

Volume de Blocos Retangulares

Matemática – 8º Ano

Unidades cúbicas, paralelepípedos retângulos, cubos, conversões e resolução de problemas

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste curso, o estudante deverá ser capaz de:

- 1) compreender o conceito de volume;
- 2) distinguir comprimento, área e volume;
- 3) interpretar uma unidade cúbica;
- 4) reconhecer o metro cúbico, o decímetro cúbico e o centímetro cúbico;
- 5) compreender por que as conversões de volume envolvem potências de três;
- 6) reconhecer um bloco retangular ou paralelepípedo retângulo;
- 7) identificar comprimento, largura e altura;
- 8) deduzir a fórmula:

$$V = abc;$$

- 9) interpretar a fórmula:

$$V = A_{\text{base}} \cdot h;$$

- 10) calcular o volume de blocos retangulares;
- 11) calcular o volume de cubos;
- 12) resolver problemas inversos para determinar dimensões desconhecidas;
- 13) trabalhar com medidas decimais;
- 14) converter corretamente unidades de volume;
- 15) calcular volumes de sólidos compostos por blocos retangulares;
- 16) utilizar adição e subtração de volumes;
- 17) resolver problemas envolvendo caixas, depósitos, piscinas e recipientes retangulares;
- 18) compreender como o volume varia quando as dimensões lineares são alteradas;
- 19) verificar dimensionalmente os resultados obtidos.

Sumário

1	Introdução	1
2	Dimensões espaciais	1
3	Comprimento, área e volume	2
4	Definição de volume	2
5	Unidade cúbica	2
6	Interpretação de 1 cm^3	3
7	Representação de um cubo unitário	3
8	Bloco retangular	3
9	Representação do bloco retangular	4
10	Contagem de cubos unitários	4
11	Dedução da fórmula do bloco retangular	5
12	Teorema do volume do bloco retangular	5
13	Volume como área da base vezes altura	6
14	Exemplo fundamental	6
15	Verificação da unidade	7
16	O cubo	7
17	Teorema do volume do cubo	8
18	Exemplo com cubo	8
19	Problema inverso com cubo	9
20	Problemas inversos no bloco retangular	9
21	Exemplo inverso	10

22 Exemplo usando a área da base	10
23 Unidades usuais de volume	11
24 Conversão de unidades de volume	12
25 De metro cúbico para centímetro cúbico	12
26 Por que cada passo vale 1000?	13
27 Tabela de conversão	13
28 Exemplo de conversão	13
29 Outro exemplo de conversão	14
30 Cuidado com as conversões	15
31 Dimensões em unidades diferentes	15
32 Volume de sólidos compostos	16
33 Princípio da aditividade do volume	16
34 Exemplo de sólido composto	17
35 Volume por subtração	17
36 Exemplo com recorte	17
37 Recipientes em forma de bloco retangular	18
38 Dimensões internas e externas	19
39 Recipiente parcialmente preenchido	19
40 Exemplo de preenchimento parcial	19
41 Problema de nível	20
42 Variação do volume	20
43 Duplicar uma única dimensão	21

44	Duplicar todas as dimensões	21
45	Fator de escala do volume	22
46	Exemplo com escala	22
47	Redução à metade	22
48	Comparação entre comprimento, área e volume	23
49	Problema contextual: piscina	23
50	Problema contextual: depósito	24
51	Problema contextual: embalagem	24
52	Problema com área da base conhecida	25
53	Problema inverso com área da base	26
54	Equações envolvendo volume	26
55	Estratégia geral	27
56	Erros comuns	28
57	Mapa conceitual	30
58	Resumo teórico	30
59	Exercícios	31
59.1	Parte A – Conceitos	31
59.2	Parte B – Blocos retangulares	31
59.3	Parte C – Cubos	32
59.4	Parte D – Problemas inversos	32
59.5	Parte E – Área da base	33
59.6	Parte F – Conversões	33
59.7	Parte G – Unidades diferentes	34
59.8	Parte H – Sólidos compostos	34
59.9	Parte I – Recipientes	35
59.10	Parte J – Nível de líquido	35

59.11Parte K – Escala	35
59.12Parte L – Aplicações	36
60 Gabarito comentado	36
60.1 Parte A	36
60.2 Parte B	37
60.3 Parte C	37
60.4 Parte D	38
60.5 Parte E	39
60.6 Parte F	39
60.7 Parte G	40
60.8 Parte H	40
60.9 Parte I	41
60.10Parte J	42
60.11Parte K	42
60.12Parte L	42
61 Avaliação final	43
61.1 Gabarito da avaliação final	44
62 Conclusão	47

1 Introdução

Diversos objetos do cotidiano podem ser modelados aproximadamente por blocos retangulares:

- caixas;
- salas;
- armários;
- piscinas;
- reservatórios;
- contêineres;
- embalagens;
- depósitos.

Quando queremos medir o espaço ocupado por um sólido, utilizamos a grandeza:

volume.

Enquanto a área mede uma superfície, o volume mede uma região do espaço tridimensional.

2 Dimensões espaciais

Um objeto tridimensional possui três dimensões independentes.

Em um bloco retangular, podemos chamá-las de:

comprimento,

largura

e:

altura.

Também é comum usar as letras:

a , b , c .

3 Comprimento, área e volume

Grandeza	Dimensão	Exemplo de unidade	Interpretação
Comprimento	1D	m	extensão linear
Área	2D	m ²	superfície
Volume	3D	m ³	espaço ocupado

Atenção

Não confunda:

com:

ou:

m

m²

m³.

Cada uma dessas unidades mede uma grandeza diferente.

4 Definição de volume

Definição 4.1: Volume

O **volume** de um sólido é a medida da região tridimensional ocupada por ele.

Para medir volume, escolhemos uma unidade padrão tridimensional.

5 Unidade cúbica

Definição 5.1: Unidade cúbica

Uma unidade cúbica é o volume de um cubo cujas arestas medem uma unidade de comprimento.

Se cada aresta mede:

1 cm,

o volume é:

1 cm³.

Se cada aresta mede:

$$1 \text{ m},$$

o volume é:

$$1 \text{ m}^3.$$

6 Interpretação de 1 cm^3

$$1 \text{ cm}^3$$

representa o volume de um cubo de dimensões:

$$1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}.$$

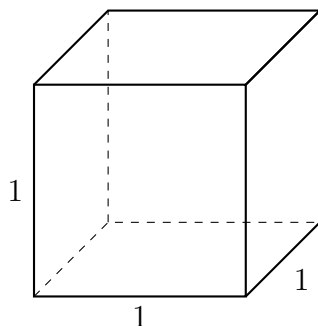
Assim:

$$1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Logo:

$$V = 1 \text{ cm}^3.$$

7 Representação de um cubo unitário



8 Bloco retangular

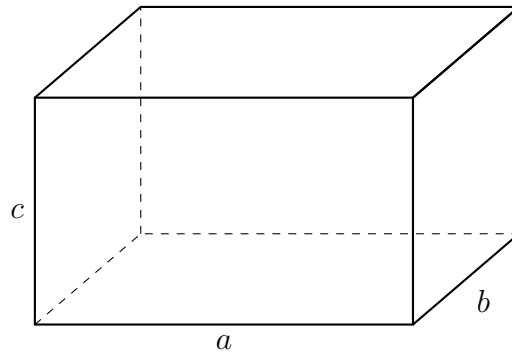
Definição 8.1: Bloco retangular

Um **bloco retangular**, também chamado de **paralelepípedo retângulo**, é um sólido cujas seis faces são retângulos.

Suas dimensões podem ser indicadas por:

$$a, \quad b, \quad c.$$

9 Representação do bloco retangular



10 Contagem de cubos unitários

Considere um bloco formado por pequenos cubos unitários.

Suponha que existam:

5

cubos no comprimento,

3

cubos na largura,

e:

2

camadas na altura.

Em uma camada há:

$$5 \cdot 3 = 15$$

cubos.

Como existem:

2

camadas:

4

$$15 \cdot 2 = 30.$$

Portanto:

$$V = 30 \text{ unidades}^3.$$

11 Dedução da fórmula do bloco retangular

Considere um bloco de dimensões:

$$a, \quad b, \quad c.$$

A base é um retângulo de área:

$$A_{\text{base}} = ab.$$

Se o sólido possui altura:

$$c,$$

podemos imaginar:

$$c$$

camadas de base ab , no caso de medidas inteiras unitárias.

Assim:

$$V = (ab)c.$$

Logo:

$$V = abc.$$

12 Teorema do volume do bloco retangular

Teorema 12.1: Volume do bloco retangular

Um bloco retangular com dimensões a , b e c possui volume:

$$V = abc.$$

Também podemos escrever:

$$V = \text{comprimento} \times \text{largura} \times \text{altura}.$$

13 Volume como área da base vezes altura

Como:

$$A_{\text{base}} = ab,$$

temos:

$$V = abc.$$

Logo:

$$V = (ab)c.$$

Portanto:

$$V = A_{\text{base}} \cdot h.$$

Observação

Essa forma é especialmente importante porque será generalizada posteriormente para outros prismas.

14 Exemplo fundamental

Exemplo

Um bloco retangular possui dimensões:

8 cm, 5 cm, 3 cm.

Determine seu volume.

Resolução

Utilizamos:

$$V = abc.$$

Então:

$$V = 8 \cdot 5 \cdot 3.$$

Primeiro:

$$8 \cdot 5 = 40.$$

Depois:

$$40 \cdot 3 = 120.$$

Logo:

$$V = 120 \text{ cm}^3.$$

15 Verificação da unidade

Observe:

$$\text{cm} \cdot \text{cm} \cdot \text{cm} = \text{cm}^3.$$

Portanto, dimensionalmente:

$$V = 8 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm}$$

resulta em:

$$120 \text{ cm}^3.$$

16 O cubo

Definição 16.1: Cubo

Um **cubo** é um bloco retangular cujas três dimensões possuem a mesma medida.

Se cada aresta mede:

$$a,$$

então:

$$V = a \cdot a \cdot a.$$

Logo:

$$V = a^3.$$

17 Teorema do volume do cubo

Teorema 17.1: Volume do cubo

Um cubo de aresta a possui volume:

$$V = a^3.$$

18 Exemplo com cubo

Exemplo

Um cubo possui aresta:

6 cm.

Determine seu volume.

Resolução

$$V = a^3.$$

Logo:

$$V = 6^3.$$

$$V = 216.$$

Portanto:

$$V = 216 \text{ cm}^3.$$

19 Problema inverso com cubo

Exemplo

Um cubo possui volume:

$$343 \text{ cm}^3.$$

Determine sua aresta.

Resolução

Como:

$$a^3 = 343.$$

temos:

$$343 = 7^3,$$

$$a = 7 \text{ cm.}$$

20 Problemas inversos no bloco retangular

A fórmula:

$$V = abc$$

permite determinar uma dimensão desconhecida quando conhecemos o volume e as outras duas.

Por exemplo:

$$c = \frac{V}{ab}.$$

Analogamente:

$$a = \frac{V}{bc},$$

$$b = \frac{V}{ac}.$$

21 Exemplo inverso

Exemplo

Um bloco retangular possui volume:

$$240 \text{ cm}^3.$$

Seu comprimento mede:

$$10 \text{ cm}$$

e sua largura:

$$6 \text{ cm}.$$

Determine a altura.

Resolução

$$V = abc.$$

Logo:

$$240 = 10 \cdot 6 \cdot h.$$

$$240 = 60h.$$

Portanto:

$$\boxed{h = 4 \text{ cm.}}$$

22 Exemplo usando a área da base

Exemplo

Um recipiente possui base retangular de:

$$12 \text{ cm}$$

por:

$$8 \text{ cm}.$$

Sua altura é:

$$15 \text{ cm}.$$

Determine o volume.

Resolução

Primeiro calculamos a área da base:

$$A_{\text{base}} = 12 \cdot 8.$$

$$A_{\text{base}} = 96 \text{ cm}^2.$$

Depois:

$$V = A_{\text{base}} \cdot h.$$

Assim:

$$V = 96 \cdot 15.$$

$$V = 1440.$$

Portanto:

$$V = 1440 \text{ cm}^3.$$

23 Unidades usuais de volume

As principais unidades métricas são:

$$\text{mm}^3,$$

$$\text{cm}^3,$$

$$\text{dm}^3,$$

$$\text{m}^3,$$

$$\text{dam}^3,$$

$$\text{hm}^3,$$

$$\text{km}^3.$$

24 Conversão de unidades de volume

Em comprimento:

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm}.$$

Elevando ambos os lados ao cubo:

$$1 \text{ m}^3 = (10 \text{ dm})^3.$$

Logo:

$$1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ dm}^3.$$

Portanto:

$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3.$

25 De metro cúbico para centímetro cúbico

Sabemos que:

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}.$$

Logo:

$$1 \text{ m}^3 = (100 \text{ cm})^3.$$

Assim:

$$1 \text{ m}^3 = 100^3 \text{ cm}^3.$$

Como:

$$100^3 = 1\,000\,000,$$

temos:

$1 \text{ m}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3.$

26 Por que cada passo vale 1000?

Entre unidades consecutivas de comprimento, o fator é:

$$10.$$

Como volume possui três dimensões:

$$10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000.$$

Logo, em unidades cúbicas, cada passo entre unidades consecutivas corresponde a:

$$\boxed{1000.}$$

27 Tabela de conversão

Relação	Conversão
1 dm = 10 cm	1 dm ³ = 1000 cm ³
1 m = 10 dm	1 m ³ = 1000 dm ³
1 m = 100 cm	1 m ³ = 1 000 000 cm ³

28 Exemplo de conversão

Exemplo

Converta:

$$3,2 \text{ m}^3$$

para:

$$\text{dm}^3.$$

Resolução

Sabemos que:

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3.$$

Então:

$$3,2 \cdot 1000 = 3200.$$

Logo:

$$3,2 \text{ m}^3 = 3200 \text{ dm}^3.$$

29 Outro exemplo de conversão

Exemplo

Converta:

$$7500 \text{ cm}^3$$

para:

$$\text{dm}^3.$$

Resolução

Como:

$$1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3,$$

dividimos:

$$7500 \div 1000 = 7,5.$$

Portanto:

$$7500 \text{ cm}^3 = 7,5 \text{ dm}^3.$$

30 Cuidado com as conversões

Atenção

Não utilize o mesmo fator de conversão de comprimentos.
Por exemplo:

$$1 \text{ m}^3 \neq 100 \text{ cm}^3.$$

O correto é:

$$1 \text{ m}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3.$$

31 Dimensões em unidades diferentes

Antes de calcular:

$$V = abc,$$

todas as dimensões devem estar em unidades compatíveis.

Exemplo

Uma caixa mede:

2 m

por:

50 cm

por:

30 cm.

Determine o volume em metros cúbicos.

Resolução

Convertemos:

$$50 \text{ cm} = 0,5 \text{ m},$$

$$30 \text{ cm} = 0,3 \text{ m}.$$

Então:

$$V = 2 \cdot 0,5 \cdot 0,3.$$

Logo:

$$V = 0,3 \text{ m}^3.$$

32 Volume de sólidos compostos

Alguns sólidos podem ser decompostos em vários blocos retangulares.

Nesse caso, podemos calcular:

$$V_1, \quad V_2, \quad \dots, \quad V_n$$

e somar:

$$V_{\text{total}} = V_1 + V_2 + \dots + V_n.$$

33 Princípio da aditividade do volume

Teorema 33.1: Aditividade do volume

Se um sólido é dividido em partes cujos interiores não se sobrepõem, seu volume total é igual à soma dos volumes das partes.

Assim:

$$V_{\text{total}} = \sum_{i=1}^n V_i.$$

34 Exemplo de sólido composto

Exemplo

Um sólido é formado por dois blocos retangulares sem sobreposição.
O primeiro mede:

$$6 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}.$$

O segundo mede:

$$2 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}.$$

Determine o volume total.

Resolução

Primeiro bloco:

$$V_1 = 6 \cdot 4 \cdot 3 = 72.$$

Segundo bloco:

$$V_2 = 2 \cdot 4 \cdot 5 = 40.$$

Então:

$$V_{\text{total}} = 72 + 40.$$

Logo:

$$V_{\text{total}} = 112 \text{ cm}^3.$$

35 Volume por subtração

Também podemos partir de um sólido maior e retirar uma região.

Nesse caso:

$$V_{\text{restante}} = V_{\text{maior}} - V_{\text{retirado}}.$$

36 Exemplo com recorte

Exemplo

Um bloco mede:

$$10 \text{ cm} \times 8 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}.$$

Dele é retirado um bloco de:

$$3 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}.$$

Determine o volume restante.

Resolução

Volume inicial:

$$V_1 = 10 \cdot 8 \cdot 6 = 480.$$

Volume retirado:

$$V_2 = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24.$$

Portanto:

$$V_{\text{restante}} = 480 - 24.$$

Logo:

$$V_{\text{restante}} = 456 \text{ cm}^3.$$

37 Recipientes em forma de bloco retangular

Uma caixa ou reservatório retangular pode ser modelado por:

$$V = abc.$$

Por exemplo, um reservatório com dimensões internas:

$$2 \text{ m}, \quad 1,5 \text{ m}, \quad 1 \text{ m}$$

possui volume interno:

$$V = 2 \cdot 1,5 \cdot 1.$$

Logo:

$$V = 3 \text{ m}^3.$$

38 Dimensões internas e externas

Atenção

Em problemas envolvendo recipientes, devemos observar se as medidas fornecidas são:

internas

ou:

externas.

Para determinar quanto cabe dentro de um recipiente, utilizamos suas dimensões:

internas.

39 Recipiente parcialmente preenchido

Se um recipiente retangular possui base:

$$a \times b$$

e o líquido atinge altura:

$$h,$$

o volume ocupado é:

$$V = abh.$$

Não devemos necessariamente utilizar a altura total do recipiente.

40 Exemplo de preenchimento parcial

Exemplo

Um recipiente possui base:

$$40 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}.$$

Um líquido ocupa uma altura de:

$$15 \text{ cm}.$$

Determine o volume ocupado.

Resolução

$$V = 40 \cdot 30 \cdot 15.$$

$$V = 18\,000.$$

Portanto:

$$V = 18\,000 \text{ cm}^3.$$

41 Problema de nível

Exemplo

Um recipiente retangular possui base:

$$50 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}.$$

Nele há:

$$15\,000 \text{ cm}^3$$

de líquido.

Determine a altura do líquido.

Resolução

A área da base é:

$$A_b = 50 \cdot 20 = 1000 \text{ cm}^2.$$

Como:

$$V = A_b h,$$

temos:

$$15\,000 = 1000h.$$

Logo:

$$h = 15 \text{ cm}.$$

42 Variação do volume

A fórmula:

$$V = abc$$

permite analisar como o volume muda quando as dimensões mudam.

43 Duplicar uma única dimensão

Se apenas a é duplicada:

$$a \rightarrow 2a,$$

então:

$$V' = (2a)bc.$$

Logo:

$$V' = 2abc.$$

Portanto:

$$\boxed{V' = 2V.}$$

Duplicar apenas uma dimensão duplica o volume.

44 Duplicar todas as dimensões

Se:

$$a \rightarrow 2a,$$

$$b \rightarrow 2b,$$

$$c \rightarrow 2c,$$

então:

$$V' = (2a)(2b)(2c).$$

Logo:

$$V' = 8abc.$$

Portanto:

$$V' = 8V.$$

45 Fator de escala do volume

Teorema 45.1: Escala volumétrica

Se todas as dimensões lineares de um sólido são multiplicadas por um fator $k > 0$, seu volume é multiplicado por:

$$k^3.$$

Assim:

$$\text{fator linear } k \implies \text{fator volumétrico } k^3.$$

46 Exemplo com escala

Exemplo

Um cubo tem aresta:

$$4 \text{ cm.}$$

Sua aresta é triplicada.

Por qual fator o volume aumenta?

Resolução

O fator linear é:

$$k = 3.$$

Logo, o fator volumétrico é:

$$k^3 = 3^3.$$

Então:

$$\text{o volume é multiplicado por 27.}$$

47 Redução à metade

Se todas as dimensões são reduzidas à metade:

$$k = \frac{1}{2},$$

então:

$$V' = \left(\frac{1}{2}\right)^3 V.$$

Logo:

$$V' = \frac{1}{8}V.$$

48 Comparação entre comprimento, área e volume

Se todas as dimensões lineares são multiplicadas por k :

$$\text{comprimento} \rightarrow k$$

$$\text{área} \rightarrow k^2$$

$$\text{volume} \rightarrow k^3.$$

Essa distinção é fundamental.

49 Problema contextual: piscina

Exemplo

Uma piscina retangular possui:

8 m

de comprimento,

4 m

de largura e profundidade uniforme de:

1,5 m.

Determine seu volume.

Resolução

$$V = 8 \cdot 4 \cdot 1,5.$$

$$V = 32 \cdot 1,5.$$

$$V = 48.$$

Portanto:

$$V = 48 \text{ m}^3.$$

50 Problema contextual: depósito

Exemplo

Um depósito possui dimensões internas:

12 m, 8 m, 4 m.

Determine o volume interno.

Resolução

$$V = 12 \cdot 8 \cdot 4.$$

$$V = 384.$$

Logo:

$$V = 384 \text{ m}^3.$$

51 Problema contextual: embalagem

Exemplo

Uma embalagem retangular possui:

30 cm

de comprimento,

20 cm

de largura e:

12 cm

de altura.

Determine seu volume.

Resolução

$$V = 30 \cdot 20 \cdot 12.$$

$$V = 7200.$$

Portanto:

$$V = 7200 \text{ cm}^3.$$

52 Problema com área da base conhecida

Exemplo

Um prisma retangular possui área da base:

$$35 \text{ cm}^2$$

e altura:

$$12 \text{ cm}.$$

Determine seu volume.

Resolução

$$V = A_b h.$$

Logo:

$$V = 35 \cdot 12.$$

$$V = 420.$$

Portanto:

$$V = 420 \text{ cm}^3.$$

53 Problema inverso com área da base

Exemplo

Um bloco possui volume:

$$960 \text{ cm}^3$$

e altura:

$$12 \text{ cm}.$$

Determine a área da base.

Resolução

$$V = A_b h.$$

Logo:

$$960 = 12A_b.$$

Então:

$$A_b = \frac{960}{12}.$$

Portanto:

$$A_b = 80 \text{ cm}^2.$$

54 Equações envolvendo volume

A fórmula:

$$V = abc$$

pode gerar equações.

Por exemplo, se:

$$a = x + 2,$$

$$b = 4,$$

$$c = 3,$$

e:

$$V = 72,$$

então:

$$(x + 2) \cdot 4 \cdot 3 = 72.$$

Assim:

$$12(x + 2) = 72.$$

$$x + 2 = 6.$$

Logo:

$$\boxed{x = 4.}$$

55 Estratégia geral

Notação

Ao resolver um problema de volume:

- 1) identifique o sólido;
- 2) identifique suas três dimensões;
- 3) verifique as unidades utilizadas;
- 4) converta as medidas para unidades compatíveis;
- 5) utilize:

$$V = abc$$

ou:

$$V = A_{\text{base}}h;$$

- 6) em sólidos compostos, decomponha em blocos simples;
- 7) some ou subtraia os volumes;
- 8) em problemas inversos, monte uma equação;
- 9) escreva a resposta em unidades cúbicas;
- 10) verifique se o resultado é coerente.

56 Erros comuns

Atenção

Erro 1: confundir área e volume.

Área:

$$\boxed{\text{unidade}^2}.$$

Volume:

$$\boxed{\text{unidade}^3}.$$

Atenção

Erro 2: multiplicar apenas duas dimensões.

Para um bloco retangular:

$$\boxed{V = abc.}$$

Multiplicar apenas:

$$ab$$

fornece a área da base, não o volume.

Atenção

Erro 3: somar as dimensões.

A expressão:

$$a + b + c$$

não calcula o volume.

O volume é obtido por:

$$\boxed{abc.}$$

Atenção

Erro 4: utilizar unidades incompatíveis.

Não devemos calcular diretamente:

$$2 \text{ m} \cdot 50 \text{ cm} \cdot 30 \text{ cm}.$$

Primeiro convertamos as unidades.

Atenção

Erro 5: converter volume como comprimento.

$$1 \text{ m}^3 \neq 100 \text{ cm}^3.$$

Na verdade:

$$1 \text{ m}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3.$$

Atenção

Erro 6: utilizar a altura externa de um recipiente quando se pede o volume interno.

Para a capacidade geométrica interna, devemos utilizar:

dimensões internas.

Atenção

Erro 7: achar que dobrar todas as dimensões dobra o volume.

Se:

$$k = 2,$$

então:

$$k^3 = 8.$$

Logo:

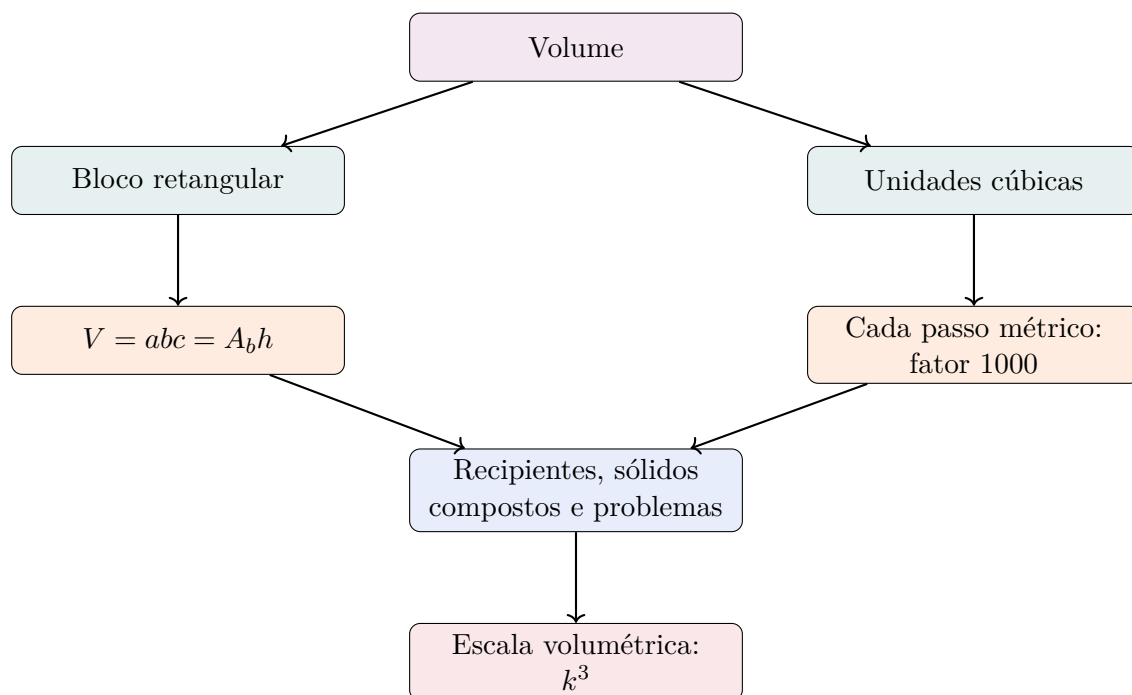
$$V \rightarrow 8V.$$

Atenção

Erro 8: utilizar a altura total do recipiente quando ele está parcialmente cheio.

Nesse caso, devemos utilizar a altura efetivamente ocupada.

57 Mapa conceitual



58 Resumo teórico

Situação	Relação
Bloco retangular	$V = abc$
Base e altura	$V = A_b h$
Cubo	$V = a^3$
Dimensão desconhecida	$c = \frac{V}{ab}$
Sólidos compostos	$V_{\text{total}} = \sum V_i$
Recorte	$V = V_{\text{maior}} - V_{\text{retirado}}$
Escala linear k	$V' = k^3 V$
1 dm^3	1000 cm^3
1 m^3	1000 dm^3

Notação

Fórmula principal:

$$V = abc.$$

Equivalentemente:

$$V = A_{\text{base}} h.$$

Para o cubo:

$$V = a^3.$$

Conversões importantes:

$$1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ m}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3.$$

Escala:

$$\text{dimensões} \rightarrow k \implies V \rightarrow k^3 V.$$

59 Exercícios

59.1 Parte A – Conceitos

Exercício

Responda:

- a) O que é volume?
- b) O que representa 1 cm^3 ?
- c) Qual é a diferença entre área e volume?
- d) Por que a unidade de volume possui expoente 3?
- e) O que é um bloco retangular?

59.2 Parte B – Blocos retangulares

Exercício

Determine o volume.

- a)
 $5 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 3 \text{ cm};$
- b)
 $12 \text{ cm} \times 8 \text{ cm} \times 5 \text{ cm};$

c)

$$7 \text{ m} \times 4 \text{ m} \times 2,5 \text{ m};$$

d)

$$2,4 \text{ m} \times 1,5 \text{ m} \times 3 \text{ m}.$$

59.3 Parte C – Cubos

Exercício

Determine o volume de cubos de aresta:

a)

$$3 \text{ cm};$$

b)

$$8 \text{ cm};$$

c)

$$1,5 \text{ m}.$$

Exercício

Determine a aresta dos cubos.

a)

$$V = 64 \text{ cm}^3;$$

b)

$$V = 125 \text{ cm}^3;$$

c)

$$V = 1000 \text{ cm}^3.$$

59.4 Parte D – Problemas inversos

Exercício

Determine a dimensão desconhecida.

a)

$$V = 240 \text{ cm}^3, \quad a = 10 \text{ cm}, \quad b = 6 \text{ cm};$$

b)

$$V = 504 \text{ cm}^3, \quad b = 7 \text{ cm}, \quad c = 8 \text{ cm};$$

c)

$$V = 180 \text{ m}^3, \quad a = 10 \text{ m}, \quad b = 6 \text{ m}.$$

59.5 Parte E – Área da base

Exercício

Um bloco possui:

$$A_{\text{base}} = 45 \text{ cm}^2$$

e altura:

$$8 \text{ cm.}$$

Determine o volume.

Exercício

Um bloco possui:

$$V = 720 \text{ cm}^3$$

e altura:

$$9 \text{ cm.}$$

Determine a área da base.

59.6 Parte F – Conversões

Exercício

Converta.

a)

$$2 \text{ m}^3$$

para dm^3 ;

b)

$$4,5 \text{ dm}^3$$

para cm^3 ;

c)

$$7000 \text{ cm}^3$$

para dm^3 ;

d)

$$3500 \text{ dm}^3$$

para m^3 ;

e)

$$0,25 \text{ m}^3$$

para cm^3 .

59.7 Parte G – Unidades diferentes

Exercício

Uma caixa mede:

1,5 m

por:

80 cm

por:

50 cm.

Determine seu volume em:

m^3 .

59.8 Parte H – Sólidos compostos

Exercício

Um sólido é formado por dois blocos:

$6 \times 4 \times 3 \text{ cm}$

e:

$5 \times 2 \times 4 \text{ cm.}$

Sabendo que não há sobreposição, determine o volume total.

Exercício

Um bloco de:

$12 \times 10 \times 8 \text{ cm}$

possui um recorte de:

$4 \times 3 \times 5 \text{ cm.}$

Determine o volume restante.

59.9 Parte I – Recipientes

Exercício

Um reservatório retangular possui dimensões internas:

$$2,5 \text{ m}, \quad 2 \text{ m}, \quad 1,2 \text{ m}.$$

Determine seu volume interno.

Exercício

Um recipiente possui base:

$$60 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}.$$

Um líquido atinge altura:

$$25 \text{ cm}.$$

Determine o volume ocupado.

59.10 Parte J – Nível de líquido

Exercício

Um recipiente possui base:

$$40 \text{ cm} \times 25 \text{ cm}.$$

Nele existem:

$$18\,000 \text{ cm}^3$$

de líquido.

Determine a altura ocupada pelo líquido.

59.11 Parte K – Escala

Exercício

Responda.

- Se apenas a altura de um bloco dobra, por qual fator seu volume muda?
- Se todas as dimensões dobram, por qual fator o volume muda?
- Se todas as dimensões triplicam, por qual fator o volume muda?
- Se todas as dimensões são reduzidas à metade, qual fração do volume original permanece?

59.12 Parte L – Aplicações

Exercício

Uma piscina retangular possui:

10 m

de comprimento,

5 m

de largura e profundidade uniforme de:

1,4 m.

Determine seu volume.

Exercício

Um depósito possui volume:

360 m^3 .

Seu piso mede:

12 m

por:

10 m.

Determine a altura do depósito.

60 Gabarito comentado

60.1 Parte A

Resolução

- a) Volume é a medida do espaço tridimensional ocupado por um sólido.
- b) 1 cm^3 é o volume de um cubo de aresta 1 cm.
- c) Área mede uma superfície; volume mede uma região tridimensional.
- d) Porque o volume envolve três dimensões lineares:
 $\text{comprimento} \times \text{largura} \times \text{altura}.$
- e) É um sólido com seis faces retangulares.

60.2 Parte B

Resolução

a)

$$V = 5 \cdot 4 \cdot 3.$$

$$V = 60 \text{ cm}^3.$$

b)

$$V = 12 \cdot 8 \cdot 5.$$

$$V = 480 \text{ cm}^3.$$

c)

$$V = 7 \cdot 4 \cdot 2,5.$$

$$V = 70.$$

$$V = 70 \text{ m}^3.$$

d)

$$V = 2,4 \cdot 1,5 \cdot 3.$$

$$V = 10,8.$$

$$V = 10,8 \text{ m}^3.$$

60.3 Parte C

Resolução

Volumes

$$3^3 = 27.$$

$$27 \text{ cm}^3$$

$$8^3 = 512.$$

$$512 \text{ cm}^3$$

$$(1,5)^3 = 3,375.$$

$$\boxed{3,375 \text{ m}^3}$$

Arestas

$$\sqrt[3]{64} = 4.$$

$$\boxed{4 \text{ cm}}$$

$$\sqrt[3]{125} = 5.$$

$$\boxed{5 \text{ cm}}$$

$$\sqrt[3]{1000} = 10.$$

$$\boxed{10 \text{ cm}}$$

60.4 Parte D

Resolução

a)

$$240 = 10 \cdot 6 \cdot c.$$

$$240 = 60c.$$

Logo:

$$\boxed{c = 4 \text{ cm.}}$$

b)

$$504 = a \cdot 7 \cdot 8.$$

$$504 = 56a.$$

Logo:

$$\boxed{a = 9 \text{ cm.}}$$

c)

$$180 = 10 \cdot 6 \cdot c.$$

$$180 = 60c.$$

Logo:

$$c = 3 \text{ m.}$$

60.5 Parte E

Resolução

1.

$$V = A_b h.$$

$$V = 45 \cdot 8.$$

$$V = 360 \text{ cm}^3.$$

2.

$$720 = 9A_b.$$

Logo:

$$A_b = 80 \text{ cm}^2.$$

60.6 Parte F

Resolução

a)

$$2 \cdot 1000 = 2000 \text{ dm}^3.$$

b)

$$4,5 \cdot 1000 = 4500 \text{ cm}^3.$$

c)

$$7000 \div 1000 = 7 \text{ dm}^3.$$

d)

$$3500 \div 1000 = 3,5 \text{ m}^3.$$

e)

$$0,25 \cdot 1\,000\,000 = 250\,000 \text{ cm}^3.$$

60.7 Parte G

Resolução

Convertemos:

$$80 \text{ cm} = 0,8 \text{ m},$$

$$50 \text{ cm} = 0,5 \text{ m}.$$

Então:

$$V = 1,5 \cdot 0,8 \cdot 0,5.$$

$$V = 0,6.$$

Logo:

$$V = 0,6 \text{ m}^3.$$

60.8 Parte H

Resolução

Primeiro sólido

$$V_1 = 6 \cdot 4 \cdot 3 = 72.$$

$$V_2 = 5 \cdot 2 \cdot 4 = 40.$$

Logo:

$$V_T = 72 + 40.$$

$$\boxed{V_T = 112 \text{ cm}^3.}$$

Segundo sólido

Volume maior:

$$12 \cdot 10 \cdot 8 = 960.$$

Recorte:

$$4 \cdot 3 \cdot 5 = 60.$$

Logo:

$$V = 960 - 60.$$

$$\boxed{V = 900 \text{ cm}^3.}$$

60.9 Parte I

Resolução

Reservatório

$$V = 2,5 \cdot 2 \cdot 1,2.$$

$$V = 6.$$

Logo:

$$\boxed{V = 6 \text{ m}^3.}$$

Recipiente

$$V = 60 \cdot 40 \cdot 25.$$

$$V = 60\,000.$$

Logo:

$$V = 60\,000 \text{ cm}^3.$$

60.10 Parte J

Resolução

Área da base:

$$A_b = 40 \cdot 25 = 1000 \text{ cm}^2.$$

Então:

$$18\,000 = 1000h.$$

Logo:

$$h = 18 \text{ cm.}$$

60.11 Parte K

Resolução

a) Apenas uma dimensão dobra:

$$V \rightarrow 2V.$$

b) Todas dobram:

$$V \rightarrow 8V.$$

c) Todas triplicam:

$$V \rightarrow 27V.$$

d) Todas pela metade:

$$V \rightarrow \frac{1}{8}V.$$

60.12 Parte L

Resolução

Piscina

$$V = 10 \cdot 5 \cdot 1,4.$$

$$V = 70.$$

Logo:

$$V = 70 \text{ m}^3.$$

Depósito

Área do piso:

$$A_b = 12 \cdot 10 = 120 \text{ m}^2.$$

Como:

$$V = A_b h,$$

temos:

$$360 = 120h.$$

Logo:

$$h = 3 \text{ m}.$$

61 Avaliação final

Avaliação final – Volume de blocos retangulares

Resolva as questões abaixo.

1. Explique o conceito de volume e dê uma unidade apropriada.
2. Qual é o volume de um bloco de:

$$9 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} \times 4 \text{ cm?}$$

3. Um cubo possui aresta:

$$7 \text{ cm}.$$

Determine seu volume.

4. Um bloco possui volume:

$$360 \text{ cm}^3,$$

comprimento:

$$12 \text{ cm}$$

e largura:

$$5 \text{ cm}.$$

Determine sua altura.

5. Converta:

$$3,5 \text{ m}^3$$

para:

$$\text{dm}^3.$$

6. Converta:

$$8500 \text{ cm}^3$$

para:

$$\text{dm}^3.$$

7. Um reservatório interno mede:

$$2 \text{ m} \times 1,5 \text{ m} \times 1,2 \text{ m}.$$

Determine seu volume.

8. Um recipiente possui base:

$$50 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}.$$

Um líquido ocupa volume:

$$30\,000 \text{ cm}^3.$$

Determine a altura atingida.

9. Um bloco de:

$$10 \text{ cm} \times 8 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$$

sofre um recorte de:

$$2 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}.$$

Determine o volume restante.

10. Todas as dimensões lineares de um bloco são triplicadas. Por qual fator seu volume é multiplicado? Justifique.

61.1 Gabarito da avaliação final

Resolução

1. Volume mede o espaço tridimensional ocupado por um sólido. Uma unidade apropriada é:

$$\boxed{\text{cm}^3}$$

ou:

$$\boxed{\text{m}^3}.$$

2. :

$$V = 9 \cdot 5 \cdot 4.$$

$$V = 180.$$

Logo:

$$\boxed{V = 180 \text{ cm}^3}.$$

3. :

$$V = 7^3.$$

$$V = 343.$$

Portanto:

$$V = 343 \text{ cm}^3.$$

4. :

$$360 = 12 \cdot 5 \cdot h.$$

$$360 = 60h.$$

Logo:

$$h = 6 \text{ cm.}$$

5. :

$$3,5 \cdot 1000 = 3500.$$

Portanto:

$$3,5 \text{ m}^3 = 3500 \text{ dm}^3.$$

6. :

$$8500 \div 1000 = 8,5.$$

Logo:

$$8500 \text{ cm}^3 = 8,5 \text{ dm}^3.$$

7. :

$$V = 2 \cdot 1,5 \cdot 1,2.$$

$$V = 3,6.$$

Portanto:

$$V = 3,6 \text{ m}^3.$$

8. Área da base:

$$A_b = 50 \cdot 40.$$

$$A_b = 2000 \text{ cm}^2.$$

Como:

$$30\,000 = 2000h,$$

temos:

$$\boxed{h = 15 \text{ cm.}}$$

9. Volume inicial:

$$10 \cdot 8 \cdot 6 = 480.$$

Volume retirado:

$$2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Logo:

$$480 - 24 = 456.$$

Portanto:

$$\boxed{V = 456 \text{ cm}^3.}$$

10. Se cada dimensão é multiplicada por:

$$3,$$

temos:

$$V' = (3a)(3b)(3c).$$

Logo:

$$V' = 27abc.$$

Portanto:

$$\boxed{V' = 27V.}$$

62 Conclusão

O volume permite medir o espaço ocupado por objetos tridimensionais.

Para blocos retangulares, a ideia fundamental é interpretar o sólido como uma sequência de camadas de cubos unitários.

As principais conclusões são:

- 1) volume é uma grandeza tridimensional;
- 2) suas unidades são cúbicas;
- 3) um bloco retangular possui volume:

$$V = abc;$$

- 4) a fórmula também pode ser escrita como:

$$V = A_{\text{base}}h;$$

- 5) um cubo possui:

$$V = a^3;$$

- 6) problemas inversos podem ser resolvidos isolando a dimensão desconhecida;
- 7) as dimensões devem estar em unidades compatíveis;
- 8) cada mudança entre unidades cúbicas métricas consecutivas envolve fator:

$$1000;$$

- 9) sólidos compostos podem ser resolvidos por adição ou subtração de volumes;
- 10) em recipientes parcialmente preenchidos, utilizamos a altura ocupada;
- 11) quando todas as dimensões são multiplicadas por k , o volume é multiplicado por:

$$k^3.$$

Notação

Resumo final:

$$V_{\text{bloco}} = abc$$

$$V = A_{\text{base}}h$$

$$V_{\text{cubo}} = a^3$$

$$1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ m}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$$

Para sólidos compostos:

$$V_{\text{total}} = \sum V_i$$

e, para regiões retiradas:

$$V_{\text{restante}} = V_{\text{maior}} - V_{\text{retirado}}.$$

Finalmente:

$$\text{fator linear } k \implies \text{fator volumétrico } k^3.$$

Fim do curso