

Transformações Geométricas

Matemática – 8º Ano

Translação, reflexão, rotação, simetrias e composição de transformações

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste curso, o estudante deverá ser capaz de:

- 1) compreender o conceito de transformação geométrica;
- 2) distinguir figura original e figura imagem;
- 3) compreender o conceito de isometria;
- 4) identificar propriedades preservadas por transformações rígidas;
- 5) reconhecer e construir translações;
- 6) interpretar um vetor de translação;
- 7) determinar coordenadas após uma translação;
- 8) reconhecer e construir reflexões;
- 9) compreender o papel do eixo de reflexão;
- 10) determinar coordenadas após reflexões nos eixos coordenados;
- 11) reconhecer e construir rotações;
- 12) identificar centro, sentido e ângulo de rotação;
- 13) determinar coordenadas em rotações especiais em torno da origem;
- 14) compreender simetria axial e simetria de rotação;
- 15) compor duas ou mais transformações;
- 16) reconhecer que a ordem das transformações pode alterar o resultado;
- 17) construir imagens de polígonos por translação, reflexão e rotação;
- 18) resolver problemas geométricos e no plano cartesiano envolvendo transformações.

Sumário

2	Definição de transformação geométrica	1
3	Figura original e figura imagem	2
4	Transformações rígidas	3
5	Propriedades preservadas	3
6	Translação	4
7	Vetor de translação	4
8	Translação no plano cartesiano	5
9	Exemplo de translação	5
10	Interpretação dos sinais na translação	6
11	Translação de um polígono	6
12	Ilustração de uma translação	7
13	Propriedades da translação	8
14	Construção geométrica de uma translação	8
15	Reflexão	8
16	Caracterização da reflexão	9
17	Pontos sobre o eixo	9
18	Construção da reflexão de um ponto	9
19	Ilustração da reflexão	10
20	Reflexão em relação ao eixo x	10
21	Reflexão em relação ao eixo y	11
22	Reflexão em relação à origem	11
23	Tabela de reflexões no plano cartesiano	12

24 Exemplo com triângulo e reflexão	12
25 Simetria axial	13
26 Exemplos de simetria axial	13
27 Rotação	13
28 Sentido horário e anti-horário	14
29 Caracterização geométrica da rotação	14
30 Ilustração de uma rotação	15
31 Ponto fixo da rotação	15
32 Rotação de 90° anti-horária	15
33 Rotação de 90° horária	16
34 Rotação de 180°	16
35 Rotação de 270° anti-horária	16
36 Tabela das rotações especiais	17
37 Como recordar a rotação de 90°	17
38 Exemplo de rotação de um triângulo	18
39 Construção geométrica de uma rotação	18
40 Simetria de rotação	19
41 Exemplo: quadrado	19
42 Ordem de simetria	19
43 Polígono regular e rotação	20
44 Comparação entre as transformações	20
45 Orientação da figura	20

46 Composição de transformações	21
47 Exemplo de composição	21
48 A ordem pode importar	22
49 Refletir duas vezes no mesmo eixo	23
50 Duas rotações em torno do mesmo centro	23
51 Quatro rotações de 90°	23
52 Transformação identidade	24
53 Construção de imagens de polígonos	24
54 Algoritmo de translação de um polígono	25
55 Algoritmo de reflexão	25
56 Algoritmo de rotação	25
57 Problema no plano cartesiano	26
58 Identificação da transformação	27
59 Transformações e congruência	27
60 Área e perímetro	27
61 Erros comuns	28
62 Mapa conceitual	30
63 Resumo teórico	30
64 Exercícios	31
64.1 Parte A – Conceitos	31
64.2 Parte B – Translação	31
64.3 Parte C – Descobrir o vetor	32
64.4 Parte D – Reflexão	32
64.5 Parte E – Rotação	33

64.6	Parte F – Identificação	33
64.7	Parte G – Polígonos	34
64.8	Parte H – Composição	34
64.9	Parte I – Simetrias	35
64.10	Parte J – Propriedades	35
65	Gabarito comentado	36
65.1	Parte A	36
65.2	Parte B	36
65.3	Parte C	37
65.4	Parte D	37
65.5	Parte E	38
65.6	Parte F	38
65.7	Parte G	39
65.8	Parte H	39
65.9	Parte I	40
65.10	Parte J	41
66	Avaliação final	41
66.1	Gabarito da avaliação final	42
67	Conclusão	44

1 Introdução

Uma figura geométrica pode ser:

- deslocada;
- refletida;
- girada;
- ou submetida a várias dessas operações sucessivamente.

Por exemplo, um triângulo pode ser deslocado três unidades para a direita sem alterar:

seus lados,

seus ângulos,

seu perímetro

ou:

sua área.

A posição da figura muda, mas sua forma e seu tamanho permanecem.

Essas operações são chamadas de:

transformações geométricas.

2 Definição de transformação geométrica

Definição 2.1: Transformação geométrica

Uma **transformação geométrica** é uma regra que associa a cada ponto de uma figura um ponto correspondente chamado de imagem.

Se um ponto:

A

é transformado no ponto:

A' ,

podemos escrever:

$$\boxed{A \mapsto A' .}$$

Lemos:

“ A é transformado em A' .”

3 Figura original e figura imagem

Considere:

$$\triangle ABC.$$

Após uma transformação, podemos obter:

$$\triangle A'B'C'.$$

Chamamos:

$$\triangle ABC$$

de:

$$\boxed{\text{figura original}}$$

e:

$$\triangle A'B'C'$$

de:

$$\boxed{\text{figura imagem.}}$$

A correspondência é:

$$A \mapsto A',$$

$$B \mapsto B',$$

$$C \mapsto C'.$$

4 Transformações rígidas

As transformações que estudaremos são:

translação,

reflexão

e:

rotação.

Todas elas preservam distâncias.

Definição 4.1: Isometria

Uma **isometria** é uma transformação geométrica que preserva a distância entre quaisquer dois pontos.

Se:

$$A \mapsto A'$$

e:

$$B \mapsto B',$$

então uma isometria satisfaz:

$$AB = A'B'.$$

5 Propriedades preservadas

Teorema 5.1: Propriedades das isometrias

Translações, reflexões e rotações preservam:

- comprimentos;
- medidas de ângulos;
- alinhamento de pontos;
- paralelismo;
- perpendicularidade;
- perímetro;
- área.

Consequentemente, a figura e sua imagem são:

congruentes.

6 Translação

Definição 6.1: Translação

Uma **translação** é uma transformação que desloca todos os pontos de uma figura pela mesma distância, na mesma direção e no mesmo sentido.

Em uma translação:

$$A \mapsto A',$$

$$B \mapsto B',$$

$$C \mapsto C'.$$

Os deslocamentos:

$$\overrightarrow{AA'},$$

$$\overrightarrow{BB'},$$

$$\overrightarrow{CC'}.$$

são iguais.

7 Vetor de translação

Definição 7.1: Vetor de translação

Um vetor de translação representa o deslocamento aplicado a todos os pontos de uma figura.

Podemos representá-lo por:

$$\vec{v} = (a, b),$$

em que:

$$a$$

$$b$$

representa o deslocamento horizontal e:

$$b$$

o deslocamento vertical.

8 Translação no plano cartesiano

Se:

$$P = (x, y)$$

e aplicamos a translação:

$$\vec{v} = (a, b),$$

então:

$$P' = (x + a, y + b).$$

Ou seja:

$$(x, y) \mapsto (x + a, y + b).$$

9 Exemplo de translação

Exemplo

Considere:

$$P = (2, 3)$$

e a translação:

$$\vec{v} = (4, -2).$$

Determine P' .

Resolução

Aplicamos:

$$(x, y) \mapsto (x + 4, y - 2).$$

Assim:

$$P' = (2 + 4, 3 - 2).$$

Logo:

$$P' = (6, 1).$$

10 Interpretação dos sinais na translação

Para:

$$\vec{v} = (a, b),$$

temos:

- $a > 0$: deslocamento para a direita;
- $a < 0$: deslocamento para a esquerda;
- $b > 0$: deslocamento para cima;
- $b < 0$: deslocamento para baixo.

Exemplo

$$\vec{v} = (-3, 5)$$

significa:

3 unidades para a esquerda

e:

5 unidades para cima.

11 Translação de um polígono

Considere:

$$A = (1, 1),$$

$$B = (4, 1),$$

$$C = (2, 3).$$

Aplicamos:

$$\vec{v} = (3, 2).$$

Então:

$$A' = (4, 3),$$

$$B' = (7, 3),$$

$$C' = (5, 5).$$

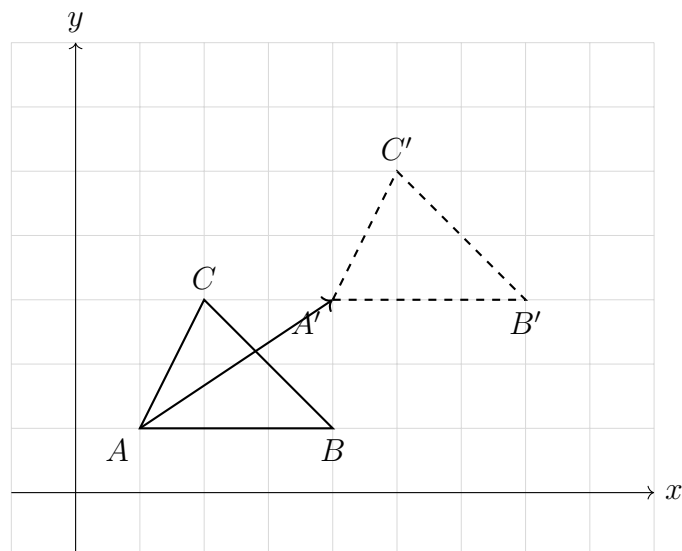
Logo:

$$\triangle ABC$$

é transformado em:

$$\triangle A'B'C'.$$

12 Ilustração de uma translação



13 Propriedades da translação

Teorema 13.1: Propriedades da translação

Uma translação preserva:

comprimentos

ângulos

e:

paralelismo.

Além disso, para qualquer ponto P :

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{v}.$$

14 Construção geométrica de uma translação

Para transportar um ponto A segundo um vetor:

$$\overrightarrow{PQ},$$

devemos construir A' de modo que:

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PQ}.$$

Isso significa possuir:

- a mesma direção;
- o mesmo sentido;
- o mesmo comprimento.

15 Reflexão

Definição 15.1: Reflexão axial

Uma **reflexão** em relação a uma reta r transforma cada ponto P em um ponto P' situado simetricamente do outro lado de r .

A reta r é chamada de:

eixo de reflexão

ou:

eixo de simetria da transformação.

16 Caracterização da reflexão

Se:

$$P \mapsto P'$$

por reflexão em relação à reta r , então:

r é a mediatriz de PP' .

Portanto:

- 1) $PP' \perp r$;
- 2) o ponto de interseção de PP' com r é o ponto médio de PP' .

17 Pontos sobre o eixo

Teorema 17.1: Pontos fixos da reflexão

Todo ponto que pertence ao eixo de reflexão permanece no mesmo lugar.

Se:

$$P \in r,$$

então:

$$P' = P.$$

Esses pontos são chamados de:

pontos fixos.

18 Construção da reflexão de um ponto

Dado um ponto P e uma reta r :

- 1) trace uma perpendicular a r passando por P ;

2) determine o ponto M de interseção com r ;

3) sobre a perpendicular, do outro lado de r , marque P' de modo que:

$$PM = MP';$$

4) então:

r

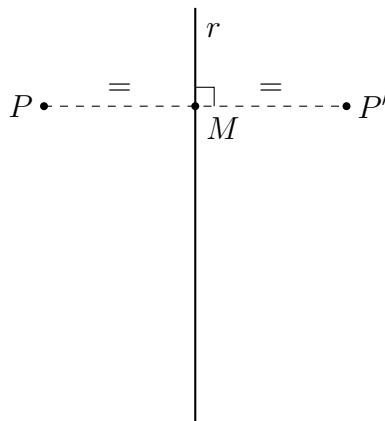
é mediatriz de:

$$PP'.$$

Logo:

$$\boxed{P' \text{ é a reflexão de } P.}$$

19 Ilustração da reflexão



20 Reflexão em relação ao eixo x

Considere:

$$P = (x, y).$$

A reflexão em relação ao eixo x mantém a coordenada x e troca o sinal da coordenada y .

Assim:

$$\boxed{(x, y) \mapsto (x, -y).}$$

Exemplo

$$P = (3, 5).$$

Após reflexão no eixo x :

$$P' = (3, -5).$$

21 Reflexão em relação ao eixo y

Na reflexão em relação ao eixo y :

$$(x, y) \mapsto (-x, y).$$

Exemplo

$$P = (-4, 2).$$

Após reflexão no eixo y :

$$P' = (4, 2).$$

Logo:

$$P' = (4, 2).$$

22 Reflexão em relação à origem

A transformação:

$$(x, y) \mapsto (-x, -y)$$

é uma simetria central em relação à origem.

Ela também pode ser interpretada como uma rotação de:

$$180^\circ$$

em torno da origem.

Notação

$$(x, y) \mapsto (-x, -y).$$

23 Tabela de reflexões no plano cartesiano

Transformação	Regra
Reflexão no eixo x	$(x, y) \mapsto (x, -y)$
Reflexão no eixo y	$(x, y) \mapsto (-x, y)$
Simetria em relação à origem	$(x, y) \mapsto (-x, -y)$

24 Exemplo com triângulo e reflexão

Exemplo

Considere:

$$A = (1, 2),$$

$$B = (4, 2),$$

$$C = (2, 5).$$

Determine a imagem por reflexão no eixo x .

Resolução

Utilizamos:

$$(x, y) \mapsto (x, -y).$$

Então:

$$A' = (1, -2),$$

$$B' = (4, -2),$$

$$C' = (2, -5).$$

Portanto:

$$A' = (1, -2), \quad B' = (4, -2), \quad C' = (2, -5).$$

25 Simetria axial

Definição 25.1: Simetria axial

Uma figura possui **simetria axial** quando existe uma reta tal que a reflexão da figura em relação a essa reta coincide com a própria figura.

Essa reta é chamada de:

eixo de simetria.

26 Exemplos de simetria axial

Um quadrado possui:

4

eixos de simetria.

Um retângulo não quadrado possui:

2

eixos de simetria.

Um triângulo equilátero possui:

3

eixos de simetria.

Um triângulo escaleno possui:

0

eixos de simetria.

27 Rotação

Definição 27.1: Rotação

Uma **rotação** é uma transformação que gira uma figura em torno de um ponto fixo chamado centro de rotação.

Uma rotação é determinada por:

- 1) um centro O ;

- 2) um ângulo θ ;
- 3) um sentido de rotação.

28 Sentido horário e anti-horário

Uma rotação pode ocorrer no sentido:

horário

ou:

anti-horário

.

Por convenção matemática, quando utilizamos ângulos orientados:

- sentido anti-horário corresponde a ângulo positivo;
- sentido horário corresponde a ângulo negativo.

Observação

No 8º ano, é suficiente indicar explicitamente o sentido da rotação.

29 Caracterização geométrica da rotação

Se uma rotação de centro O transforma:

$$P \mapsto P',$$

então:

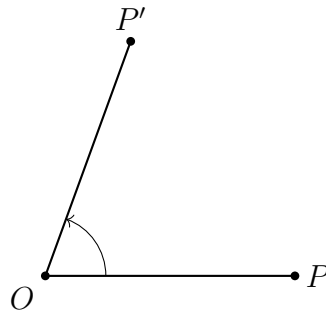
$$OP = OP'$$

e o ângulo:

$$\widehat{POP'}$$

possui a medida correspondente à rotação.

30 Ilustração de uma rotação



Temos:

$$OP = OP'.$$

31 Ponto fixo da rotação

Teorema 31.1: Centro da rotação

O centro de uma rotação permanece fixo.

Assim:

$$O \mapsto O.$$

32 Rotação de 90° anti-horária

Para uma rotação de:

$$90^\circ$$

no sentido anti-horário em torno da origem:

$$(x, y) \mapsto (-y, x).$$

Exemplo

$$P = (3, 1).$$

Então:

$$P' = (-1, 3).$$

Logo:

$$P' = (-1, 3).$$

33 Rotação de 90° horária

Uma rotação de 90° no sentido horário corresponde a:

$$(x, y) \mapsto (y, -x).$$

Exemplo

Então:

$$P = (2, 5).$$

Logo:

$$P' = (5, -2).$$

$$P' = (5, -2).$$

34 Rotação de 180°

Para uma rotação de:

$$180^\circ$$

em torno da origem:

$$(x, y) \mapsto (-x, -y).$$

O sentido horário ou anti-horário produz o mesmo resultado.

35 Rotação de 270° anti-horária

Uma rotação de:

$$270^\circ$$

no sentido anti-horário equivale a uma rotação de:

$$90^\circ$$

no sentido horário.

Assim:

$$(x, y) \longmapsto (y, -x).$$

36 Tabela das rotações especiais

Rotação em torno da origem	Regra
90° anti-horária	$(x, y) \mapsto (-y, x)$
180°	$(x, y) \mapsto (-x, -y)$
270° anti-horária	$(x, y) \mapsto (y, -x)$
90° horária	$(x, y) \mapsto (y, -x)$

37 Como recordar a rotação de 90°

Considere:

$$(1, 0).$$

Esse ponto está sobre o eixo x positivo.

Após girá-lo 90° no sentido anti-horário, obtemos:

$$(0, 1).$$

A regra:

$$(x, y) \longmapsto (-y, x)$$

produz:

$$(1, 0) \longmapsto (0, 1).$$

Isso ajuda a verificar se utilizamos a fórmula correta.

38 Exemplo de rotação de um triângulo

Exemplo

Considere:

$$A = (1, 1),$$

$$B = (3, 1),$$

$$C = (2, 4).$$

Realize uma rotação de 90° anti-horária em torno da origem.

Resolução

Usamos:

$$(x, y) \mapsto (-y, x).$$

Então:

$$A' = (-1, 1),$$

$$B' = (-1, 3),$$

$$C' = (-4, 2).$$

Portanto:

$$A' = (-1, 1), \quad B' = (-1, 3), \quad C' = (-4, 2).$$

39 Construção geométrica de uma rotação

Para construir a imagem P' de um ponto P por uma rotação de centro O e ângulo θ :

1) trace:

$$OP;$$

2) construa no centro O um ângulo de medida:

$$\theta;$$

3) respeite o sentido solicitado;

4) sobre a nova semirreta, marque P' de modo que:

$$OP' = OP.$$

Então:

$$P' \text{ é a imagem de } P.$$

40 Simetria de rotação

Definição 40.1: Simetria de rotação

Uma figura possui **simetria de rotação** quando uma rotação de ângulo menor que 360° faz a figura coincidir consigo mesma.

41 Exemplo: quadrado

Um quadrado coincide consigo mesmo após rotações de:

$$90^\circ,$$

$$180^\circ,$$

$$270^\circ,$$

e naturalmente:

$$360^\circ.$$

Portanto, seu menor ângulo positivo de simetria de rotação é:

$$90^\circ.$$

42 Ordem de simetria

Definição 42.1: Ordem de simetria de rotação

A ordem de simetria de rotação de uma figura é o número de posições em uma volta completa nas quais a figura coincide consigo mesma.

Para um quadrado:

$$\text{ordem} = 4.$$

Para um triângulo equilátero:

$$\text{ordem} = 3.$$

43 Polígono regular e rotação

Um polígono regular de n lados possui simetria de rotação de ordem:

$$n.$$

Seu menor ângulo positivo de rotação é:

$$\frac{360^\circ}{n}.$$

Por exemplo, para um hexágono regular:

$$\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ.$$

Logo:

$$\text{menor rotação} = 60^\circ.$$

44 Comparação entre as transformações

Transformação	Ideia	Elemento principal	Congruência
Translação	deslocar	vetor	sim
Reflexão	espelhar	eixo	sim
Rotação	girar	centro e ângulo	sim

45 Orientação da figura

Considere os vértices de um triângulo percorridos na ordem:

$$A \rightarrow B \rightarrow C.$$

Uma translação ou rotação preserva essa orientação.

Uma reflexão inverte essa orientação.

Observação

Essa propriedade é um aprofundamento útil para distinguir uma reflexão de uma rotação ou translação.

46 Composição de transformações

Definição 46.1: Composição de transformações

Uma **composição de transformações** ocorre quando aplicamos duas ou mais transformações sucessivamente.

Por exemplo:

$$P \xrightarrow{T} P' \xrightarrow{R} P''.$$

Primeiro aplicamos:

$$T,$$

e depois:

$$R.$$

47 Exemplo de composição

Exemplo

Considere:

$$P = (1, 2).$$

Primeiro faça uma translação:

$$\vec{v} = (3, 1).$$

Depois faça uma reflexão no eixo x .

Resolução

Primeira transformação:

$$(1, 2) \mapsto (4, 3).$$

Logo:

$$P' = (4, 3).$$

Segunda transformação:

Reflexão no eixo x :

$$(x, y) \mapsto (x, -y).$$

Então:

$$(4, 3) \mapsto (4, -3).$$

Portanto:

$$\boxed{P'' = (4, -3)}.$$

48 A ordem pode importar

Considere novamente:

$$P = (1, 2).$$

Agora vamos inverter a ordem:

- 1) refletir no eixo x ;
- 2) transladar por:

$$(3, 1).$$

Primeiro:

$$(1, 2) \mapsto (1, -2).$$

Depois:

$$(1, -2) \mapsto (4, -1).$$

Resultado:

$$\boxed{(4, -1)}.$$

Anteriormente obtivemos:

$$(4, -3).$$

Logo:

a ordem das transformações pode alterar o resultado.

49 Refletir duas vezes no mesmo eixo

Teorema 49.1: Duas reflexões no mesmo eixo

Aplicar duas reflexões sucessivas em relação ao mesmo eixo devolve cada ponto à posição original.

Assim:

$$P \mapsto P' \mapsto P.$$

No plano cartesiano, por exemplo, refletindo duas vezes no eixo x :

$$(x, y) \mapsto (x, -y) \mapsto (x, y).$$

50 Duas rotações em torno do mesmo centro

Se aplicamos duas rotações de mesmo centro, seus ângulos podem ser somados.

Por exemplo:

$$90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

Assim, duas rotações sucessivas de 90° anti-horárias equivalem a:

$$\text{uma rotação de } 180^\circ.$$

51 Quatro rotações de 90°

Aplicando quatro rotações de:

$$90^\circ$$

em torno do mesmo centro:

$$4 \cdot 90^\circ = 360^\circ.$$

Logo, retornamos à posição original.

$$R_{90}^4 = \text{identidade.}$$

52 Transformação identidade

Definição 52.1: Transformação identidade

A transformação identidade é aquela que mantém todos os pontos em suas posições originais.

Assim:

$$P \mapsto P.$$

Uma rotação de:

$$360^\circ$$

é um exemplo de transformação identidade.

53 Construção de imagens de polígonos

Para transformar um polígono:

$$A_1 A_2 \cdots A_n,$$

devemos transformar cada vértice:

$$A_1 \mapsto A'_1,$$

$$A_2 \mapsto A'_2,$$

$$\vdots$$

$$A_n \mapsto A'_n.$$

Depois ligamos os vértices na mesma ordem correspondente:

$$A'_1 A'_2 \cdots A'_n.$$

54 Algoritmo de translação de um polígono

Notação

Para cada vértice:

(x, y) :

- 1) somar a à coordenada x ;
- 2) somar b à coordenada y ;
- 3) registrar:
 $(x + a, y + b)$;
- 4) repetir para todos os vértices;
- 5) unir os pontos na ordem correspondente.

55 Algoritmo de reflexão

Para refletir um polígono em relação a uma reta r :

- 1) escolha um vértice A ;
- 2) construa a perpendicular a r passando por A ;
- 3) determine a imagem A' do outro lado de r ;
- 4) garanta que r seja mediatriz de:
 AA' ;
- 5) repita para os demais vértices;
- 6) ligue as imagens na ordem correta.

56 Algoritmo de rotação

Para cada vértice A :

- 1) una A ao centro O ;
- 2) construa o ângulo de rotação;
- 3) marque A' na nova direção;
- 4) preserve:
 $OA' = OA$;
- 5) repita para todos os vértices;
- 6) una as imagens na ordem correspondente.

57 Problema no plano cartesiano

Exemplo

Considere o ponto:

$$P = (-2, 4).$$

Determine sua imagem após:

- a) reflexão no eixo x ;
- b) reflexão no eixo y ;
- c) rotação de 180° em torno da origem;
- d) translação por:

$$(5, -3).$$

Resolução

a)

$$(-2, 4) \mapsto (-2, -4).$$

$$\boxed{(-2, -4)}$$

b)

$$(-2, 4) \mapsto (2, 4).$$

$$\boxed{(2, 4)}$$

c)

$$(-2, 4) \mapsto (2, -4).$$

$$\boxed{(2, -4)}$$

d)

$$(-2, 4) \mapsto (-2 + 5, 4 - 3).$$

Logo:

$$\boxed{(3, 1)}.$$

58 Identificação da transformação

Exemplo

Um ponto:

$$P = (2, 3)$$

é transformado em:

$$P' = (-3, 2).$$

Qual transformação especial em torno da origem pode ter ocorrido?

Resolução

A regra:

$$(x, y) \mapsto (-y, x)$$

corresponde a uma rotação de:

$$90^\circ$$

anti-horária.

Aplicando:

$$(2, 3) \mapsto (-3, 2).$$

Logo:

rotação de 90° anti-horária.

59 Transformações e congruência

Teorema 59.1: Imagem por isometria

Se uma figura F é transformada em F' por translação, reflexão ou rotação, então:

$$F \cong F'.$$

Isso ocorre porque as distâncias entre pontos correspondentes são preservadas.

60 Área e perímetro

Se um triângulo possui:

$$P = 18 \text{ cm}$$

e:

$$A = 12 \text{ cm}^2,$$

qualquer imagem desse triângulo por translação, reflexão ou rotação terá:

$$P' = 18 \text{ cm}$$

e:

$$A' = 12 \text{ cm}^2.$$

61 Erros comuns

Atenção

Erro 1: pensar que translação altera o tamanho da figura.
Uma translação apenas desloca a figura.

forma e tamanho são preservados.

Atenção

Erro 2: trocar os sinais errados em uma reflexão.
No eixo x :

$$(x, y) \mapsto (x, -y).$$

No eixo y :

$$(x, y) \mapsto (-x, y).$$

Atenção

Erro 3: pensar que reflexão significa apenas “mover para o outro lado”.
O eixo deve ser a:

mediatriz do segmento que une o ponto à sua imagem.

Atenção

Erro 4: esquecer o sentido da rotação.
Uma rotação de:

$$90^\circ$$

horária é diferente de uma rotação de:

90°

anti-horária.

Atenção

Erro 5: utilizar:

$$(x, y) \mapsto (y, x)$$

como regra de rotação de 90° .

Isso está incorreto em geral.

Para 90° anti-horário:

$$(x, y) \mapsto (-y, x).$$

Atenção

Erro 6: aplicar uma transformação apenas a alguns vértices.

Todos os pontos da figura devem seguir a mesma transformação.

Atenção

Erro 7: ignorar a ordem de uma composição.

Em geral:

$$T_2 \circ T_1$$

pode ser diferente de:

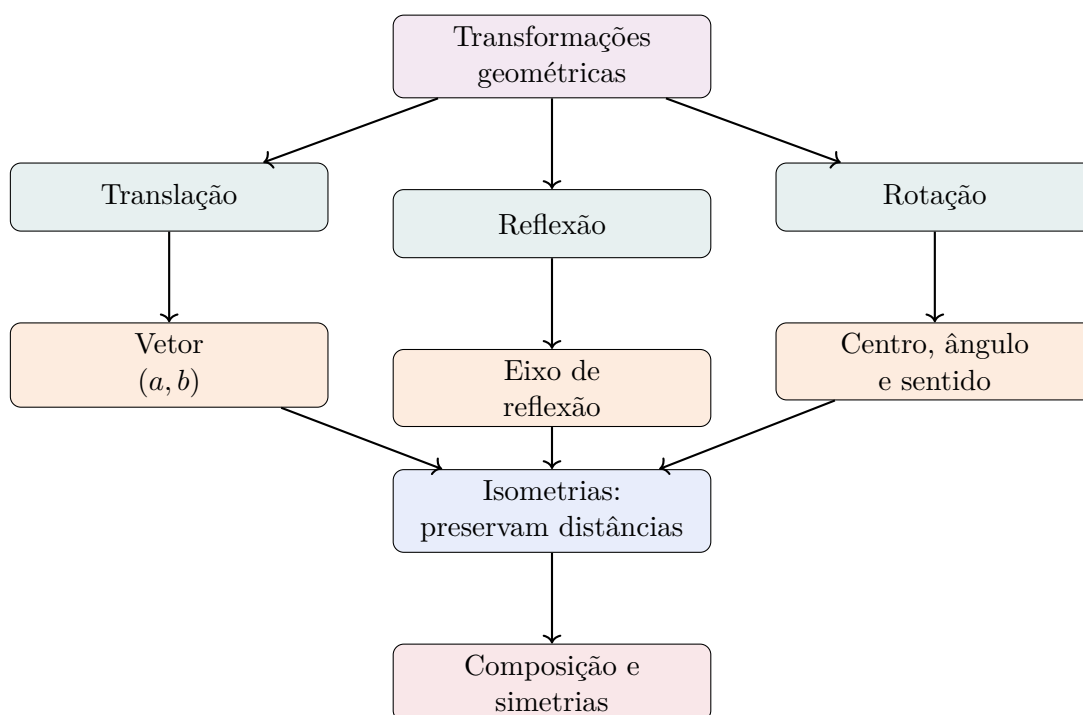
$$T_1 \circ T_2.$$

Atenção

Erro 8: acreditar que reflexão preserva a orientação.

Uma reflexão produz uma imagem espelhada e inverte a orientação da figura.

62 Mapa conceitual



63 Resumo teórico

Transformação	Elemento característico	Regra especial
Translação	vetor (a, b)	$(x, y) \mapsto (x + a, y + b)$
Reflexão em x	eixo x	$(x, y) \mapsto (x, -y)$
Reflexão em y	eixo y	$(x, y) \mapsto (-x, y)$
Rotação 90° AH	origem	$(x, y) \mapsto (-y, x)$
Rotação 180°	origem	$(x, y) \mapsto (-x, -y)$
Rotação 90° H	origem	$(x, y) \mapsto (y, -x)$

Notação

Translação:

$$T_{(a,b)}(x, y) = (x + a, y + b).$$

Reflexão no eixo x :

$$R_x(x, y) = (x, -y).$$

Reflexão no eixo y :

$$R_y(x, y) = (-x, y).$$

Rotação de 90° anti-horária:

$$R_{90}(x, y) = (-y, x).$$

Rotação de 180° :

$$R_{180}(x, y) = (-x, -y).$$

Rotação de 90° horária:

$$R_{-90}(x, y) = (y, -x).$$

Todas são isometrias:

$$AB = A'B'.$$

64 Exercícios

64.1 Parte A – Conceitos

Exercício

Responda:

- a) O que é uma transformação geométrica?
- b) O que é uma isometria?
- c) Quais são as três transformações estudadas neste curso?
- d) Cite quatro propriedades preservadas por essas transformações.

64.2 Parte B – Translação

Exercício

Aplique a translação:

$$\vec{v} = (4, -3).$$

a)

$$P = (2, 5)$$

b)

$$Q = (-3, 1)$$

c)

$$R = (0, -4)$$

64.3 Parte C – Descobrir o vetor

Exercício

Determine o vetor de translação.

a)

$$A = (1, 2) \mapsto A' = (5, 7);$$

b)

$$B = (-2, 4) \mapsto B' = (3, 1);$$

c)

$$C = (5, -1) \mapsto C' = (2, -6).$$

64.4 Parte D – Reflexão

Exercício

Determine a imagem por reflexão no eixo x .

a)

$$(3, 7)$$

b)

$$(-4, 2)$$

c)

$$(0, -5)$$

Exercício

Determine a imagem por reflexão no eixo y .

a)

$$(3, 7)$$

- | | |
|----|-----------|
| b) | $(-4, 2)$ |
| c) | $(6, 0)$ |

64.5 Parte E – Rotação

Exercício

Faça uma rotação de 90° anti-horária em torno da origem.

- | | |
|----|-----------|
| a) | $(2, 1)$ |
| b) | $(-3, 4)$ |
| c) | $(0, 5)$ |

Exercício

Faça uma rotação de 180° em torno da origem.

- | | |
|----|------------|
| a) | $(4, 3)$ |
| b) | $(-2, 5)$ |
| c) | $(-6, -1)$ |

64.6 Parte F – Identificação

Exercício

Identifique a transformação.

- | | |
|----|---------------------------------|
| a) | $(x, y) \mapsto (x + 5, y - 2)$ |
| b) | $(x, y) \mapsto (x, -y)$ |
| c) | $(x, y) \mapsto (-x, y)$ |

d)

$$(x, y) \mapsto (-y, x)$$

e)

$$(x, y) \mapsto (-x, -y)$$

64.7 Parte G – Polígonos

Exercício

Considere:

$$A = (1, 1), \quad B = (4, 1), \quad C = (2, 3).$$

Determine as coordenadas da imagem após:

a) translação por:

$$(2, 4);$$

b) reflexão no eixo x ;

c) reflexão no eixo y ;

d) rotação de 180° em torno da origem.

64.8 Parte H – Composição

Exercício

Considere:

$$P = (2, 3).$$

Primeiro faça uma translação por:

$$(4, -1),$$

e depois uma reflexão no eixo x .

Determine a posição final.

Exercício

Considere novamente:

$$P = (2, 3).$$

Agora primeiro faça a reflexão no eixo x e depois a translação:

$$(4, -1).$$

Compare com o exercício anterior.

64.9 Parte I – Simetrias

Exercício

Determine o número de eixos de simetria de:

- a) quadrado;
- b) retângulo não quadrado;
- c) triângulo equilátero;
- d) triângulo isósceles não equilátero;
- e) triângulo escaleno.

Exercício

Determine o menor ângulo positivo de simetria de rotação de:

- a) quadrado;
- b) triângulo equilátero;
- c) hexágono regular;
- d) octógono regular.

64.10 Parte J – Propriedades

Exercício

Um triângulo possui lados:

$$5, \quad 7, \quad 8$$

e área:

$$15 \text{ cm}^2.$$

Após uma reflexão, determine:

- a) os comprimentos dos lados da imagem;
- b) seu perímetro;
- c) sua área.

65 Gabarito comentado

65.1 Parte A

Resolução

- a) Uma transformação geométrica associa cada ponto de uma figura a um ponto imagem.
- b) Uma isometria é uma transformação que preserva distâncias.
- c) Translação, reflexão e rotação.
- d) Entre as propriedades preservadas:
comprimentos, ângulos, paralelismo, perímetro e área.

65.2 Parte B

Resolução

Utilizamos:

$$(x, y) \mapsto (x + 4, y - 3).$$

a)

$$(2, 5) \mapsto (6, 2).$$

$$\boxed{(6, 2)}$$

b)

$$(-3, 1) \mapsto (1, -2).$$

$$\boxed{(1, -2)}$$

c)

$$(0, -4) \mapsto (4, -7).$$

$$\boxed{(4, -7)}$$

65.3 Parte C

Resolução

Calculamos:

$$\vec{v} = (x' - x, y' - y).$$

a)

$$(5 - 1, 7 - 2) = \boxed{(4, 5)}.$$

b)

$$(3 - (-2), 1 - 4) = \boxed{(5, -3)}.$$

c)

$$(2 - 5, -6 - (-1)) = \boxed{(-3, -5)}.$$

65.4 Parte D

Resolução

No eixo x :

$$(x, y) \mapsto (x, -y).$$

Logo:

$$\boxed{(3, -7)}$$

$$\boxed{(-4, -2)}$$

$$\boxed{(0, 5)}.$$

No eixo y :

$$(x, y) \mapsto (-x, y).$$

Logo:

$$\boxed{(-3, 7)}$$

$$\boxed{(4, 2)}$$

$$\boxed{(-6, 0)}.$$

65.5 Parte E

Resolução

Para 90° anti-horário:

$$(x, y) \mapsto (-y, x).$$

Logo:

$$(2, 1) \mapsto \boxed{(-1, 2)},$$

$$(-3, 4) \mapsto \boxed{(-4, -3)},$$

$$(0, 5) \mapsto \boxed{(-5, 0)}.$$

Para 180° :

$$(x, y) \mapsto (-x, -y).$$

Logo:

$$(4, 3) \mapsto \boxed{(-4, -3)},$$

$$(-2, 5) \mapsto \boxed{(2, -5)},$$

$$(-6, -1) \mapsto \boxed{(6, 1)}.$$

65.6 Parte F

Resolução

a) translação por:

$$\boxed{(5, -2)};$$

b) reflexão no:

$$\boxed{\text{eixo } x};$$

c) reflexão no:

$$\boxed{\text{eixo } y};$$

d) rotação de:

$$\boxed{90^\circ \text{ anti-horária}};$$

e) rotação de:

$$\boxed{180^\circ}.$$

65.7 Parte G

Resolução

Pontos originais:

$$A = (1, 1), \quad B = (4, 1), \quad C = (2, 3).$$

a) Translação (2, 4)

$$A' = (3, 5), \quad B' = (6, 5), \quad C' = (4, 7).$$

b) Reflexão no eixo x

$$A' = (1, -1), \quad B' = (4, -1), \quad C' = (2, -3).$$

c) Reflexão no eixo y

$$A' = (-1, 1), \quad B' = (-4, 1), \quad C' = (-2, 3).$$

d) Rotação de 180°

$$A' = (-1, -1), \quad B' = (-4, -1), \quad C' = (-2, -3).$$

65.8 Parte H

Resolução

Primeiro exercício:

$$P = (2, 3).$$

Translação:

$$(2, 3) \mapsto (6, 2).$$

Reflexão no eixo x :

$$(6, 2) \mapsto (6, -2).$$

Logo:

$$(6, -2).$$

No segundo:

Reflexão:

$$(2, 3) \mapsto (2, -3).$$

Depois translação:

$$(2, -3) \mapsto (6, -4).$$

Logo:

$$(6, -4).$$

Os resultados são diferentes:

$$(6, -2) \neq (6, -4).$$

Portanto:

a ordem alterou o resultado.

65.9 Parte I

Resolução

Eixos de simetria:

a) quadrado:

$$4;$$

b) retângulo não quadrado:

$$2;$$

c) triângulo equilátero:

$$3;$$

d) triângulo isósceles não equilátero:

$$1;$$

e) triângulo escaleno:

$$0.$$

Menor ângulo de simetria de rotação:

$$\theta = \frac{360^\circ}{n}.$$

Quadrado:

$$90^\circ.$$

Triângulo equilátero:

$$120^\circ.$$

Hexágono regular:

$$60^\circ.$$

Octógono regular:

$$45^\circ.$$

65.10 Parte J

Resolução

Uma reflexão é uma isometria.

Logo, os comprimentos permanecem:

$$\boxed{5, 7, 8}.$$

O perímetro é:

$$P = 5 + 7 + 8 = 20.$$

Portanto:

$$\boxed{P = 20}.$$

A área também é preservada:

$$\boxed{A = 15 \text{ cm}^2}.$$

66 Avaliação final

Avaliação final – Transformações geométricas

Resolva as questões abaixo.

1. Defina transformação geométrica.
2. Explique o que significa dizer que uma transformação é uma isometria.
3. Considere:

$$P = (-1, 4).$$

Aplique a translação:

$$\vec{v} = (5, -2).$$

4. Determine a reflexão do ponto:

$$A = (3, -7)$$

em relação ao eixo x .

5. Determine a reflexão de:

$$B = (-5, 2)$$

em relação ao eixo y .

6. Faça uma rotação de:

$$90^\circ$$

anti-horária do ponto:

$$C = (4, 1)$$

em torno da origem.

7. Faça uma rotação de:

$$180^\circ$$

do ponto:

$$D = (-3, 6)$$

em torno da origem.

8. Explique como construir geometricamente a reflexão de um ponto P em relação a uma reta r .

9. Um quadrado sofre uma rotação de 90° em torno de seu centro. Explique por que a figura coincide consigo mesma.

10. Considere:

$$P = (1, 3).$$

Primeiro aplique uma reflexão no eixo y e depois uma translação por:

$$(4, -2).$$

Determine a posição final.

66.1 Gabarito da avaliação final

Resolução

1. Uma transformação geométrica é uma regra que associa cada ponto de uma figura a um ponto imagem.

2. Uma isometria preserva a distância entre quaisquer dois pontos. Portanto, conserva forma e tamanho.

3. :

$$(-1, 4) \mapsto (-1 + 5, 4 - 2).$$

Logo:

$$P' = (4, 2).$$

4. Reflexão no eixo x :

$$(x, y) \mapsto (x, -y).$$

Portanto:

$$A' = (3, 7).$$

5. Reflexão no eixo y :

$$(x, y) \mapsto (-x, y).$$

Logo:

$$\boxed{B' = (5, 2)}.$$

6. Rotação de 90° anti-horária:

$$(x, y) \mapsto (-y, x).$$

Então:

$$(4, 1) \mapsto (-1, 4).$$

Portanto:

$$\boxed{C' = (-1, 4)}.$$

7. Rotação de 180° :

$$(x, y) \mapsto (-x, -y).$$

Assim:

$$(-3, 6) \mapsto (3, -6).$$

Logo:

$$\boxed{D' = (3, -6)}.$$

8. Traçamos uma perpendicular à reta r passando por P . Se M é sua interseção com r , construímos P' do outro lado de modo que:

$$PM = MP'.$$

Assim, r é mediatriz de:

$$PP'.$$

Portanto:

$$\boxed{P' \text{ é a reflexão de } P}.$$

9. O quadrado possui simetria de rotação de ordem 4.

Seu menor ângulo positivo de simetria é:

$$\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ.$$

Logo, após uma rotação de:

$$90^\circ,$$

cada vértice ocupa a posição de outro vértice e o quadrado coincide consigo mesmo.

10. Primeiro refletimos no eixo y :

$$(1, 3) \mapsto (-1, 3).$$

Depois aplicamos a translação:

$$(4, -2).$$

Assim:

$$(-1, 3) \mapsto (-1 + 4, 3 - 2).$$

Logo:

$$\boxed{P'' = (3, 1)}.$$

67 Conclusão

As transformações geométricas permitem modificar a posição e a orientação de figuras mantendo propriedades fundamentais.

As principais ideias estudadas foram:

- 1) uma transformação geométrica associa pontos originais a pontos imagem;
- 2) translação, reflexão e rotação são isometrias;
- 3) uma isometria preserva distâncias, ângulos, perímetro e área;
- 4) uma translação desloca todos os pontos pelo mesmo vetor;
- 5) no plano cartesiano:
$$(x, y) \mapsto (x + a, y + b);$$
- 6) uma reflexão utiliza uma reta como eixo;
- 7) o eixo de reflexão é a mediatriz do segmento que une um ponto à sua imagem;

8) na reflexão no eixo x :

$$(x, y) \mapsto (x, -y);$$

9) na reflexão no eixo y :

$$(x, y) \mapsto (-x, y);$$

10) uma rotação é determinada por centro, ângulo e sentido;

11) para uma rotação de 90° anti-horária em torno da origem:

$$(x, y) \mapsto (-y, x);$$

12) para uma rotação de 180° :

$$(x, y) \mapsto (-x, -y);$$

13) figuras podem possuir simetria axial e simetria de rotação;

14) transformações podem ser compostas;

15) a ordem de uma composição pode alterar o resultado final.

Notação

Resumo final:

$$\text{Translação} \Rightarrow (x, y) \mapsto (x + a, y + b)$$

$$\text{Reflexão em } x \Rightarrow (x, y) \mapsto (x, -y)$$

$$\text{Reflexão em } y \Rightarrow (x, y) \mapsto (-x, y)$$

$$90^\circ \text{ anti-horário} \Rightarrow (x, y) \mapsto (-y, x)$$

$$180^\circ \Rightarrow (x, y) \mapsto (-x, -y)$$

e:

$$\text{translação, reflexão e rotação} \Rightarrow \text{congruência.}$$

Finalmente:

$$\text{transformações sucessivas} \Rightarrow \text{composição de transformações.}$$

Fim do curso