	$(-1)^3$	$\sqrt[3]{-1} = -1$
0	0^3	$\sqrt[3]{0} = 0$
1	1^3	$\sqrt[3]{1} = 1$
8	2^3	$\sqrt[3]{8} = 2$
27	3^3	$\sqrt[3]{27} = 3$
64	4^3	$\sqrt[3]{64} = 4$
125	5^3	$\sqrt[3]{125} = 5$

8 Índice par e índice ímpar

O comportamento das raízes depende muito do índice.

Teorema 8.1: Radicando negativo e índice par

No conjunto dos números reais, não existe raiz de índice par para radicando negativo. Ou seja, se n é par, então

$$\sqrt[n]{a}$$

não é um número real quando $a < 0$.

Justificativa. Toda potência de expoente par é não negativa. Por exemplo:

$$x^2 \geq 0$$

para todo número real x . Assim, não existe número real x tal que

$$x^2 = -9.$$

Portanto, $\sqrt{-9}$ não é um número real.

Exemplo

As expressões abaixo não representam números reais:

$$\sqrt{-4},$$

$$\sqrt[4]{-16},$$

$$\sqrt[6]{-64}.$$

Teorema 8.2: Radicando negativo e índice ímpar

Se n é ímpar, então a raiz de índice n de um número negativo existe no conjunto dos números reais e é negativa.

Exemplo

$$\sqrt[3]{-27} = -3.$$

$$\sqrt[5]{-32} = -2.$$

Notação

Resumo:

índice par e radicando negativo $\Rightarrow$ não há raiz real

índice ímpar e radicando negativo $\Rightarrow$ há raiz real negativa

9 Propriedades da radiciação

As propriedades da radiciação ajudam a simplificar expressões com raízes.

9.1 Raiz de um produto

Teorema 9.1: Raiz de um produto

Se $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $n \geq 2$, então:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Para índices ímpares, a propriedade também pode ser usada com radicandos negativos, desde que as raízes existam no conjunto dos reais.

Exemplo

$$\sqrt{36} = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6.$$

Exemplo

$$\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6.$$

9.2 Raiz de um quociente

Teorema 9.2: Raiz de um quociente

Se $a \geq 0$, $b > 0$ e $n \geq 2$, então:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Exemplo

$$\sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}} = \frac{5}{7}.$$

Exemplo

$$\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5}.$$

9.3 Raiz de potência

Teorema 9.3: Raiz de potência com mesmo índice e expoente

Se $a \geq 0$ e $n \geq 2$, então:

$$\sqrt[n]{a^n} = a.$$

Quando n é ímpar, essa igualdade também vale para $a < 0$.

Exemplo

$$\sqrt{7^2} = 7.$$

Exemplo

$$\sqrt[3]{(-4)^3} = -4.$$

Atenção

Para índice par, é preciso cuidado:

$$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Portanto:

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Assim:

$$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5.$$

Teorema 9.4: Raiz quadrada de um quadrado

Para todo número real a ,

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

10 Simplificação de radicais

Simplificar um radical significa escrever a expressão de maneira mais simples, extraindo fatores que formam potências perfeitas.

Definição 10.1: Simplificação de radical

Simplificar um radical é transformar uma raiz em uma expressão equivalente, geralmente deixando fora do radical os fatores que possuem raiz exata.

Exemplo

Simplifique:

$$\sqrt{72}.$$

Resolução

Procuramos um quadrado perfeito que divida 72. Como

$$72 = 36 \cdot 2,$$

temos:

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2}.$$

Usando a propriedade da raiz do produto:

$$\sqrt{72} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$$

Logo:

$$\boxed{\sqrt{72} = 6\sqrt{2}.}$$

Exemplo

Simplifique:

$$\sqrt{48}.$$

Resolução

Como

$$48 = 16 \cdot 3,$$

temos:

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3}.$$

Então:

$$\sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

Logo:

$$\boxed{\sqrt{48} = 4\sqrt{3}.}$$

Exemplo

Simplifique:

$$\sqrt[3]{54}.$$

Resolução

Procuramos um cubo perfeito que divida 54. Como

$$54 = 27 \cdot 2,$$

temos:

$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2}.$$

Logo:

$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}.$$

Portanto:

$$\boxed{\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}.$$

11 Simplificação usando fatoração

Outra forma eficiente de simplificar radicais é fatorar o radicando em números primos.

Exemplo

Simplifique:

$$\sqrt{180}.$$

Resolução

Fatorando 180:

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Então:

$$\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5}.$$

Como $\sqrt{2^2} = 2$ e $\sqrt{3^2} = 3$, temos:

$$\sqrt{180} = 2 \cdot 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}.$$

Logo:

$$\boxed{\sqrt{180} = 6\sqrt{5}.$$

Exemplo

Simplifique:

$$\sqrt[3]{432}.$$

Resolução

Fatorando 432:

$$432 = 2^4 \cdot 3^3.$$

Então:

$$\sqrt[3]{432} = \sqrt[3]{2^4 \cdot 3^3}.$$

Escrevemos:

$$2^4 = 2^3 \cdot 2.$$

Logo:

$$\sqrt[3]{432} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2 \cdot 3^3}.$$

Extraindo os cubos perfeitos:

$$\sqrt[3]{432} = 2 \cdot 3 \sqrt[3]{2} = 6 \sqrt[3]{2}.$$

Portanto:

$$\boxed{\sqrt[3]{432} = 6 \sqrt[3]{2}}.$$

Notação

Para simplificar uma raiz:

- 1) fatoro o radicando;
- 2) forme grupos de acordo com o índice da raiz;
- 3) extraia os fatores que formam grupos completos;
- 4) deixe dentro do radical os fatores restantes.

12 Estimativa de raízes

Nem toda raiz é exata. Por exemplo, $\sqrt{20}$ não é um número natural.

Mesmo assim, podemos estimar seu valor.

Definição 12.1: Raiz não exata

Uma raiz é chamada de **não exata** quando seu valor não é um número inteiro ou racional simples dentro do contexto estudado.

Exemplo

Estime o valor de:

$$\sqrt{20}.$$

Resolução

Sabemos que:

$$4^2 = 16$$

e

$$5^2 = 25.$$

Como

$$16 < 20 < 25,$$

temos:

$$4 < \sqrt{20} < 5.$$

Além disso, como 20 está mais próximo de 16 do que de 25, podemos estimar:

$$\sqrt{20} \approx 4,5.$$

Na verdade:

$$\sqrt{20} \approx 4,47.$$

Exemplo

Estime:

$$\sqrt[3]{50}.$$

Resolução

Sabemos que:

$$3^3 = 27$$

e

$$4^3 = 64.$$

Como

$$27 < 50 < 64,$$

temos:

$$3 < \sqrt[3]{50} < 4.$$

Como 50 está mais próximo de 64 do que de 27, a raiz está mais próxima de 4 do que de 3.

Portanto:

$$\sqrt[3]{50} \approx 3,7.$$

13 Expoente fracionário

Agora vamos conectar radiciação e potenciação.

Definição 13.1: Expoente fracionário unitário

Se $a \geq 0$ e $n \geq 2$, define-se:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Ou seja, elevar um número ao expoente $\frac{1}{n}$ equivale a calcular a raiz enésima desse número.

Exemplo

$$25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5.$$

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

$$81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3.$$

Notação

A relação fundamental é:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

com $a \geq 0$ quando n é par.

Definição 13.2: Expoente fracionário geral

Se $a \geq 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$, define-se:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Também podemos escrever:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a} \right)^m.$$

Notação

As duas formas abaixo são equivalentes:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

e

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a} \right)^m.$$

Exemplo

Calcule:

$$16^{\frac{3}{4}}.$$

Resolução

Podemos escrever:

$$16^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{16} \right)^3.$$

Como

$$\sqrt[4]{16} = 2,$$

temos:

$$16^{\frac{3}{4}} = 2^3 = 8.$$

Logo:

$$16^{\frac{3}{4}} = 8.$$

Exemplo

Calcule:

$$27^{\frac{2}{3}}.$$

Resolução

Temos:

$$27^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2.$$

Como

$$\sqrt[3]{27} = 3,$$

segue que:

$$27^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9.$$

Logo:

$$\boxed{27^{\frac{2}{3}} = 9.}$$

Exemplo

Calcule:

$$32^{\frac{3}{5}}.$$

Resolução

Temos:

$$32^{\frac{3}{5}} = \left(\sqrt[5]{32}\right)^3.$$

Como

$$\sqrt[5]{32} = 2,$$

pois

$$2^5 = 32,$$

temos:

$$32^{\frac{3}{5}} = 2^3 = 8.$$

Portanto:

$$\boxed{32^{\frac{3}{5}} = 8.}$$

14 Radicais escritos como potências

Toda raiz pode ser escrita como potência de expoente fracionário.

Teorema 14.1: Escrita de radical como potência

Se $a \geq 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$, então:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Exemplo

Escreva como potência de expoente fracionário:

$$\sqrt[3]{x^2}.$$

Resolução

Usamos a regra:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Logo:

$$\boxed{\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}}.$$

Exemplo

Escreva como radical:

$$y^{\frac{5}{2}}.$$

Resolução

O denominador do expoente vira o índice da raiz:

$$y^{\frac{5}{2}} = \sqrt{y^5}.$$

Também podemos escrever:

$$y^{\frac{5}{2}} = (\sqrt{y})^5.$$

Logo:

$$\boxed{y^{\frac{5}{2}} = \sqrt{y^5}}.$$

Exemplo

Escreva como radical:

$$a^{\frac{7}{4}}.$$

Resolução

Temos:

$$a^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{a^7}.$$

Logo:

$$\boxed{a^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{a^7}}.$$

15 Expoente fracionário negativo

Como já estudado em potenciação, expoentes negativos indicam inverso.

Definição 15.1: Expoente fracionário negativo

Se $a > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$, então:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

Exemplo

Calcule:

$$16^{-\frac{1}{2}}.$$

Resolução

Temos:

$$16^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{16^{\frac{1}{2}}}.$$

Como

$$16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4,$$

segue que:

$$16^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.$$

Logo:

$$\boxed{16^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}}.$$

Exemplo

Calcule:

$$27^{-\frac{2}{3}}.$$

Resolução

Temos:

$$27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{2}{3}}}.$$

Calculando:

$$27^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9.$$

Logo:

$$27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{9}.$$

Portanto:

$$\boxed{27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{9}}.$$

16 Racionalização: introdução simples

Em alguns casos, pode ser útil eliminar a raiz do denominador de uma fração. Esse processo é chamado de racionalização.

Definição 16.1: Racionalização

Racionalizar um denominador significa transformar uma fração equivalente de modo que o denominador não contenha radical.

Exemplo

Racionalize:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Resolução

Multiplicamos numerador e denominador por $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Exemplo

Racionalize:

$$\frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Resolução

Multiplicamos numerador e denominador por $\sqrt{5}$:

$$\frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Logo:

$$\boxed{\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}}.$$

Observação

A racionalização costuma ser aprofundada nos anos seguintes. Neste curso, trabalhamos apenas a ideia inicial em denominadores simples com raiz quadrada.

17 Aplicações geométricas

17.1 Lado de um quadrado

Exemplo

Um quadrado tem área igual a 81 cm^2 . Qual é a medida do lado?

Resolução

A área de um quadrado é:

$$A = l^2.$$

Como

$$A = 81,$$

temos:

$$l^2 = 81.$$

Logo:

$$l = \sqrt{81} = 9.$$

Portanto:

$$\boxed{l = 9 \text{ cm.}}$$

17.2 Aresta de um cubo

Exemplo

Um cubo tem volume igual a 125 cm^3 . Qual é a medida da aresta?

Resolução

O volume de um cubo é:

$$V = a^3.$$

Como

$$V = 125,$$

temos:

$$a^3 = 125.$$

Logo:

$$a = \sqrt[3]{125} = 5.$$

Portanto:

$$\boxed{a = 5 \text{ cm.}}$$

17.3 Diagonal de um quadrado

Exemplo

Um quadrado tem lado 6 cm. Sua diagonal d satisfaz:

$$d^2 = 6^2 + 6^2.$$

Calcule d .

Resolução

Temos:

$$d^2 = 36 + 36 = 72.$$

Logo:

$$d = \sqrt{72}.$$

Simplificando:

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}.$$

Portanto:

$$d = 6\sqrt{2} \text{ cm.}$$

18 Erros comuns

Atenção

Erro 1: pensar que $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Errado:

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16}.$$

Isso daria:

$$\sqrt{25} = 3 + 4 = 7,$$

mas

$$\sqrt{25} = 5.$$

Portanto:

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Atenção

Erro 2: pensar que $\sqrt{a^2} = a$ sempre.

Na verdade:

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Por exemplo:

$$\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6.$$

Atenção

Erro 3: esquecer que raiz quadrada de número negativo não é real.

No conjunto dos números reais:

$$\sqrt{-25}$$

não existe.

Atenção

Erro 4: confundir índice e expoente.

Na expressão

$$\sqrt[3]{x^2},$$

o índice é 3 e o expoente do radicando é 2. Como potência fracionária:

$$\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}.$$

Atenção

Erro 5: interpretar expoente fracionário como divisão comum.

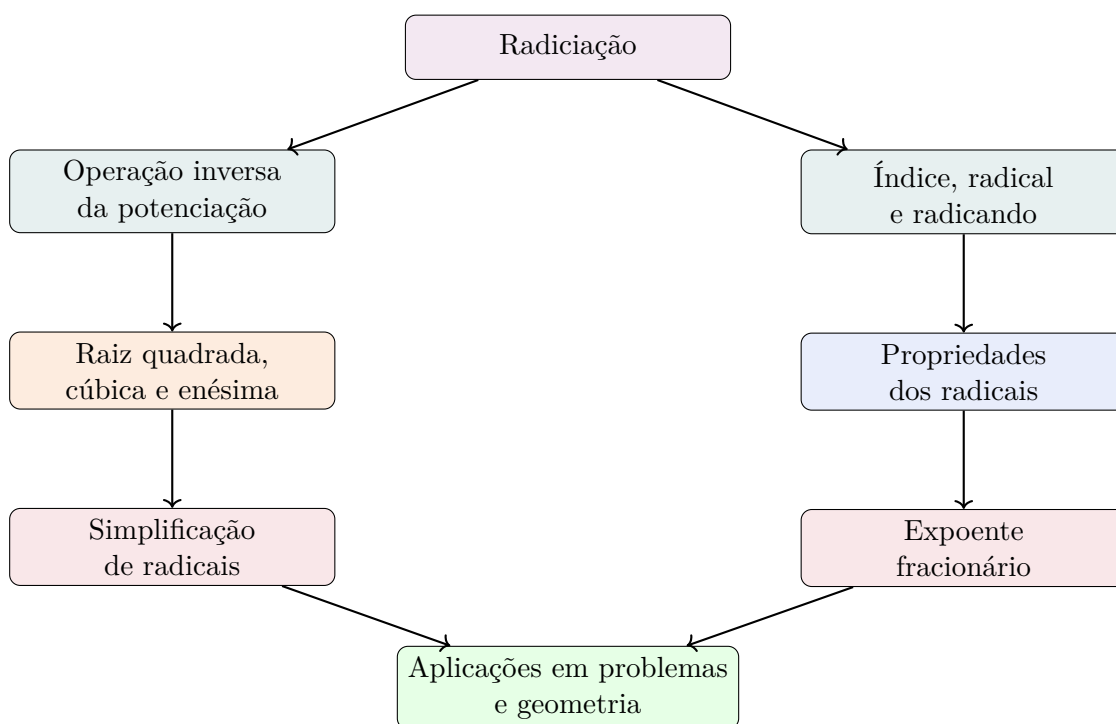
Errado:

$$16^{\frac{1}{2}} = \frac{16}{2} = 8.$$

Correto:

$$16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4.$$

19 Mapa conceitual



20 Resumo teórico

Conceito	Regra	Exemplo
Raiz quadrada	$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$	$\sqrt{49} = 7$
Raiz cúbica	$\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow b^3 = a$	$\sqrt[3]{27} = 3$
Raiz de produto	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$	$\sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$
Raiz de quociente	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7}$
Expoente fracionário	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	$64^{\frac{1}{3}} = 4$
Expoente fracionário geral	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$27^{\frac{2}{3}} = 9$
Expoente fracionário negativo	$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$	$16^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$

21 Exercícios

21.1 Parte A – Conceitos básicos

Exercício

Identifique o índice e o radicando em cada radical.

a) $\sqrt{36}$

d) $\sqrt[5]{32}$

b) $\sqrt[3]{125}$

e) $\sqrt[3]{-64}$

c) $\sqrt[4]{81}$

f) $\sqrt[6]{729}$

21.2 Parte B – Cálculo de raízes exatas

Exercício

Calcule.

a) $\sqrt{49}$

e) $\sqrt[3]{64}$

b) $\sqrt{121}$

f) $\sqrt[3]{-125}$

c) $\sqrt{144}$

g) $\sqrt[4]{16}$

d) $\sqrt[3]{8}$

h) $\sqrt[5]{32}$

21.3 Parte C – Simplificação de radicais

Exercício

Simplifique os radicais.

a) $\sqrt{12}$

e) $\sqrt{98}$

b) $\sqrt{18}$

f) $\sqrt{200}$

c) $\sqrt{27}$

g) $\sqrt[3]{16}$

d) $\sqrt{75}$

h) $\sqrt[3]{81}$

21.4 Parte D – Expoente fracionário

Exercício

Escreva como radical.

a) $x^{\frac{1}{2}}$

d) $m^{\frac{5}{4}}$

b) $a^{\frac{1}{3}}$

e) $p^{\frac{7}{2}}$

c) $y^{\frac{2}{3}}$

f) $b^{\frac{3}{5}}$

Exercício

Escreva como potência de expoente fracionário.

a) $\sqrt{x}$

d) $\sqrt[5]{m^2}$

b) $\sqrt[3]{a}$

e) $\sqrt{p^7}$

c) $\sqrt[4]{y^3}$

f) $\sqrt[3]{b^5}$

21.5 Parte E – Cálculo com expoentes fracionários**Exercício**

Calcule.

a) $25^{\frac{1}{2}}$

e) $81^{\frac{3}{4}}$

b) $64^{\frac{1}{3}}$

f) $32^{\frac{4}{5}}$

c) $16^{\frac{3}{4}}$

g) $100^{-\frac{1}{2}}$

d) $27^{\frac{2}{3}}$

h) $8^{-\frac{2}{3}}$

21.6 Parte F – Problemas**Exercício**

Um quadrado possui área de 196 cm^2 . Qual é a medida de seu lado?

Exercício

Um cubo possui volume de 216 cm^3 . Qual é a medida de sua aresta?

Exercício

A diagonal de um quadrado de lado 10 cm satisfaz:

$$d^2 = 10^2 + 10^2.$$

Determine a diagonal na forma simplificada.

Exercício

Estime entre quais dois números inteiros está:

$$\sqrt{70}.$$

22 Gabarito comentado

22.1 Parte A

Resolução

- a) $\sqrt{36}$: índice 2, radicando 36.
- b) $\sqrt[3]{125}$: índice 3, radicando 125.
- c) $\sqrt[4]{81}$: índice 4, radicando 81.
- d) $\sqrt[5]{32}$: índice 5, radicando 32.
- e) $\sqrt[3]{-64}$: índice 3, radicando -64 .
- f) $\sqrt[6]{729}$: índice 6, radicando 729.

22.2 Parte B

Resolução

- | | |
|----------------------|--------------------------|
| a) $\sqrt{49} = 7$ | e) $\sqrt[3]{64} = 4$ |
| b) $\sqrt{121} = 11$ | f) $\sqrt[3]{-125} = -5$ |
| c) $\sqrt{144} = 12$ | g) $\sqrt[4]{16} = 2$ |
| d) $\sqrt[3]{8} = 2$ | h) $\sqrt[5]{32} = 2$ |

22.3 Parte C

Resolução

- | | |
|----------------------------|----------------------------------|
| a) $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ | e) $\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$ |
| b) $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ | f) $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ |
| c) $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ | g) $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$ |
| d) $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ | h) $\sqrt[3]{81} = 3\sqrt[3]{3}$ |

22.4 Parte D

Resolução

Como radical:

a) $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

d) $m^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{m^5}$

b) $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

e) $p^{\frac{7}{2}} = \sqrt{p^7}$

c) $y^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{y^2}$

f) $b^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{b^3}$

Como potência de expoente fracionário:

a) $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt[5]{m^2} = m^{\frac{2}{5}}$

b) $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$

e) $\sqrt{p^7} = p^{\frac{7}{2}}$

c) $\sqrt[4]{y^3} = y^{\frac{3}{4}}$

f) $\sqrt[3]{b^5} = b^{\frac{5}{3}}$

22.5 Parte E

Resolução

a) $25^{\frac{1}{2}} = 5$

e) $81^{\frac{3}{4}} = 27$

b) $64^{\frac{1}{3}} = 4$

f) $32^{\frac{4}{5}} = 16$

c) $16^{\frac{3}{4}} = 8$

g) $100^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10}$

d) $27^{\frac{2}{3}} = 9$

h) $8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$

22.6 Parte F

Resolução

1. Lado do quadrado:

$$l = \sqrt{196} = 14.$$

Logo:

14 cm.

2. Aresta do cubo:

$$a = \sqrt[3]{216} = 6.$$

Logo:

6 cm.

3. Diagonal do quadrado:

$$d^2 = 10^2 + 10^2 = 100 + 100 = 200.$$

Logo:

$$d = \sqrt{200}.$$

Simplificando:

$$\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = 10\sqrt{2}.$$

Portanto:

$$d = 10\sqrt{2} \text{ cm.}$$

4. Estimativa de $\sqrt{70}$:

Sabemos que:

$$8^2 = 64$$

e

$$9^2 = 81.$$

Como

$$64 < 70 < 81,$$

temos:

$$8 < \sqrt{70} < 9.$$

23 Avaliação final

Avaliação final – Radiciação e expoente fracionário

Resolva as questões abaixo.

1. Explique o significado de $\sqrt{64}$.

2. Calcule:

$$\sqrt{169}.$$

3. Calcule:

$$\sqrt[3]{-216}.$$

4. Simplifique:

$$\sqrt{108}.$$

5. Simplifique:

$$\sqrt[3]{250}.$$

6. Escreva como potência de expoente fracionário:

$$\sqrt[5]{x^3}.$$

7. Escreva como radical:

$$a^{\frac{7}{3}}.$$

8. Calcule:

$$125^{\frac{2}{3}}.$$

9. Calcule:

$$81^{-\frac{1}{4}}.$$

10. Um quadrado possui área 242 cm^2 . Escreva a medida do lado na forma simplificada.

23.1 Gabarito da avaliação final

Resolução

1. $\sqrt{64}$ significa o número não negativo que elevado ao quadrado resulta em 64. Como $8^2 = 64$, temos:

$$\sqrt{64} = 8.$$

2.

$$\sqrt{169} = 13.$$

3.

$$\sqrt[3]{-216} = -6.$$

4.

$$\sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3} = 6\sqrt{3}.$$

5.

$$\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{125 \cdot 2} = 5\sqrt[3]{2}.$$

6.

$$\sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}.$$

7.

$$a^{\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{a^7}.$$

8.

$$125^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{125}\right)^2 = 5^2 = 25.$$

9.

$$81^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{81^{\frac{1}{4}}}.$$

Como

$$\sqrt[4]{81} = 3,$$

temos:

$$81^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

10. Se a área é 242 cm^2 , então:

$$l = \sqrt{242}.$$

Como

$$242 = 121 \cdot 2,$$

temos:

$$\sqrt{242} = \sqrt{121 \cdot 2} = 11\sqrt{2}.$$

Logo:

$$l = 11\sqrt{2} \text{ cm.}$$

24 Conclusão

A radiciação amplia o estudo das potências ao introduzir a ideia de operação inversa. Enquanto a potenciação pergunta pelo resultado de multiplicar uma base por ela mesma várias vezes, a radiciação pergunta qual base gera determinado resultado.

As principais ideias deste curso são:

- 1) $\sqrt[n]{a} = b$ significa que $b^n = a$;
- 2) a raiz quadrada principal é sempre não negativa;
- 3) raízes de índice par não admitem radicando negativo no conjunto dos reais;
- 4) raízes de índice ímpar admitem radicandos negativos;
- 5) radicais podem ser simplificados por fatoração;
- 6) expoentes fracionários representam radicais;
- 7) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$;
- 8) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$;
- 9) $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$.

Notação

Resumo final:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Fim do curso