

Propriedades dos Quadriláteros

Matemática – 8º Ano

Classificação, diagonais, paralelismo e demonstrações por congruência de triângulos

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste curso, o estudante deverá ser capaz de:

- 1) definir e reconhecer um quadrilátero;
- 2) identificar lados, vértices, ângulos e diagonais;
- 3) distinguir quadriláteros convexos e não convexos;
- 4) demonstrar que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é 360° ;
- 5) reconhecer paralelogramos, retângulos, losangos, quadrados e trapézios;
- 6) compreender relações de inclusão entre classes de quadriláteros;
- 7) demonstrar propriedades dos paralelogramos por congruência de triângulos;
- 8) demonstrar que os lados opostos de um paralelogramo são congruentes;
- 9) demonstrar que os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes;
- 10) demonstrar que ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares;
- 11) demonstrar que as diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio;
- 12) reconhecer critérios que permitem identificar um paralelogramo;
- 13) demonstrar que as diagonais de um retângulo são congruentes;
- 14) demonstrar propriedades das diagonais de um losango;
- 15) compreender que o quadrado reúne propriedades do retângulo e do losango;
- 16) utilizar propriedades geométricas para calcular medidas desconhecidas;
- 17) construir demonstrações organizadas utilizando hipóteses, congruência e conclusões.

Sumário

2	Definição de quadrilátero	1
3	Elementos de um quadrilátero	2
4	Lados consecutivos e lados opostos	2
5	Vértices consecutivos e opostos	3
6	Diagonais	3
7	Quadriláteros convexos	4
8	Soma dos ângulos internos	4
9	Demonstração da soma dos ângulos	4
10	Exemplo com ângulo desconhecido	5
11	Classificação dos quadriláteros	6
12	Paralelogramo	6
13	Primeira propriedade do paralelogramo	6
14	Demonstração pelos triângulos	7
15	Segunda propriedade do paralelogramo	8
16	Demonstração dos ângulos opostos	8
17	Ângulos consecutivos	9
18	Exemplo com ângulos de um paralelogramo	10
19	Diagonais do paralelogramo	10
20	Demonstração das diagonais	11
21	Resumo das propriedades do paralelogramo	12
22	Critérios para reconhecer um paralelogramo	12
23	Demonstração do critério	13

24 Outro critério	14
25 Retângulo	14
26 Propriedades herdadas pelo retângulo	14
27 Diagonais do retângulo	15
28 Demonstração das diagonais do retângulo	15
29 Exemplo com diagonais de um retângulo	16
30 Losango	17
31 Propriedades herdadas pelo losango	17
32 Diagonais perpendiculares do losango	18
33 Demonstração da perpendicularidade	18
34 Diagonais e bissetrizes no losango	19
35 Demonstração de uma bissetriz	20
36 Exemplo com ângulo de um losango	21
37 Quadrado	21
38 O quadrado como retângulo e losango	22
39 Propriedades das diagonais do quadrado	22
40 Hierarquia entre quadriláteros	23
41 Diagrama de inclusão	23
42 Trapézio	24
43 Trapézio isósceles	24
44 Ângulos de um trapézio isósceles	24
45 Diagonais do trapézio isósceles	25

46 Comparação das diagonais	25
47 Exemplo de classificação por propriedades	25
48 Exemplo com diagonais	26
49 Outro exemplo algébrico	26
50 Exemplo com ângulos	27
51 Identificação por diagonais	28
52 Atenção às recíprocas	29
53 Estratégia de demonstração	29
54 Modelo de demonstração	29
55 Erros comuns	30
56 Tabela-resumo das propriedades	31
57 Exercícios	31
57.1 Parte A – Conceitos básicos	31
57.2 Parte B – Soma dos ângulos	32
57.3 Parte C – Paralelogramos	32
57.4 Parte D – Expressões algébricas	33
57.5 Parte E – Diagonais do paralelogramo	33
57.6 Parte F – Retângulos	34
57.7 Parte G – Losangos	34
57.8 Parte H – Quadrados	35
57.9 Parte I – Classificação	35
57.10 Parte J – Demonstrações	35
58 Gabarito comentado	36
58.1 Parte A	36
58.2 Parte B	36
58.3 Parte C	37
58.4 Parte D	38
58.5 Parte E	39

58.6 Parte F	40
58.7 Parte G	41
58.8 Parte H	41
58.9 Parte I	42
58.10Parte J	42
59 Avaliação final	44
59.1 Gabarito da avaliação final	45
60 Conclusão	48

1 Introdução

Quadriláteros aparecem constantemente na Geometria e no cotidiano:

- portas;
- janelas;
- telas;
- pisos;
- terrenos;
- placas;
- estruturas arquitetônicas.

Entretanto, os quadriláteros não possuem todos as mesmas propriedades.

Um retângulo possui propriedades diferentes das de um trapézio.

Um losango possui propriedades diferentes das de um paralelogramo genérico.

Já um quadrado possui simultaneamente várias dessas propriedades.

O objetivo deste curso será compreender essas relações de maneira rigorosa, utilizando especialmente a **congruência de triângulos** estudada anteriormente.

2 Definição de quadrilátero

Definição 2.1: Quadrilátero

Um **quadrilátero** é um polígono formado por quatro lados, quatro vértices e quatro ângulos internos.

Um quadrilátero de vértices:

$$A, \quad B, \quad C, \quad D$$

é representado por:

$$\boxed{ABCD}.$$

Seus lados são:

$$\overline{AB}, \quad \overline{BC}, \quad \overline{CD}, \quad \overline{DA}.$$

3 Elementos de um quadrilátero

Considere o quadrilátero:

$$ABCD.$$

Temos:

$$\text{vértices: } A, B, C, D.$$

Os lados são:

$$AB, \quad BC, \quad CD, \quad DA.$$

Os ângulos internos são:

$$\hat{A}, \quad \hat{B}, \quad \hat{C}, \quad \hat{D}.$$

4 Lados consecutivos e lados opostos

Definição 4.1: Lados consecutivos

Dois lados de um quadrilátero são **consecutivos** quando possuem um vértice comum.

Por exemplo:

$$AB$$

e:

$$BC$$

são lados consecutivos.

Definição 4.2: Lados opostos

Dois lados de um quadrilátero são **opostos** quando não possuem vértice comum.

No quadrilátero $ABCD$, os pares de lados opostos são:

$$AB \quad \text{e} \quad CD,$$

$$BC \quad \text{e} \quad AD.$$

5 Vértices consecutivos e opostos

São vértices consecutivos:

A e B ,

B e C ,

C e D ,

D e A .

São vértices opostos:

A e C ,

B e D .

6 Diagonais

Definição 6.1: Diagonal de um quadrilátero

Uma **diagonal** de um quadrilátero é um segmento que une dois vértices não consecutivos.

No quadrilátero:

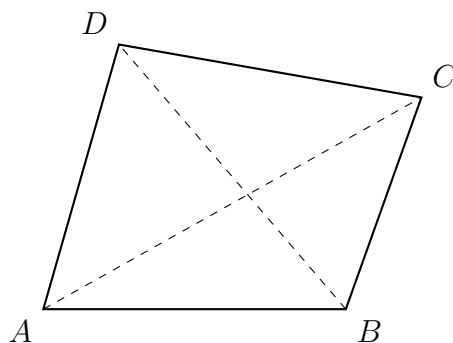
$ABCD$,

as diagonais são:

$\boxed{AC}$

e:

$\boxed{BD}$.



7 Quadriláteros convexos

Definição 7.1: Quadrilátero convexo

Um quadrilátero é **convexo** quando qualquer segmento que liga dois pontos de seu interior permanece inteiramente dentro do quadrilátero.

Equivalentemente, em um quadrilátero convexo, todos os ângulos internos possuem medida menor que:

$$180^\circ.$$

Observação

Neste curso, salvo indicação contrária, trabalharemos principalmente com quadriláteros convexos.

8 Soma dos ângulos internos

Teorema 8.1: Soma dos ângulos internos de um quadrilátero

A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer quadrilátero convexo é:

$$360^\circ.$$

9 Demonstração da soma dos ângulos

Considere o quadrilátero:

$$ABCD.$$

Traçamos a diagonal:

$$AC.$$

Ela divide o quadrilátero em dois triângulos:

$$\triangle ABC$$

e:

$$\triangle ACD.$$

A soma dos ângulos internos de cada triângulo é:

$$180^\circ.$$

Portanto:

$$180^\circ + 180^\circ = 360^\circ.$$

Logo:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ.$$

10 Exemplo com ângulo desconhecido

Exemplo

Os ângulos internos de um quadrilátero medem:

$$80^\circ, \quad 100^\circ, \quad 70^\circ$$

e:

$$x.$$

Determine x .

Resolução

Utilizamos:

$$80 + 100 + 70 + x = 360.$$

Logo:

$$250 + x = 360.$$

Então:

$$x = 110^\circ.$$

11 Classificação dos quadriláteros

Entre os principais quadriláteros estudados estão:

- paralelogramo;
- retângulo;
- losango;
- quadrado;
- trapézio.

As classificações são feitas principalmente a partir de:

- paralelismo dos lados;
- igualdade de lados;
- medidas dos ângulos.

12 Paralelogramo

Definição 12.1: Paralelogramo

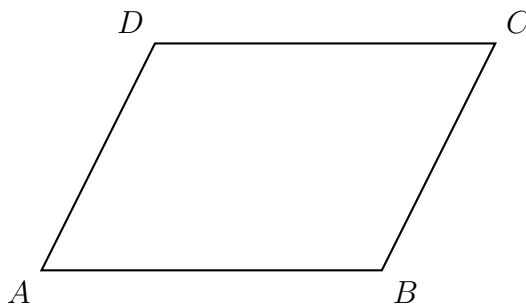
Um **paralelogramo** é um quadrilátero que possui os dois pares de lados opostos paralelos.

Assim, em um paralelogramo $ABCD$:

$$AB \parallel CD$$

e:

$$BC \parallel AD.$$



13 Primeira propriedade do paralelogramo

Teorema 13.1: Lados opostos do paralelogramo

Em todo paralelogramo, os lados opostos possuem a mesma medida.
Assim, se $ABCD$ é um paralelogramo:

$$\boxed{AB = CD}$$

e:

$$\boxed{BC = AD}.$$

14 Demonstração pelos triângulos

Considere o paralelogramo $ABCD$.

Traçamos a diagonal:

$$AC.$$

Obtemos os triângulos:

$$\triangle ABC$$

e:

$$\triangle CDA.$$

Como:

$$AB \parallel CD,$$

a transversal AC determina ângulos alternos internos de mesma medida:

$$\widehat{BAC} = \widehat{DCA}.$$

Como:

$$BC \parallel AD,$$

temos:

$$\widehat{BCA} = \widehat{DAC}.$$

Além disso:

$$AC = AC$$

pelo lado comum.

Portanto, pelo caso ALA:

$$\triangle BAC \cong \triangle DCA.$$

Consequentemente:

$$\boxed{AB = CD}$$

e:

$$\boxed{BC = AD}.$$

15 Segunda propriedade do paralelogramo

Teorema 15.1: Ângulos opostos do paralelogramo

Em todo paralelogramo, os ângulos opostos possuem a mesma medida.
Assim:

$$\boxed{\hat{A} = \hat{C}}$$

e:

$$\boxed{\hat{B} = \hat{D}}.$$

16 Demonstração dos ângulos opostos

Da congruência:

$$\triangle BAC \cong \triangle DCA,$$

obtemos:

$$\hat{B} = \hat{D}.$$

Para demonstrar:

$$\hat{A} = \hat{C},$$

podemos utilizar o paralelismo.

Como:

$$AD \parallel BC,$$

os ângulos consecutivos:

$$\hat{A}$$

e:

$$\hat{B}$$

são suplementares:

$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ.$$

Também, como:

$$AB \parallel CD,$$

temos:

$$\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ.$$

Logo:

$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{C}.$$

Subtraindo $\hat{B}$:

$$\boxed{\hat{A} = \hat{C}.}$$

17 Ângulos consecutivos

Teorema 17.1: Ângulos consecutivos de um paralelogramo

Em todo paralelogramo, dois ângulos internos consecutivos são suplementares.

Assim:

$$\boxed{\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ}$$

$$\boxed{\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ}$$

$$\boxed{\hat{C} + \hat{D} = 180^\circ}$$

$$\boxed{\hat{D} + \hat{A} = 180^\circ.}$$

18 Exemplo com ângulos de um paralelogramo

Exemplo

Em um paralelogramo:

$$\hat{A} = 65^\circ.$$

Determine os demais ângulos.

Resolução

Ângulos opostos são iguais:

$$\hat{C} = 65^\circ.$$

Ângulos consecutivos são suplementares:

$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ.$$

Logo:

$$65 + \hat{B} = 180.$$

Assim:

$$\hat{B} = 115^\circ.$$

Como:

$$\hat{B} = \hat{D},$$

temos:

$$\hat{D} = 115^\circ.$$

Portanto:

$$\hat{A} = \hat{C} = 65^\circ$$

e:

$$\hat{B} = \hat{D} = 115^\circ.$$

19 Diagonais do paralelogramo

Teorema 19.1: Diagonais de um paralelogramo

As diagonais de um paralelogramo cortam-se mutuamente ao meio.

Se:

$$AC \cap BD = \{O\},$$

então:

$$\boxed{AO = OC}$$

e:

$$\boxed{BO = OD}.$$

20 Demonstração das diagonais

Considere o paralelogramo $ABCD$.

Seja O o ponto de interseção das diagonais.

Considere os triângulos:

$$\triangle AOB$$

e:

$$\triangle COD.$$

Como:

$$AB \parallel CD,$$

temos:

$$\widehat{BAO} = \widehat{DCO}$$

e:

$$\widehat{ABO} = \widehat{CDO}.$$

Além disso, já demonstramos que:

$$AB = CD.$$

Logo, pelo caso ALA:

$$\triangle AOB \cong \triangle COD.$$

Portanto:

$$AO = OC$$

e:

$$BO = OD.$$

Assim, cada diagonal divide a outra em duas partes iguais.

21 Resumo das propriedades do paralelogramo

Se $ABCD$ é paralelogramo:

$$AB \parallel CD$$

$$BC \parallel AD$$

$$AB = CD$$

$$BC = AD$$

$$\widehat{A} = \widehat{C}$$

$$\widehat{B} = \widehat{D}$$

$$\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ$$

e suas diagonais cortam-se ao meio.

22 Critérios para reconhecer um paralelogramo

Algumas propriedades possuem recíprocas úteis.

Teorema 22.1: Critério dos lados opostos congruentes

Se um quadrilátero possui os dois pares de lados opostos congruentes, então ele é um paralelogramo.

Ou seja, se:

$$AB = CD$$

e:

$$BC = AD,$$

então:

$$ABCD \text{ é paralelogramo.}$$

23 Demonstração do critério

Traçamos a diagonal:

$$AC.$$

Nos triângulos:

$$\triangle ABC$$

e:

$$\triangle CDA,$$

temos:

$$AB = CD,$$

$$BC = AD,$$

e:

$$AC = AC.$$

Portanto, por LLL:

$$\triangle ABC \cong \triangle CDA.$$

Assim:

$$\widehat{BAC} = \widehat{DCA}.$$

Logo:

$$AB \parallel CD.$$

Também:

$$\widehat{BCA} = \widehat{DAC}.$$

Logo:

$$BC \parallel AD.$$

Portanto:

$ABCD$ é um paralelogramo.

24 Outro critério

Teorema 24.1: Critério das diagonais

Se as diagonais de um quadrilátero cortam-se mutuamente ao meio, então o quadrilátero é um paralelogramo.

Esse resultado é a recíproca da propriedade das diagonais do paralelogramo.

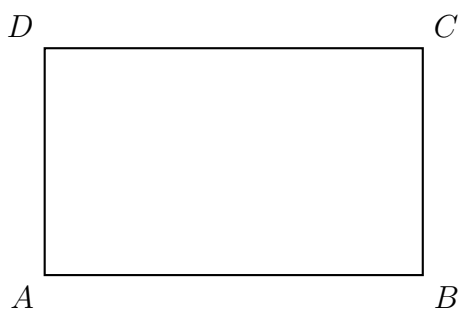
25 Retângulo

Definição 25.1: Retângulo

Um **retângulo** é um paralelogramo que possui quatro ângulos retos.

Assim:

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ.$$



26 Propriedades herdadas pelo retângulo

Como todo retângulo é um paralelogramo:

$$AB \parallel CD,$$

$$BC \parallel AD,$$

$$AB = CD,$$

$$BC = AD,$$

e suas diagonais cortam-se mutuamente ao meio.

Além disso, possui uma propriedade adicional importante.

27 Diagonais do retângulo

Teorema 27.1: Diagonais do retângulo

As diagonais de um retângulo possuem a mesma medida.

Assim:

$$AC = BD.$$

28 Demonstração das diagonais do retângulo

Considere o retângulo:

$$ABCD.$$

Observe os triângulos:

$$\triangle ABC$$

e:

$$\triangle BAD.$$

Como o retângulo é paralelogramo:

$$BC = AD.$$

Além disso:

$$AB = AB.$$

Os ângulos:

$$\widehat{ABC}$$

e:

$$\widehat{BAD}$$

medem:

$$90^\circ.$$

Logo:

$$\widehat{ABC} = \widehat{BAD}.$$

Portanto, pelo caso LAL:

$$\triangle ABC \cong \triangle BAD.$$

Consequentemente:

$$\boxed{AC = BD.}$$

29 Exemplo com diagonais de um retângulo

Exemplo

As diagonais de um retângulo são dadas por:

$$AC = 3x + 2$$

e:

$$BD = 20.$$

Determine x .

Resolução

Como as diagonais de um retângulo são congruentes:

$$AC = BD.$$

Então:

$$3x + 2 = 20.$$

Logo:

$$3x = 18.$$

Portanto:

$$\boxed{x = 6.}$$

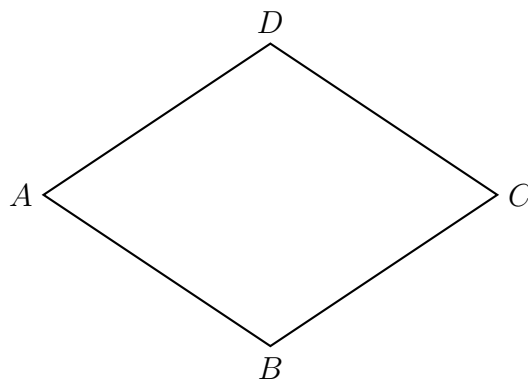
30 Losango

Definição 30.1: Losango

Um **losango** é um paralelogramo que possui os quatro lados de mesma medida.

Assim:

$$\boxed{AB = BC = CD = DA.}$$



31 Propriedades herdadas pelo losango

Como todo losango é um paralelogramo:

- lados opostos são paralelos;
- ângulos opostos são congruentes;

- ângulos consecutivos são suplementares;
- suas diagonais cortam-se mutuamente ao meio.

Além disso, as diagonais possuem propriedades especiais.

32 Diagonais perpendiculares do losango

Teorema 32.1: Perpendicularidade das diagonais do losango

As diagonais de um losango são perpendiculares.

Se:

$$AC \cap BD = \{O\},$$

então:

$$AC \perp BD.$$

33 Demonstração da perpendicularidade

Como o losango é paralelogramo, suas diagonais se cortam ao meio.

Logo:

$$BO = OD.$$

Considere os triângulos:

$$\triangle AOB$$

e:

$$\triangle AOD.$$

Como todos os lados do losango são congruentes:

$$AB = AD.$$

Também:

$$BO = OD.$$

E:

$$AO = AO.$$

Portanto, por LLL:

$$\triangle AOB \cong \triangle AOD.$$

Logo:

$$\widehat{BOA} = \widehat{AOD}.$$

Esses dois ângulos são adjacentes e formam um ângulo raso:

$$\widehat{BOA} + \widehat{AOD} = 180^\circ.$$

Como são iguais:

$$2\widehat{BOA} = 180^\circ.$$

Então:

$$\widehat{BOA} = 90^\circ.$$

Portanto:

$$\boxed{AC \perp BD.}$$

34 Diagonais e bissetrizes no losango

Teorema 34.1: Diagonais do losango como bissetrizes

As diagonais de um losango bissetam os ângulos internos cujos vértices elas unem.

Por exemplo, a diagonal:

$$BD$$

biseta:

$$\widehat{B}$$

e:

$$\widehat{D}.$$

A diagonal:

$$AC$$

bisseta:

$$\hat{A}$$

e:

$$\hat{C}.$$

35 Demonstração de uma bissetriz

Considere os triângulos:

$$\triangle ABD$$

e:

$$\triangle CBD.$$

No losango:

$$AB = CB,$$

$$AD = CD,$$

e:

$$BD = BD.$$

Logo, por LLL:

$$\triangle ABD \cong \triangle CBD.$$

Consequentemente:

$$\widehat{ABD} = \widehat{DBC}.$$

Portanto:

$$\boxed{BD \text{ é bissetriz de } \hat{B}.}$$

Analogamente, demonstramos as demais propriedades.

36 Exemplo com ângulo de um losango

Exemplo

Em um losango:

$$\widehat{A} = 120^\circ.$$

Determine os demais ângulos.

Resolução

Como ângulos opostos são iguais:

$$\widehat{C} = 120^\circ.$$

Os ângulos consecutivos são suplementares:

$$\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ.$$

Logo:

$$120 + \widehat{B} = 180.$$

Então:

$$\widehat{B} = 60^\circ.$$

E:

$$\widehat{D} = 60^\circ.$$

Portanto:

$$\widehat{A} = \widehat{C} = 120^\circ$$

e:

$$\widehat{B} = \widehat{D} = 60^\circ.$$

37 Quadrado

Definição 37.1: Quadrado

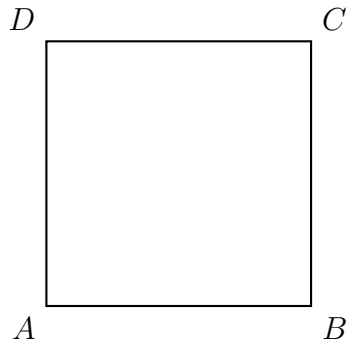
Um **quadrado** é um quadrilátero que possui quatro lados congruentes e quatro ângulos retos.

Assim:

$$AB = BC = CD = DA$$

e:

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ.$$



38 O quadrado como retângulo e losango

Todo quadrado é um retângulo, pois possui quatro ângulos retos.

Todo quadrado também é um losango, pois possui quatro lados congruentes.

Portanto:

$$\boxed{\text{quadrado} \Rightarrow \text{retângulo}}$$

e:

$$\boxed{\text{quadrado} \Rightarrow \text{losango.}}$$

Como retângulos e losangos são paralelogramos:

$$\boxed{\text{quadrado} \Rightarrow \text{paralelogramo.}}$$

39 Propriedades das diagonais do quadrado

Como o quadrado é simultaneamente retângulo e losango, suas diagonais:

- 1) cortam-se mutuamente ao meio;
- 2) possuem a mesma medida;
- 3) são perpendiculares;
- 4) bissetam os ângulos internos.

Assim, se:

$$AC \cap BD = \{O\},$$

temos:

$$AO = OC$$

$$BO = OD$$

$$AC = BD$$

$$AC \perp BD.$$

40 Hierarquia entre quadriláteros

Podemos organizar algumas classes da seguinte forma:

$$\text{quadrado} \subset \text{retângulos} \subset \text{paralelogramos}$$

e:

$$\text{quadrado} \subset \text{losangos} \subset \text{paralelogramos}.$$

Observação

Nem todo paralelogramo é retângulo.

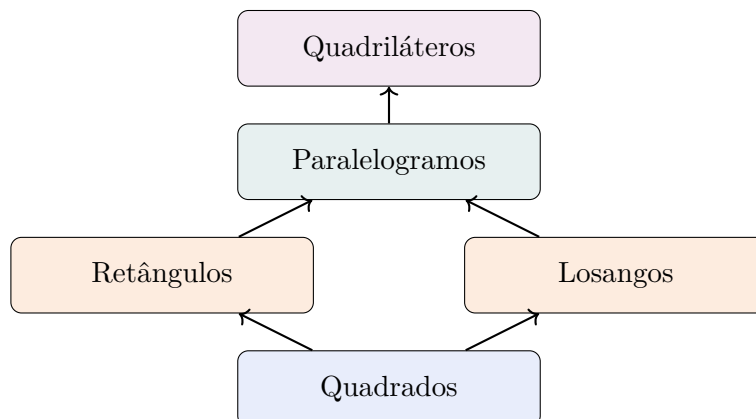
Nem todo paralelogramo é losango.

Nem todo retângulo é quadrado.

Nem todo losango é quadrado.

Porém, todo quadrado é simultaneamente retângulo, losango e paralelogramo.

41 Diagrama de inclusão



42 Trapézio

Definição 42.1: Trapézio

Neste curso, adotaremos a convenção de chamar de **trapézio** o quadrilátero que possui exatamente um par de lados opostos paralelos.

Esses lados paralelos são chamados de:

bases.

Observação

Existem livros que adotam uma definição inclusiva de trapézio, considerando suficiente possuir *pelo menos* um par de lados paralelos. Nesse caso, paralelogramos também são considerados trapézios.

Aqui adotaremos a definição exclusiva para evitar ambiguidade na classificação.

43 Trapézio isósceles

Definição 43.1: Trapézio isósceles

Um trapézio é **isósceles** quando os lados não paralelos possuem a mesma medida.

Se:

$$AB \parallel CD,$$

e:

$$AD = BC,$$

então $ABCD$ é um trapézio isósceles.

44 Ângulos de um trapézio isósceles

Teorema 44.1: Ângulos da mesma base

Em um trapézio isósceles, os ângulos adjacentes a uma mesma base possuem a mesma medida.

Assim:

$$\widehat{A} = \widehat{B}$$

e:

$$\widehat{C} = \widehat{D}.$$

45 Diagonais do trapézio isósceles

Teorema 45.1: Diagonais do trapézio isósceles

As diagonais de um trapézio isósceles possuem a mesma medida.

Assim:

$$AC = BD.$$

46 Comparação das diagonais

Quadrilátero	Bissetam-se	Iguais	Perpendiculares	Bissetam ângulos
Paralelogramo	sim	não sempre	não sempre	não sempre
Retângulo	sim	sim	não sempre	não sempre
Losango	sim	não sempre	sim	sim
Quadrado	sim	sim	sim	sim

47 Exemplo de classificação por propriedades

Exemplo

Um quadrilátero possui:

- quatro lados congruentes;
- quatro ângulos retos.

Como podemos classificá-lo?

Resolução

Por possuir quatro lados iguais, ele é um losango.

Por possuir quatro ângulos retos, ele é um retângulo.

Um quadrilátero que é simultaneamente retângulo e losango é um:

quadrado.

48 Exemplo com diagonais

Exemplo

As diagonais de um paralelogramo $ABCD$ intersectam-se em O .
Se:

$$AO = 3x + 1$$

e:

$$OC = 16,$$

determine x .

Resolução

As diagonais de um paralelogramo cortam-se mutuamente ao meio.
Logo:

$$AO = OC.$$

Então:

$$3x + 1 = 16.$$

Logo:

$$3x = 15.$$

Portanto:

$$\boxed{x = 5.}$$

49 Outro exemplo algébrico

Exemplo

Em um paralelogramo:

$$AB = 4x - 3$$

e:

$$CD = 25.$$

Determine x .

Resolução

Lados opostos de um paralelogramo possuem a mesma medida:

$$AB = CD.$$

Logo:

$$4x - 3 = 25.$$

Então:

$$4x = 28.$$

Portanto:

$$\boxed{x = 7.}$$

50 Exemplo com ângulos

Exemplo

Num paralelogramo:

$$\hat{A} = 3x + 10^\circ$$

e:

$$\hat{B} = 2x + 20^\circ.$$

Determine x .

Resolução

Ângulos consecutivos são suplementares:

$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ.$$

Logo:

$$3x + 10 + 2x + 20 = 180.$$

Então:

$$5x + 30 = 180.$$

$$5x = 150.$$

Portanto:

$$x = 30.$$

Assim:

$$\hat{A} = 100^\circ$$

e:

$$\hat{B} = 80^\circ.$$

51 Identificação por diagonais

As propriedades das diagonais podem ajudar na identificação dos quadriláteros.

Notação

Se sabemos apenas que as diagonais se cortam ao meio:

paralelogramo.

Se, além disso, as diagonais são congruentes:

retângulo

dentro da classe dos paralelogramos.

Se, além de se cortarem ao meio, são perpendiculares:

losango

dentro da classe dos paralelogramos.

Se apresentam simultaneamente essas propriedades:

quadrado.

52 Atenção às recíprocas

Atenção

Não devemos utilizar propriedades sem verificar todas as condições necessárias.

Por exemplo:

“As diagonais são congruentes”

não é suficiente, sozinho, para concluir que um quadrilátero qualquer é um retângulo.

Um trapézio isósceles também possui diagonais congruentes.

A conclusão correta depende do conjunto de hipóteses disponível.

53 Estratégia de demonstração

Ao demonstrar uma propriedade de quadriláteros usando congruência de triângulos, podemos seguir:

- 1) identificar dois triângulos adequados;
- 2) listar informações fornecidas pela definição do quadrilátero;
- 3) utilizar paralelismo para obter igualdade de ângulos;
- 4) utilizar lados comuns quando existirem;
- 5) identificar um caso de congruência;
- 6) concluir igualdade de lados ou ângulos correspondentes.

54 Modelo de demonstração

Notação

definição do quadrilátero



lados / ângulos correspondentes



LLL, LAL, ALA ou AAL



triângulos congruentes



propriedade desejada.

55 Erros comuns

Atenção

Erro 1: afirmar que todo quadrilátero é paralelogramo.

Um paralelogramo precisa possuir:

dois pares de lados opostos paralelos.

Atenção

Erro 2: afirmar que todo retângulo é quadrado.

Todo quadrado é retângulo, mas um retângulo pode possuir lados consecutivos de medidas diferentes.

Atenção

Erro 3: afirmar que todo losango é quadrado.

Um losango possui quatro lados iguais, mas seus ângulos não precisam ser retos.

Atenção

Erro 4: pensar que as diagonais de todo paralelogramo são iguais.

Isso é falso.

A propriedade geral é:

as diagonais se cortam ao meio.

A igualdade das diagonais é uma propriedade adicional do retângulo.

Atenção

Erro 5: pensar que as diagonais de todo paralelogramo são perpendiculares.

Isso também é falso.

A perpendicularidade é uma propriedade do losango e do quadrado.

Atenção

Erro 6: confundir diagonal com lado.

Uma diagonal liga vértices opostos.

No quadrilátero $ABCD$:

AC

e:

BD

são diagonais.

Atenção

Erro 7: esquecer a hierarquia.

Um quadrado é:

quadrado, retângulo, losango e paralelogramo.

56 Tabela-resumo das propriedades

Propriedade	Paralelogramo	Retângulo	Losango	Quadrado
Lados opostos paralelos	sim	sim	sim	sim
Lados opostos congruentes	sim	sim	sim	sim
Quatro lados congruentes	não sempre	não sempre	sim	sim
Quatro ângulos retos	não sempre	sim	não sempre	sim
Diagonais se cortam ao meio	sim	sim	sim	sim
Diagonais congruentes	não sempre	sim	não sempre	sim
Diagonais perpendiculares	não sempre	não sempre	sim	sim
Diagonais bissetam ângulos	não sempre	não sempre	sim	sim

57 Exercícios

57.1 Parte A – Conceitos básicos

Exercício

Considere o quadrilátero $ABCD$.
Determine:

- a) seus quatro lados;
- b) seus dois pares de lados opostos;
- c) seus dois pares de vértices opostos;
- d) suas diagonais.

57.2 Parte B – Soma dos ângulos

Exercício

Determine x .

a)

$$90^\circ, \quad 80^\circ, \quad 100^\circ, \quad x$$

b)

$$120^\circ, \quad 70^\circ, \quad 90^\circ, \quad x$$

c)

$$x, \quad x, \quad x, \quad x$$

57.3 Parte C – Paralelogramos

Exercício

Em um paralelogramo $ABCD$:

$$AB = 12,$$

$$BC = 7.$$

Determine:

$$CD$$

e:

$$AD.$$

Exercício

Em um paralelogramo:

$$\widehat{A} = 72^\circ.$$

Determine:

$$\widehat{B}, \quad \widehat{C}, \quad \widehat{D}.$$

57.4 Parte D – Expressões algébricas

Exercício

Em um paralelogramo:

$$AB = 5x - 3$$

e:

$$CD = 32.$$

Determine x .

Exercício

Num paralelogramo:

$$\hat{A} = 2x + 20^\circ$$

e:

$$\hat{B} = 3x + 10^\circ.$$

Determine x e os quatro ângulos.

57.5 Parte E – Diagonais do paralelogramo

Exercício

As diagonais AC e BD de um paralelogramo intersectam-se em O .
Sabendo que:

$$AO = 11,$$

$$BO = 8,$$

determine:

$$OC$$

e:

$$OD.$$

Exercício

No mesmo contexto:

$$AO = 4x + 1$$

e:

$$OC = 25.$$

Determine x .

57.6 Parte F – Retângulos

Exercício

Em um retângulo:

$$AC = 3x + 4$$

e:

$$BD = 28.$$

Determine x .

Exercício

Explique por que as diagonais de um retângulo possuem a mesma medida utilizando congruência de triângulos.

57.7 Parte G – Losangos

Exercício

Num losango:

$$\hat{A} = 110^\circ.$$

Determine os outros três ângulos.

Exercício

As diagonais de um losango intersectam-se em O .
Qual é a medida de:

$$\widehat{AOB}?$$

Justifique.

Exercício

Se uma diagonal de um losango bisseta um ângulo de:

$$120^\circ,$$

qual é a medida de cada uma das duas partes?

57.8 Parte H – Quadrados

Exercício

Assinale todas as afirmações verdadeiras sobre um quadrado.

- a) É paralelogramo.
- b) É retângulo.
- c) É losango.
- d) Possui diagonais congruentes.
- e) Possui diagonais perpendiculares.
- f) Suas diagonais se cortam ao meio.
- g) Suas diagonais bissetam os ângulos internos.

57.9 Parte I – Classificação

Exercício

Classifique o quadrilátero da forma mais específica possível.

- a) quatro ângulos retos e lados consecutivos de medidas diferentes;
- b) quatro lados iguais, mas um ângulo mede 60° ;
- c) quatro lados iguais e quatro ângulos retos;
- d) dois pares de lados opostos paralelos, sem outras informações;
- e) exatamente um par de lados opostos paralelos.

57.10 Parte J – Demonstrações

Exercício

Considere um paralelogramo $ABCD$ e sua diagonal AC .
Demonstre que:

$$AB = CD$$

e:

$$BC = AD$$

utilizando congruência de triângulos.

Exercício

Demonstre que as diagonais de um paralelogramo se cortam mutuamente ao meio.

Exercício

Demonstre que as diagonais de um retângulo são congruentes.

58 Gabarito comentado

58.1 Parte A

Resolução

Os lados são:

$AB, BC, CD, DA.$

Os lados opostos são:

AB e CD

e:

BC e $AD.$

Os vértices opostos são:

A e C

e:

B e $D.$

As diagonais são:

AC e $BD.$

58.2 Parte B

Resolução

a)

$$90 + 80 + 100 + x = 360.$$

$$270 + x = 360.$$

Logo:

$$x = 90^\circ.$$

b)

$$120 + 70 + 90 + x = 360.$$

$$280 + x = 360.$$

Logo:

$$x = 80^\circ.$$

c)

$$4x = 360.$$

Portanto:

$$x = 90^\circ.$$

58.3 Parte C

Resolução

Em um paralelogramo, lados opostos são congruentes.

Logo:

$$\boxed{CD = AB = 12}$$

e:

$$\boxed{AD = BC = 7}.$$

Para os ângulos:

$$\hat{A} = 72^\circ.$$

Então:

$$\boxed{\hat{C} = 72^\circ}.$$

Como ângulos consecutivos são suplementares:

$$\hat{B} = 180^\circ - 72^\circ.$$

Logo:

$$\boxed{\hat{B} = 108^\circ}$$

e:

$$\boxed{\hat{D} = 108^\circ}.$$

58.4 Parte D

Resolução

1.

$$AB = CD.$$

Então:

$$5x - 3 = 32.$$

$$5x = 35.$$

Logo:

$$\boxed{x = 7}.$$

2.

Ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares:

$$2x + 20 + 3x + 10 = 180.$$

$$5x + 30 = 180.$$

$$5x = 150.$$

Logo:

$$\boxed{x = 30}.$$

Então:

$$\hat{A} = 2(30) + 20 = 80^\circ.$$

E:

$$\hat{B} = 3(30) + 10 = 100^\circ.$$

Portanto:

$$\boxed{\hat{A} = \hat{C} = 80^\circ}$$

e:

$$\boxed{\hat{B} = \hat{D} = 100^\circ}.$$

58.5 Parte E

Resolução

As diagonais de um paralelogramo cortam-se ao meio.

Logo:

$$AO = OC.$$

Assim:

$$\boxed{OC = 11}.$$

Também:

$$BO = OD.$$

Logo:

$$\boxed{OD = 8}.$$

No segundo exercício:

$$AO = OC.$$

Então:

$$4x + 1 = 25.$$

$$4x = 24.$$

Logo:

$$\boxed{x = 6}.$$

58.6 Parte F

Resolução

Como as diagonais de um retângulo possuem a mesma medida:

$$AC = BD.$$

Então:

$$3x + 4 = 28.$$

$$3x = 24.$$

Logo:

$$\boxed{x = 8}.$$

Para a demonstração, considere os triângulos:

$$\triangle ABC$$

e:

$$\triangle BAD.$$

Temos:

$$AB = AB$$

pelo lado comum;

$$BC = AD$$

porque o retângulo é paralelogramo;

e:

$$\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ.$$

Logo, por LAL:

$$\triangle ABC \cong \triangle BAD.$$

Portanto:

$$\boxed{AC = BD}.$$

58.7 Parte G

Resolução

Se:

$$\hat{A} = 110^\circ,$$

então:

$$\hat{C} = 110^\circ.$$

Os consecutivos são suplementares:

$$\hat{B} = 180^\circ - 110^\circ.$$

Logo:

$$\hat{B} = 70^\circ.$$

Assim:

$$\boxed{\hat{B} = \hat{D} = 70^\circ}$$

e:

$$\boxed{\hat{C} = 110^\circ}.$$

As diagonais de um losango são perpendiculares.

Logo:

$$\boxed{\widehat{AOB} = 90^\circ}.$$

Se uma diagonal bissecta um ângulo de:

$$120^\circ,$$

cada metade mede:

$$\frac{120^\circ}{2} = 60^\circ.$$

Portanto:

$$\boxed{60^\circ}.$$

58.8 Parte H

Resolução

Todas as afirmações são verdadeiras.

Um quadrado é simultaneamente:

$\boxed{\text{paralelogramo}},$
 $\boxed{\text{retângulo}},$
 e:
 $\boxed{\text{losango}}.$

Portanto, suas diagonais:

- são congruentes;
- são perpendiculares;
- cortam-se ao meio;
- bisseçam os ângulos internos.

58.9 Parte I

Resolução

- a) $\boxed{\text{retângulo}}$
- b) $\boxed{\text{losango}}$
- c) $\boxed{\text{quadrado}}$
- d) $\boxed{\text{paralelogramo}}$
- e) $\boxed{\text{trapézio}}$

58.10 Parte J

Resolução

1. Lados opostos do paralelogramo

Traçamos a diagonal:

$AC.$

Como:

$$AB \parallel CD,$$

temos:

$$\widehat{BAC} = \widehat{DCA}.$$

Como:

$$BC \parallel AD,$$

temos:

$$\widehat{BCA} = \widehat{DAC}.$$

Além disso:

$$AC = AC.$$

Logo, por ALA:

$$\triangle BAC \cong \triangle DCA.$$

Portanto:

$$\boxed{AB = CD}$$

e:

$$\boxed{BC = AD}.$$

2. Diagonais do paralelogramo

Se O é a interseção das diagonais, consideramos:

$$\triangle AOB$$

e:

$$\triangle COD.$$

Pelo paralelismo:

$$\widehat{BAO} = \widehat{DCO},$$

e:

$$\widehat{ABO} = \widehat{CDO}.$$

Além disso:

$$AB = CD.$$

Logo, por ALA:

$$\triangle AOB \cong \triangle COD.$$

Assim:

$$\boxed{AO = OC}$$

e:

$$\boxed{BO = OD}.$$

3. Diagonais do retângulo

Nos triângulos:

$$\triangle ABC$$

e:

$$\triangle BAD,$$

temos:

$$AB = AB,$$

$$BC = AD,$$

e:

$$\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ.$$

Por LAL:

$$\triangle ABC \cong \triangle BAD.$$

Logo:

$$\boxed{AC = BD}.$$

59 Avaliação final

Avaliação final – Propriedades dos quadriláteros

Resolva as questões abaixo.

1. Defina um quadrilátero.
2. Qual é a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo?
3. Defina um paralelogramo.
4. Cite quatro propriedades de um paralelogramo.
5. Num paralelogramo:
$$\hat{A} = 68^\circ.$$

Determine os outros três ângulos.

6. As diagonais de um paralelogramo se cruzam em O . Se:

$$AO = 2x + 3$$

e:

$$OC = 19,$$

determine x .

7. Explique por que as diagonais de um retângulo possuem a mesma medida.
8. Cite duas propriedades especiais das diagonais de um losango.
9. Explique por que todo quadrado é simultaneamente retângulo e losango.
10. Considere um quadrilátero cujos quatro lados possuem a mesma medida e cujos quatro ângulos são retos. Classifique-o e descreva todas as principais propriedades de suas diagonais.

59.1 Gabarito da avaliação final

Resolução

1. Um quadrilátero é um polígono formado por quatro lados, quatro vértices e quatro ângulos internos.

2.

$$360^\circ.$$

3. Um paralelogramo é um quadrilátero que possui os dois pares de lados opostos paralelos.

4. Entre suas propriedades:

- lados opostos paralelos;
- lados opostos congruentes;
- ângulos opostos congruentes;
- ângulos consecutivos suplementares;
- diagonais que se cortam mutuamente ao meio.

5. Se:

$$\hat{A} = 68^\circ,$$

então:

$$\hat{C} = 68^\circ.$$

E:

$$\widehat{B} = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ.$$

Logo:

$$\widehat{D} = 112^\circ.$$

Portanto:

$$\boxed{\widehat{A} = \widehat{C} = 68^\circ}$$

e:

$$\boxed{\widehat{B} = \widehat{D} = 112^\circ.}$$

6. Como as diagonais se cortam ao meio:

$$AO = OC.$$

Então:

$$2x + 3 = 19.$$

$$2x = 16.$$

Logo:

$$\boxed{x = 8}.$$

7. Podemos comparar:

$$\triangle ABC$$

e:

$$\triangle BAD.$$

Temos:

$$AB = AB,$$

$$BC = AD,$$

e dois ângulos retos correspondentes.

Logo, por LAL:

$$\triangle ABC \cong \triangle BAD.$$

Assim:

$$\boxed{AC = BD}.$$

8. As diagonais de um losango:

$\boxed{\text{são perpendiculares}}$

e:

$\boxed{\text{bissetam os ângulos internos.}}$

Além disso, por ser paralelogramo, cortam-se mutuamente ao meio.

9. O quadrado possui:

4

ângulos retos, portanto é retângulo.

Também possui:

4

lados congruentes, portanto é losango.

Logo:

$\boxed{\text{quadrado} \Rightarrow \text{retângulo e losango.}}$

10. O quadrilátero é um:

$\boxed{\text{quadrado.}}$

Suas diagonais:

- cortam-se mutuamente ao meio;
- possuem a mesma medida;
- são perpendiculares;
- bissetam os ângulos internos.

60 Conclusão

Os quadriláteros constituem uma das famílias mais importantes da Geometria plana.

Ao estudar suas propriedades, observamos que diversas afirmações podem ser demonstradas rigorosamente utilizando a congruência de triângulos.

As principais ideias desenvolvidas foram:

- 1) todo quadrilátero convexo possui soma dos ângulos internos igual a:

$$360^\circ;$$

- 2) um paralelogramo possui dois pares de lados opostos paralelos;
3) em um paralelogramo, lados opostos possuem a mesma medida;
4) em um paralelogramo, ângulos opostos possuem a mesma medida;
5) ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares;
6) as diagonais de um paralelogramo cortam-se mutuamente ao meio;
7) um retângulo é um paralelogramo com quatro ângulos retos;
8) as diagonais de um retângulo são congruentes;
9) um losango é um paralelogramo com quatro lados congruentes;
10) as diagonais de um losango são perpendiculares;
11) as diagonais de um losango bissetam seus ângulos internos;
12) um quadrado é simultaneamente retângulo e losango;
13) as diagonais de um quadrado reúnem as propriedades das diagonais do retângulo e do losango;
14) congruência de triângulos é uma ferramenta poderosa para demonstrar propriedades de quadriláteros.

Notação

Resumo do paralelogramo:

$$AB \parallel CD, \quad BC \parallel AD$$

$$AB = CD, \quad BC = AD$$

$$\hat{A} = \hat{C}, \quad \hat{B} = \hat{D}$$

diagonais se cortam ao meio

Para o retângulo:

$$AC = BD$$

Para o losango:

$$AC \perp BD$$

e suas diagonais bissetam os ângulos.

Para o quadrado:

diagonais congruentes
diagonais perpendiculares
diagonais se cortam ao meio
diagonais bissetam os ângulos

Por fim:

congruência de triângulos $\implies$ demonstração de propriedades dos quadriláteros.

Fim do curso