

Princípio Multiplicativo da Contagem

Matemática – 8º Ano

Curso completo com definições, propriedades, exemplos, exercícios e gabarito

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste curso, o estudante deverá ser capaz de:

- 1) compreender o que significa contar possibilidades;
- 2) identificar situações organizadas em etapas sucessivas;
- 3) aplicar o princípio multiplicativo da contagem;
- 4) diferenciar situações de adição e de multiplicação na contagem;
- 5) representar possibilidades por tabelas, listas, pares ordenados e diagramas de árvore;
- 6) resolver problemas envolvendo roupas, cardápios, trajetos, senhas, placas e escolhas sucessivas;
- 7) distinguir situações com repetição e sem repetição;
- 8) construir espaços amostrais simples;
- 9) usar o princípio multiplicativo como preparação para probabilidade e combinatória.

Sumário

1	Introdução	1
2	O que significa contar possibilidades?	1
3	Etapas sucessivas	2
4	Listagem direta de possibilidades	3
5	Tabela de possibilidades	3
6	Diagrama de árvore	4
7	O princípio multiplicativo da contagem	5

8 Quando multiplicar?	6
9 Princípio aditivo: uma comparação necessária	7
10 Situações com repetição	8
11 Situações sem repetição	10
12 A ordem importa?	11
13 Fatorial: uma introdução	12
14 Problemas com senhas	13
14.1 Senhas com repetição	13
14.2 Senhas sem repetição	13
14.3 Senhas com restrições	14
15 Problemas com placas e códigos	15
16 Problemas com trajetos	16
17 Pares ordenados e produto cartesiano	16
18 Espaço amostral e contagem	18
19 Contagem por complemento	19
20 Problemas mistos: adição e multiplicação	20
21 Organizando a resolução de problemas	22
22 Erros comuns	23
23 Mapa conceitual	24
24 Resumo teórico	24
25 Exercícios	25
25.1 Parte A – Identificação de etapas	25
25.2 Parte B – Tabelas e pares ordenados	26
25.3 Parte C – Diagramas de árvore	26
25.4 Parte D – Senhas e códigos	26

25.5	Parte E – Restrições	27
25.6	Parte F – Princípio aditivo e multiplicativo	27
25.7	Parte G – Espaço amostral	28
25.8	Parte H – Problemas contextualizados	28
26	Gabarito comentado	28
26.1	Parte A	28
26.2	Parte B	29
26.3	Parte C	29
26.4	Parte D	30
26.5	Parte E	31
26.6	Parte F	31
26.7	Parte G	32
26.8	Parte H	32
27	Avaliação final	33
27.1	Gabarito da avaliação final	33
28	Conclusão	35

1 Introdução

Em muitos problemas de Matemática, queremos saber de quantas maneiras uma situação pode acontecer.

Por exemplo:

- De quantas formas podemos escolher uma roupa com uma camiseta e uma calça?
- Quantas senhas diferentes podem ser formadas com certos algarismos?
- Quantos caminhos existem entre dois lugares?
- Quantos resultados possíveis existem ao lançar moedas ou dados?

Esses problemas fazem parte da **contagem**. A contagem é uma das ideias fundamentais da Matemática e está diretamente ligada à probabilidade, à organização de dados, à lógica e à resolução de problemas.

Observação

O princípio multiplicativo da contagem é uma ferramenta poderosa porque evita que precisemos listar todas as possibilidades uma por uma, especialmente quando a quantidade de casos é grande.

Exemplo

Se uma pessoa tem 3 camisetas e 2 calças, ela pode formar:

$$3 \cdot 2 = 6$$

combinações diferentes de roupa.

2 O que significa contar possibilidades?

Definição 2.1: Possibilidade

Uma **possibilidade** é uma maneira específica pela qual uma escolha, um evento ou uma situação pode ocorrer.

Exemplo

Se uma sorveteria oferece os sabores:

chocolate, morango, baunilha,

então existem 3 possibilidades de escolha para uma bola de sorvete.

Definição 2.2: Conjunto de possibilidades

O **conjunto de possibilidades** de uma situação é o conjunto formado por todos os resultados possíveis dessa situação.

Exemplo

Ao lançar uma moeda, o conjunto de possibilidades é:

$$\{\text{cara, coroa}\}.$$

Portanto, há 2 possibilidades.

Exemplo

Ao lançar um dado comum, o conjunto de possibilidades é:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Portanto, há 6 possibilidades.

Observação

Contar possibilidades não é apenas contar objetos. Muitas vezes contamos escolhas, sequências, combinações, caminhos, resultados ou maneiras diferentes de realizar uma tarefa.

3 Etapas sucessivas

Muitos problemas de contagem envolvem uma sequência de escolhas.

Definição 3.1: Etapa

Uma **etapa** é uma parte de um processo de escolha. Um problema de contagem possui etapas sucessivas quando uma decisão é tomada depois de outra.

Exemplo

Para montar uma roupa, uma pessoa pode escolher:

- 1) uma camiseta;
- 2) uma calça;
- 3) um par de sapatos.

Esse processo possui 3 etapas.

Exemplo

Para formar uma senha de 3 algarismos, escolhemos:

- 1) o primeiro algarismo;
- 2) o segundo algarismo;
- 3) o terceiro algarismo.

Esse processo também possui 3 etapas.

Atenção

Antes de aplicar qualquer fórmula ou multiplicação, é essencial identificar corretamente as etapas do problema.

4 Listagem direta de possibilidades

A forma mais simples de resolver um problema de contagem é listar todas as possibilidades.

Exemplo

Ana tem 2 camisetas, uma branca B e uma preta P , e 3 calças, uma azul A , uma jeans J e uma verde V .

Liste todas as combinações possíveis de uma camiseta e uma calça.

Resolução

Podemos listar:

$$(B, A), \quad (B, J), \quad (B, V),$$

$$(P, A), \quad (P, J), \quad (P, V).$$

Portanto, há 6 combinações possíveis.

Observação

A listagem direta é útil quando há poucas possibilidades. Quando a quantidade aumenta, a listagem se torna trabalhosa. Nesses casos, usamos o princípio multiplicativo.

5 Tabela de possibilidades

Uma tabela ajuda a organizar situações com duas etapas.

Exemplo

Uma lanchonete oferece 3 tipos de lanche:

$$L_1, \quad L_2, \quad L_3$$

e 2 tipos de bebida:

$$B_1, \quad B_2.$$

Monte uma tabela com todas as possibilidades.

Resolução

	B_1	B_2
L_1	(L_1, B_1)	(L_1, B_2)
L_2	(L_2, B_1)	(L_2, B_2)
L_3	(L_3, B_1)	(L_3, B_2)

Há 6 possibilidades.

Observação

Em uma tabela com m linhas e n colunas, o número total de células é

$$m \cdot n.$$

Essa ideia está diretamente ligada ao princípio multiplicativo.

6 Diagrama de árvore

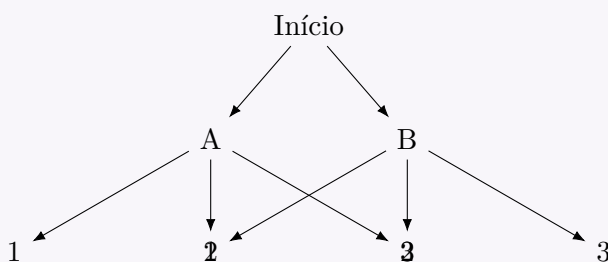
Um diagrama de árvore representa escolhas sucessivas por meio de ramificações.

Definição 6.1: Diagrama de árvore

Um **diagrama de árvore** é uma representação gráfica usada para mostrar todas as possibilidades de um processo organizado em etapas.

Exemplo

Uma pessoa escolherá uma camiseta entre A e B , e uma calça entre 1, 2 e 3. O diagrama de árvore é:



As possibilidades são:

$(A, 1), (A, 2), (A, 3),$

$(B, 1), (B, 2), (B, 3).$

Logo, há 6 possibilidades.

Observação

Cada caminho completo da árvore, do início até uma extremidade final, representa uma possibilidade.

7 O princípio multiplicativo da contagem

Teorema 7.1: Princípio multiplicativo da contagem

Se uma escolha pode ser feita em etapas sucessivas, de modo que:

- a primeira etapa pode ser feita de n_1 maneiras;
- a segunda etapa pode ser feita de n_2 maneiras;
- a terceira etapa pode ser feita de n_3 maneiras;
- e assim por diante;

então o número total de possibilidades é:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k.$$

Notação

Para k etapas sucessivas, com $n_1, n_2, \dots, n_k$ possibilidades em cada etapa, o total é:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k.$$

Justificativa. Se a primeira escolha pode ser feita de n_1 maneiras, e para cada uma dessas escolhas a segunda pode ser feita de n_2 maneiras, então há $n_1 \cdot n_2$ possibilidades para as duas primeiras etapas. Repetindo o mesmo raciocínio para as próximas etapas, obtemos:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k.$$

Exemplo

Uma pessoa tem 4 camisetas e 3 calças. De quantas formas pode escolher uma camiseta e uma calça?

Resolução

Há duas etapas:

- 1) escolher a camiseta: 4 possibilidades;
- 2) escolher a calça: 3 possibilidades.

Pelo princípio multiplicativo:

$$4 \cdot 3 = 12.$$

Logo, há:

12 combinações possíveis.

Exemplo

Uma lanchonete oferece 5 sanduíches, 4 bebidas e 3 sobremesas. De quantas maneiras diferentes uma pessoa pode escolher um sanduíche, uma bebida e uma sobremesa?

Resolução

Temos três etapas:

5 sanduíches,

4 bebidas,

3 sobremesas.

Pelo princípio multiplicativo:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Portanto:

60 refeições diferentes.

8 Quando multiplicar?

Notação

Usamos o princípio multiplicativo quando o problema envolve escolhas sucessivas ligadas pela ideia de:

uma coisa E outra coisa E outra coisa.

Por exemplo:

- escolher camiseta e calça;
- escolher entrada e prato principal e sobremesa;
- escolher primeiro algarismo e segundo algarismo e terceiro algarismo.

Exemplo

Uma senha é formada por 2 letras e 3 algarismos. Se há 26 letras e 10 algarismos disponíveis, quantas senhas podem ser formadas, permitindo repetição?

Resolução

Há 5 etapas:

26 possibilidades para a primeira letra;

26 possibilidades para a segunda letra;

10 possibilidades para o primeiro algarismo;

10 possibilidades para o segundo algarismo;

10 possibilidades para o terceiro algarismo.

Como a repetição é permitida, cada etapa mantém a mesma quantidade de possibilidades.

Logo:

$$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 676\,000.$$

Portanto:

676 000 senhas.

9 Princípio aditivo: uma comparação necessária

Embora o foco deste curso seja o princípio multiplicativo, é importante distinguir multiplicação de adição.

Teorema 9.1: Princípio aditivo da contagem

Se uma escolha pode ser feita de uma maneira **ou** de outra, e essas possibilidades não acontecem ao mesmo tempo, então somamos as quantidades de possibilidades.

Notação

Usamos a adição quando aparece a ideia de:

uma coisa OU outra coisa.

Usamos a multiplicação quando aparece a ideia de:

uma coisa E outra coisa.

Exemplo

Uma pessoa pode escolher uma sobremesa entre 4 bolos ou 3 sorvetes. Quantas opções de sobremesa ela tem?

Resolução

Ela escolherá bolo **ou** sorvete.

Logo, somamos:

$$4 + 3 = 7.$$

Portanto:

7 opções de sobremesa.

Exemplo

Uma pessoa escolherá uma entrada entre 4 opções e uma sobremesa entre 3 opções. Quantas combinações pode fazer?

Resolução

Ela escolherá entrada **e** sobremesa.

Logo, multiplicamos:

$$4 \cdot 3 = 12.$$

Portanto:

12 combinações.

Atenção

A palavra **ou** geralmente indica soma. A palavra **e** geralmente indica multiplicação. Mas é sempre necessário interpretar o contexto do problema.

10 Situações com repetição

Em muitos problemas, uma escolha pode ser repetida.

Definição 10.1: Escolha com repetição

Uma situação é **com repetição** quando o mesmo elemento pode ser escolhido mais de uma vez em etapas diferentes.

Exemplo

Quantas senhas de 4 algarismos podem ser formadas usando os algarismos de 0 a 9, permitindo repetição?

Resolução

Cada posição da senha pode ser preenchida por qualquer um dos 10 algarismos:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Como são 4 posições, temos:

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4.$$

Logo:

$$10^4 = 10000.$$

Portanto:

10000 senhas.

Observação

Quando a repetição é permitida, a quantidade de possibilidades geralmente permanece a mesma em cada etapa.

Exemplo

Um código é formado por 3 letras. Considerando um alfabeto com 26 letras e permitindo repetição, quantos códigos existem?

Resolução

Há 3 posições:

$$26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^3.$$

Calculando:

$$26^3 = 17576.$$

Logo:

17576 códigos.

11 Situações sem repetição

Em outros problemas, uma escolha feita em uma etapa não pode ser repetida depois.

Definição 11.1: Escolha sem repetição

Uma situação é **sem repetição** quando um elemento escolhido em uma etapa não pode ser escolhido novamente em outra etapa.

Exemplo

Quantas senhas de 4 algarismos distintos podem ser formadas usando os algarismos de 0 a 9?

Resolução

A senha terá 4 posições.

Na primeira posição, há 10 possibilidades.

Após escolher o primeiro algarismo, restam 9 possibilidades para a segunda posição.

Depois, restam 8 possibilidades para a terceira posição.

Depois, restam 7 possibilidades para a quarta posição.

Logo:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

Portanto:

5040 senhas.

Exemplo

Cinco alunos concorrem aos cargos de representante e vice-representante da turma. Um mesmo aluno não pode ocupar os dois cargos. De quantas maneiras os cargos podem ser preenchidos?

Resolução

Há duas etapas:

1) escolher o representante: 5 possibilidades;

2) escolher o vice-representante: 4 possibilidades, pois o representante já foi escolhido.

Logo:

$$5 \cdot 4 = 20.$$

Portanto:

20 maneiras.

Atenção

Em problemas sem repetição, a quantidade de possibilidades diminui após cada escolha.

12 A ordem importa?

Em muitos problemas, a ordem das escolhas altera o resultado.

Definição 12.1: Ordem relevante

Dizemos que a **ordem é relevante** quando trocar a posição dos elementos produz uma possibilidade diferente.

Exemplo

Na escolha de presidente e vice-presidente, a ordem importa.
Se Ana for presidente e Bruno vice, temos uma situação diferente de Bruno presidente e Ana vice.

Definição 12.2: Ordem irrelevante

Dizemos que a **ordem é irrelevante** quando trocar a posição dos elementos não produz uma possibilidade diferente.

Exemplo

Ao escolher duas frutas para uma salada, escolher maçã e banana é o mesmo que escolher banana e maçã. Nesse caso, a ordem não importa.

Atenção

O princípio multiplicativo conta naturalmente sequências de escolhas. Portanto, ele conta situações em que a ordem das etapas é considerada.
Quando a ordem não importa, muitas vezes é necessário corrigir contagens repetidas. Esse tema será aprofundado em anos posteriores, no estudo de combinações.

Exemplo

Três alunos, Ana, Bruno e Carlos, serão colocados em fila. De quantas maneiras isso pode ser feito?

Resolução

A ordem importa, pois:

Ana, Bruno, Carlos

é diferente de

Bruno, Ana, Carlos.

Para a primeira posição, temos 3 possibilidades.

Para a segunda posição, restam 2.

Para a terceira posição, resta 1.

Logo:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Portanto:

6 filas possíveis.

13 Fatorial: uma introdução

Em problemas de organização de todos os elementos em ordem, aparece um produto muito comum.

Definição 13.1: Fatorial

Se n é um número natural positivo, define-se o fatorial de n , indicado por $n!$, como:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Exemplo

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Observação

O fatorial aparece quando queremos ordenar todos os elementos de um conjunto. Por exemplo, o número de formas de organizar 5 pessoas em fila é:

$$5! = 120.$$

Atenção

No 8º ano, o fatorial pode ser apresentado apenas como uma notação útil para produtos decrescentes. O foco principal continua sendo o princípio multiplicativo.

14 Problemas com senhas

Problemas com senhas são aplicações clássicas do princípio multiplicativo.

14.1 Senhas com repetição

Exemplo

Uma senha é formada por 3 algarismos, escolhidos entre $0, 1, 2, \dots, 9$. A repetição é permitida. Quantas senhas podem ser formadas?

Resolução

Há 3 posições.

Cada posição pode receber 10 algarismos.

Logo:

$$10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000.$$

Portanto:

1000 senhas.

14.2 Senhas sem repetição

Exemplo

Uma senha é formada por 3 algarismos distintos, escolhidos entre $0, 1, 2, \dots, 9$. Quantas senhas podem ser formadas?

Resolução

Há 3 posições.

Para a primeira posição, temos 10 possibilidades.

Para a segunda, restam 9.

Para a terceira, restam 8.

Logo:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Portanto:

720 senhas.

14.3 Senhas com restrições

Exemplo

Quantas senhas de 4 algarismos podem ser formadas usando os algarismos de 0 a 9, sabendo que o primeiro algarismo não pode ser 0, e que a repetição é permitida?

Resolução

A senha possui 4 posições.

Para a primeira posição, não podemos usar 0. Logo, há 9 possibilidades:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Para cada uma das outras posições, há 10 possibilidades, pois a repetição é permitida.

Logo:

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000.$$

Portanto:

9000 senhas.

Exemplo

Quantas senhas de 4 algarismos distintos podem ser formadas usando os algarismos de 0 a 9, sabendo que o primeiro algarismo não pode ser 0?

Resolução

A senha possui 4 posições.

Para a primeira posição, há 9 possibilidades, pois não podemos usar 0.

Depois de escolhido o primeiro algarismo, restam 9 algarismos disponíveis, pois havia 10 algarismos no total e um já foi usado.

Para a terceira posição, restam 8.

Para a quarta posição, restam 7.

Logo:

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536.$$

Portanto:

4536 senhas.

15 Problemas com placas e códigos

Exemplo

Uma placa é formada por 3 letras seguidas de 4 algarismos. Considere 26 letras disponíveis e 10 algarismos disponíveis. Quantas placas podem ser formadas, permitindo repetição?

Resolução

Temos 7 etapas:

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10.$$

Ou seja:

$$26^3 \cdot 10^4.$$

Como:

$$26^3 = 17576$$

e

$$10^4 = 10000,$$

temos:

$$17576 \cdot 10000 = 175\,760\,000.$$

Portanto:

$$175\,760\,000 \text{ placas.}$$

Exemplo

Um código de produto é formado por 2 letras distintas seguidas de 2 algarismos distintos. Quantos códigos podem ser formados usando 26 letras e 10 algarismos?

Resolução

Para a primeira letra, há 26 possibilidades.

Para a segunda letra, como deve ser distinta, há 25 possibilidades.

Para o primeiro algarismo, há 10 possibilidades.

Para o segundo algarismo, como deve ser distinto, há 9 possibilidades.

Logo:

$$26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 = 58\,500.$$

Portanto:

$$58\,500 \text{ códigos.}$$

16 Problemas com trajetos

Exemplo

Para ir da cidade A até a cidade B , há 3 estradas. Para ir da cidade B até a cidade C , há 4 estradas. De quantas formas é possível ir de A até C , passando por B ?

Resolução

Há duas etapas:

- 1) escolher uma estrada de A para B : 3 possibilidades;
- 2) escolher uma estrada de B para C : 4 possibilidades.

Logo:

$$3 \cdot 4 = 12.$$

Portanto:

12 trajetos.

Exemplo

Uma pessoa pode ir de casa à escola passando por uma praça. Há 2 caminhos da casa até a praça, 3 caminhos da praça até a biblioteca e 4 caminhos da biblioteca até a escola. Quantos trajetos completos são possíveis?

Resolução

Temos três etapas:

$$2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Portanto:

24 trajetos possíveis.

17 Pares ordenados e produto cartesiano

Problemas de contagem com duas escolhas podem ser representados por pares ordenados.

Definição 17.1: Par ordenado

Um **par ordenado** é uma representação da forma

$$(a, b),$$

em que a ordem dos elementos é importante. O primeiro elemento pertence a uma primeira escolha, e o segundo elemento pertence a uma segunda escolha.

Exemplo

Se

$$A = \{1, 2\}$$

e

$$B = \{x, y, z\},$$

os pares ordenados possíveis são:

$$(1, x), \quad (1, y), \quad (1, z),$$

$$(2, x), \quad (2, y), \quad (2, z).$$

Há $2 \cdot 3 = 6$ pares ordenados.

Definição 17.2: Produto cartesiano

Dados dois conjuntos A e B , o produto cartesiano $A \times B$ é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) , em que $a \in A$ e $b \in B$.

Notação

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Teorema 17.1: Quantidade de elementos do produto cartesiano

Se A possui m elementos e B possui n elementos, então $A \times B$ possui

$$m \cdot n$$

elementos.

Exemplo

Se

$$A = \{\text{vermelho, azul, verde}\}$$

e

$$B = \{P, M, G\},$$

então:

$$|A| = 3$$

e

$$|B| = 3.$$

Logo:

$$|A \times B| = 3 \cdot 3 = 9.$$

18 Espaço amostral e contagem

O princípio multiplicativo também ajuda a construir espaços amostrais em probabilidade.

Definição 18.1: Experimento aleatório

Um **experimento aleatório** é uma situação cujo resultado não pode ser previsto com certeza antes de ocorrer, embora seja possível descrever seus resultados possíveis.

Definição 18.2: Espaço amostral

O **espaço amostral** é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Exemplo

Ao lançar uma moeda e um dado, quantos resultados possíveis existem?

Resolução

Há duas etapas:

- 1) resultado da moeda: 2 possibilidades;
- 2) resultado do dado: 6 possibilidades.

Logo:

$$2 \cdot 6 = 12.$$

Portanto, o espaço amostral possui:

12 resultados.

Exemplo

Ao lançar duas moedas, quantos resultados possíveis existem?

Resolução

Cada moeda possui 2 possibilidades:

cara ou coroa.

Como são duas moedas:

$$2 \cdot 2 = 4.$$

O espaço amostral é:

$$\{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\},$$

em que C representa cara e K representa coroa.

Portanto:

4 resultados possíveis.

Observação

Em probabilidade, muitas vezes precisamos primeiro contar o número de resultados possíveis. Por isso, o princípio multiplicativo é uma base importante para o estudo de probabilidade.

19 Contagem por complemento

Às vezes é mais fácil contar o total de possibilidades e depois retirar as possibilidades indesejadas.

Definição 19.1: Contagem por complemento

A **contagem por complemento** consiste em calcular primeiro o total de casos possíveis e, depois, subtrair os casos que não atendem à condição do problema.

Notação

$\text{casos desejados} = \text{total de casos} - \text{casos indesejados}.$

Exemplo

Quantas senhas de 3 algarismos, usando 0 a 9, têm pelo menos um algarismo diferente de zero?

Resolução

Primeiro, contamos todas as senhas de 3 algarismos com repetição permitida:

$$10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000.$$

Agora, contamos as senhas que não têm nenhum algarismo diferente de zero. Isso significa que a senha é:

$$000.$$

Há apenas 1 senha desse tipo.

Logo:

$$1000 - 1 = 999.$$

Portanto:

999 senhas.

Exemplo

Quantos resultados possíveis existem ao lançar 3 moedas em que aparece pelo menos uma cara?

Resolução

O total de resultados ao lançar 3 moedas é:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

Agora contamos os resultados em que não aparece nenhuma cara. Isso ocorre apenas quando todas são coroas:

$$(K, K, K).$$

Há 1 resultado desse tipo.

Logo:

$$8 - 1 = 7.$$

Portanto:

7 resultados com pelo menos uma cara.

20 Problemas mistos: adição e multiplicação

Alguns problemas exigem o uso combinado dos princípios aditivo e multiplicativo.

Exemplo

Uma escola oferece atividades no período da tarde. O aluno pode escolher:

- um curso de esporte, com 4 opções;
- ou um curso de arte, com 3 opções;
- ou um curso de tecnologia, com 5 opções.

Quantas opções de curso o aluno tem?

Resolução

O aluno escolhe esporte **ou** arte **ou** tecnologia.
Logo, usamos adição:

$$4 + 3 + 5 = 12.$$

Portanto:

12 opções.

Exemplo

Uma escola oferece 4 opções de esporte e 3 opções de horário para cada esporte. Quantas escolhas diferentes de esporte e horário podem ser feitas?

Resolução

Agora o aluno escolhe esporte **e** horário.
Logo, usamos multiplicação:

$$4 \cdot 3 = 12.$$

Portanto:

12 escolhas diferentes.

Exemplo

Um restaurante oferece:

- 3 pratos de massa;
- 4 pratos de carne;
- 2 bebidas.

O cliente escolherá um prato principal, que pode ser massa ou carne, e uma bebida.
Quantas refeições diferentes são possíveis?

Resolução

Primeiro, contamos os pratos principais:

$$3 + 4 = 7.$$

Depois, para cada prato principal, há 2 opções de bebida.

Logo:

$$7 \cdot 2 = 14.$$

Portanto:

14 refeições diferentes.

21 Organizando a resolução de problemas

Notação

Para resolver problemas de contagem, siga este roteiro:

- 1) identifique exatamente o que deve ser contado;
- 2) separe o processo em etapas;
- 3) determine quantas possibilidades existem em cada etapa;
- 4) verifique se há repetição ou não;
- 5) verifique se a ordem importa;
- 6) decida se deve somar, multiplicar ou combinar os dois;
- 7) faça o cálculo;
- 8) interprete a resposta no contexto.

Exemplo

Um código é formado por uma letra seguida de dois algarismos. A letra deve ser escolhida entre A, B, C, D , e os algarismos entre $0, 1, 2, 3, 4$. Os algarismos devem ser distintos. Quantos códigos podem ser formados?

Resolução

Há três etapas:

- 1) escolher a letra: 4 possibilidades;
- 2) escolher o primeiro algarismo: 5 possibilidades;
- 3) escolher o segundo algarismo: 4 possibilidades, pois deve ser diferente do primeiro.

Logo:

$$4 \cdot 5 \cdot 4 = 80.$$

Portanto:

80 códigos.

22 Erros comuns

Atenção

Erro 1: somar quando deveria multiplicar.

Se há 3 camisetas e 2 calças, o total de combinações não é

$$3 + 2 = 5.$$

Como escolhemos camiseta e calça, o correto é:

$$3 \cdot 2 = 6.$$

Atenção

Erro 2: multiplicar quando deveria somar.

Se uma pessoa pode escolher 4 bolos ou 3 sorvetes, ela não escolhe bolo e sorvete. Ela escolhe bolo ou sorvete.

Logo:

$$4 + 3 = 7.$$

Atenção

Erro 3: ignorar a restrição de não repetição.

Uma senha de 3 algarismos distintos não tem:

$$10 \cdot 10 \cdot 10$$

possibilidades.

O correto é:

$$10 \cdot 9 \cdot 8.$$

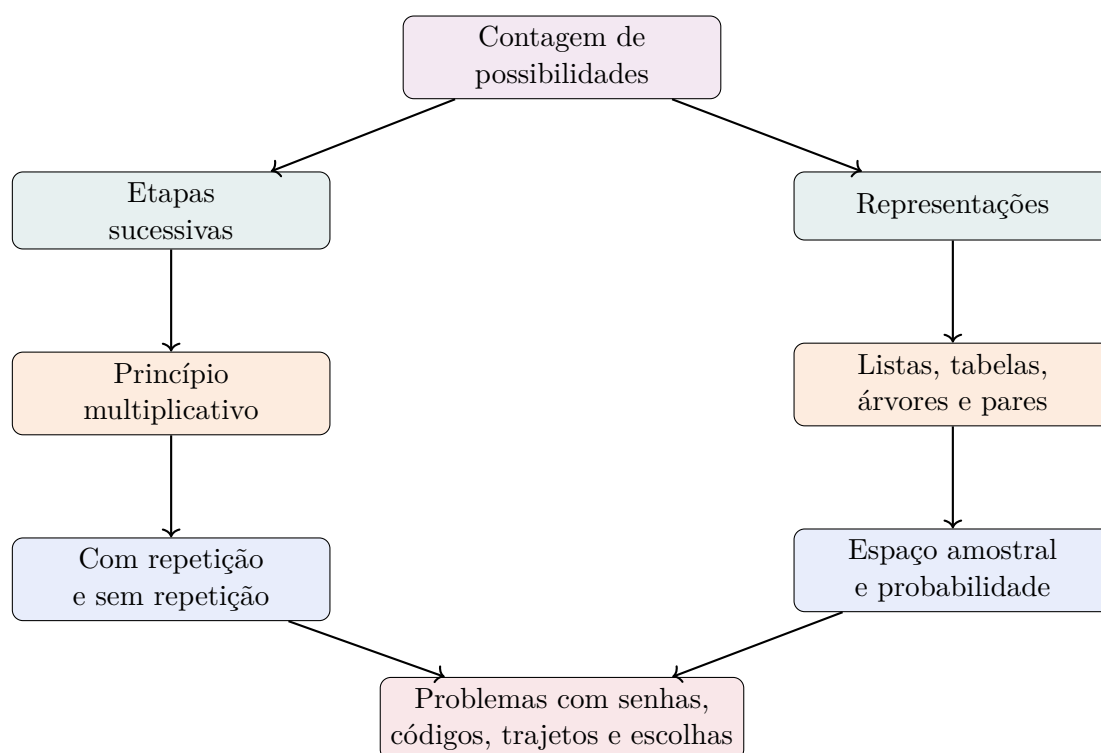
Atenção

Erro 4: esquecer que o primeiro algarismo às vezes não pode ser zero.
Para formar um número de 3 algarismos, o primeiro algarismo não pode ser zero. Assim, há 9 possibilidades para a primeira posição, e não 10.

Atenção

Erro 5: contar casos repetidos quando a ordem não importa.
Se o problema pede apenas escolher duas pessoas para uma dupla, a dupla Ana–Bruno é a mesma que Bruno–Ana.
Nesse caso, o princípio multiplicativo pode contar cada dupla mais de uma vez.

23 Mapa conceitual



24 Resumo teórico

Conceito	Ideia principal	Exemplo
Possibilidade	Uma forma de ocorrer	cara ou coroa
Etapas	Uma escolha dentro de um processo	escolher camiseta
Princípio multiplicativo	Escolhas sucessivas são multiplicadas	$3 \cdot 4 = 12$
Princípio aditivo	Escolhas alternativas são somadas	$3 + 4 = 7$
Com repetição	O elemento pode ser usado novamente	senha 000 permitida
Sem repetição	O elemento não pode ser usado novamente	algarismos distintos
Diagrama de árvore	Representa todas as escolhas	caminhos por ramificações
Espaço amostral	Todos os resultados possíveis	lançamento de dados
Complemento	Total menos casos indesejados	pelo menos uma cara

Notação

Princípio multiplicativo:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k.$$

Princípio aditivo:

$$N = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k.$$

25 Exercícios

25.1 Parte A – Identificação de etapas

Exercício

Em cada situação, identifique as etapas de escolha e calcule o total de possibilidades.

- Uma pessoa escolherá uma camiseta entre 4 opções e uma calça entre 3 opções.
- Um lanche é formado por um pão entre 2 opções, um recheio entre 5 opções e um molho entre 3 opções.
- Um aluno escolherá uma disciplina eletiva entre 6 opções e um horário entre 2 opções.
- Um produto pode ser escolhido em 5 cores e 4 tamanhos.

25.2 Parte B – Tabelas e pares ordenados

Exercício

Sejam os conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

e

$$B = \{x, y\}.$$

- a) Liste todos os elementos de $A \times B$.
- b) Calcule o número de elementos de $A \times B$ usando o princípio multiplicativo.

Exercício

Uma loja vende camisetas nas cores branca, preta e azul, e nos tamanhos P, M, G e GG. Quantos modelos diferentes de camiseta existem, considerando cor e tamanho?

25.3 Parte C – Diagramas de árvore

Exercício

Uma moeda é lançada duas vezes.

- a) Monte o espaço amostral.
- b) Quantos resultados possíveis existem?
- c) Resolva usando o princípio multiplicativo.

Exercício

Um restaurante oferece 2 entradas, 3 pratos principais e 2 sobremesas. Quantas refeições completas podem ser formadas?

25.4 Parte D – Senhas e códigos

Exercício

Quantas senhas de 4 algarismos podem ser formadas usando os algarismos de 0 a 9, permitindo repetição?

Exercício

Quantas senhas de 4 algarismos distintos podem ser formadas usando os algarismos de 0 a 9?

Exercício

Quantos códigos de 3 letras podem ser formados usando um alfabeto de 26 letras, permitindo repetição?

Exercício

Quantos códigos de 3 letras distintas podem ser formados usando um alfabeto de 26 letras?

25.5 Parte E – Restrições

Exercício

Quantos números de 3 algarismos podem ser formados usando os algarismos de 0 a 9, permitindo repetição?

Exercício

Quantos números de 3 algarismos distintos podem ser formados usando os algarismos de 0 a 9?

Exercício

Uma senha possui 5 caracteres: as duas primeiras posições são letras e as três últimas são algarismos. Há 26 letras e 10 algarismos disponíveis. A repetição é permitida. Quantas senhas podem ser formadas?

25.6 Parte F – Princípio aditivo e multiplicativo

Exercício

Decida se o problema deve ser resolvido por adição, multiplicação ou ambos.

- a) Uma pessoa escolherá uma bebida entre 5 sucos ou 3 refrigerantes.
- b) Uma pessoa escolherá uma bebida entre 5 opções e uma sobremesa entre 4 opções.
- c) Um aluno pode escolher uma atividade de esporte entre 4 opções ou uma atividade de música entre 2 opções.
- d) Um cliente escolherá um prato principal entre 3 massas ou 4 carnes, e depois uma bebida entre 2 opções.

25.7 Parte G – Espaço amostral

Exercício

Um dado e uma moeda são lançados ao mesmo tempo.

- a) Quantos resultados possíveis existem?
- b) Escreva o cálculo usando o princípio multiplicativo.

Exercício

Três moedas são lançadas. Quantos resultados possíveis existem?

25.8 Parte H – Problemas contextualizados

Exercício

Uma escola possui 5 candidatos para representante, vice-representante e secretário. Um mesmo aluno não pode ocupar mais de um cargo. De quantas maneiras os cargos podem ser preenchidos?

Exercício

Uma pessoa vai montar um prato com uma proteína, um acompanhamento e uma salada. Há 4 proteínas, 5 acompanhamentos e 3 saladas. Quantos pratos diferentes podem ser montados?

Exercício

Uma empresa cria códigos com 2 letras distintas seguidas de 3 algarismos, permitindo repetição apenas dos algarismos. Quantos códigos podem ser formados?

Exercício

Para ir de A até D , uma pessoa deve passar por B e C . Há 3 caminhos de A para B , 2 caminhos de B para C e 4 caminhos de C para D . Quantos trajetos completos existem?

26 Gabarito comentado

26.1 Parte A

Resolução

- a) Camiseta e calça:

$$4 \cdot 3 = 12.$$

- b) Pão, recheio e molho:

$$2 \cdot 5 \cdot 3 = 30.$$

c) Disciplina e horário:

$$6 \cdot 2 = 12.$$

d) Cor e tamanho:

$$5 \cdot 4 = 20.$$

26.2 Parte B

Resolução

1. Como

$$A = \{1, 2, 3\}$$

e

$$B = \{x, y\},$$

temos:

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}.$$

O número de elementos é:

$$3 \cdot 2 = 6.$$

2. A loja possui 3 cores e 4 tamanhos. Logo:

$$3 \cdot 4 = 12.$$

Portanto:

12 modelos.

26.3 Parte C

Resolução

1. Lançando uma moeda duas vezes, o espaço amostral é:

$$\{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\}.$$

Logo, há:

$$4$$

resultados possíveis.

Pelo princípio multiplicativo:

$$2 \cdot 2 = 4.$$

2. O restaurante possui:

2 entradas,

3 pratos principais,

2 sobremesas.

Logo:

$$2 \cdot 3 \cdot 2 = 12.$$

Portanto:

12 refeições completas.

26.4 Parte D

Resolução

1. Senhas de 4 algarismos com repetição:

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10000.$$

10000 senhas.

2. Senhas de 4 algarismos distintos:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

5040 senhas.

3. Códigos de 3 letras com repetição:

$$26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^3 = 17576.$$

17576 códigos.

4. Códigos de 3 letras distintas:

$$26 \cdot 25 \cdot 24 = 15600.$$

15600 códigos.

26.5 Parte E

Resolução

1. Números de 3 algarismos, com repetição:

O primeiro algarismo não pode ser zero. Portanto:

$$9 \cdot 10 \cdot 10 = 900.$$

900 números.

2. Números de 3 algarismos distintos:

Primeiro algarismo: 9 possibilidades, pois não pode ser zero.

Segundo algarismo: 9 possibilidades, pois há 10 algarismos e um já foi usado.

Terceiro algarismo: 8 possibilidades.

Logo:

$$9 \cdot 9 \cdot 8 = 648.$$

648 números.

3. Senha com 2 letras e 3 algarismos:

$$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10.$$

Logo:

$$26^2 \cdot 10^3 = 676 \cdot 1000 = 676000.$$

676000 senhas.

26.6 Parte F

Resolução

a) Sucos **ou** refrigerantes:

$$5 + 3 = 8.$$

b) Bebida **e** sobremesa:

$$5 \cdot 4 = 20.$$

c) Esporte **ou** música:

$$4 + 2 = 6.$$

d) Primeiro, prato principal:

$$3 + 4 = 7.$$

Depois, bebida:

$$7 \cdot 2 = 14.$$

26.7 Parte G

Resolução

1. Um dado possui 6 resultados possíveis, e uma moeda possui 2. Logo:

$$6 \cdot 2 = 12.$$

12 resultados possíveis.

2. Três moedas:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

8 resultados possíveis.

26.8 Parte H

Resolução

1. Cargos de representante, vice e secretário:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

60 maneiras.

2. Prato com proteína, acompanhamento e salada:

$$4 \cdot 5 \cdot 3 = 60.$$

60 pratos.

3. Código com 2 letras distintas e 3 algarismos com repetição:

$$26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10.$$

Logo:

$$26 \cdot 25 \cdot 1000 = 650000.$$

650000 códigos.

4. Trajetos:

$$3 \cdot 2 \cdot 4 = 24.$$

24 trajetos.

27 Avaliação final

Avaliação final – Princípio multiplicativo da contagem

Resolva as questões abaixo.

1. Explique, com suas palavras, o que diz o princípio multiplicativo da contagem.
2. Uma pessoa tem 5 camisetas, 4 calças e 3 pares de sapatos. Quantas combinações de roupa pode formar?
3. Uma lanchonete oferece 3 tipos de pão, 6 recheios e 4 molhos. Quantos sanduíches diferentes podem ser montados escolhendo um pão, um recheio e um molho?
4. Quantas senhas de 5 algarismos podem ser formadas usando os algarismos de 0 a 9, permitindo repetição?
5. Quantas senhas de 5 algarismos distintos podem ser formadas usando os algarismos de 0 a 9?
6. Quantos números de 4 algarismos podem ser formados usando os algarismos de 0 a 9, permitindo repetição?
7. Quantos números de 4 algarismos distintos podem ser formados usando os algarismos de 0 a 9?
8. Uma moeda é lançada 4 vezes. Quantos resultados possíveis existem?
9. Um dado é lançado 3 vezes. Quantos resultados possíveis existem?
10. Um código é formado por 2 letras distintas e 2 algarismos distintos. Considerando 26 letras e 10 algarismos, quantos códigos podem ser formados?

27.1 Gabarito da avaliação final

Resolução

1. Resposta esperada: quando uma escolha é feita em etapas sucessivas, o número total de possibilidades é obtido multiplicando-se o número de possibilidades de cada etapa.

2. Roupa:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

60 combinações.

3. Sanduíches:

$$3 \cdot 6 \cdot 4 = 72.$$

72 sanduíches.

4. Senhas de 5 algarismos com repetição:

$$10^5 = 100000.$$

100000 senhas.

5. Senhas de 5 algarismos distintos:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240.$$

30240 senhas.

6. Números de 4 algarismos com repetição:

O primeiro algarismo não pode ser zero:

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000.$$

9000 números.

7. Números de 4 algarismos distintos:

Primeiro algarismo: 9 possibilidades.

Segundo algarismo: 9 possibilidades.

Terceiro algarismo: 8 possibilidades.

Quarto algarismo: 7 possibilidades.

Logo:

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536.$$

4536 números.

8. Quatro lançamentos de moeda:

$$2^4 = 16.$$

16 resultados.

9. Três lançamentos de dado:

$$6^3 = 216.$$

216 resultados.

10. Código com 2 letras distintas e 2 algarismos distintos:

$$26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9.$$

Calculando:

$$26 \cdot 25 = 650$$

e

$$10 \cdot 9 = 90.$$

Logo:

$$650 \cdot 90 = 58500.$$

58500 códigos.

28 Conclusão

O princípio multiplicativo da contagem é uma ferramenta essencial para resolver problemas em que escolhas são feitas em etapas sucessivas. Em vez de listar todas as possibilidades, podemos multiplicar o número de escolhas disponíveis em cada etapa.

As ideias centrais deste curso são:

- 1) contar possibilidades exige identificar corretamente as etapas;
- 2) quando uma escolha envolve uma coisa **e** outra, geralmente multiplicamos;
- 3) quando uma escolha envolve uma coisa **ou** outra, geralmente somamos;
- 4) em situações com repetição, as quantidades podem permanecer iguais em cada etapa;
- 5) em situações sem repetição, a quantidade de possibilidades diminui após cada escolha;
- 6) diagramas de árvore, tabelas e pares ordenados ajudam a visualizar possibilidades;
- 7) o princípio multiplicativo é base para probabilidade e combinatória.

Notação

Resumo final:

$$\text{Total} = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k.$$

Com repetição: a quantidade pode se repetir em cada etapa.

Sem repetição: a quantidade diminui após cada escolha.

E $\Rightarrow$ multiplicação

OU $\Rightarrow$ adição

Fim do curso