

Mediatriz e Bissetriz

Matemática – 8º Ano

Definições, construções, congruência, equidistância e aplicações geométricas

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste curso, o estudante deverá ser capaz de:

- 1) compreender o conceito de ponto médio de um segmento;
- 2) distinguir reta perpendicular e mediatriz;
- 3) definir rigorosamente a mediatriz de um segmento;
- 4) construir a mediatriz com régua e compasso;
- 5) justificar a construção da mediatriz por congruência de triângulos;
- 6) reconhecer que pontos da mediatriz são equidistantes das extremidades do segmento;
- 7) utilizar a recíproca da propriedade da mediatriz;
- 8) compreender o conceito de bissetriz de um ângulo;
- 9) construir a bissetriz com régua e compasso;
- 10) justificar sua construção por congruência de triângulos;
- 11) determinar medidas angulares utilizando a bissetriz;
- 12) reconhecer pontos equidistantes dos lados de um ângulo;
- 13) distinguir distância entre pontos e distância entre ponto e reta;
- 14) aplicar mediatrizes e bissetrizes em problemas geométricos;
- 15) utilizar linguagem de hipóteses, propriedades e conclusões em demonstrações.

Sumário

1	Introdução	1
2	Revisão: segmento	1
3	Ponto médio	2

4	Retas perpendiculares	3
5	Definição de mediatriz	3
6	As duas condições da mediatriz	3
7	Representação da mediatriz	4
8	Construção da mediatriz com régua e compasso	4
9	Algoritmo de construção	5
10	Por que a abertura deve ser maior que metade?	5
11	Ilustração da construção	6
12	Primeira etapa da justificativa	6
13	Por que a reta passa pelo ponto médio?	6
14	Por que a reta é perpendicular?	8
15	Propriedade fundamental da mediatriz	9
16	Demonstração da equidistância	9
17	Recíproca da propriedade da mediatriz	10
18	Aplicação: localizar um ponto equidistante	10
19	Aplicação algébrica da mediatriz	10
20	Triângulo isósceles e mediatriz	11
21	Definição de ângulo	12
22	Definição de bissetriz	12
23	Representação da bissetriz	13
24	Bissetriz e metade do ângulo	13
25	Exemplo numérico	13

26 Construção da bissetriz com régua e compasso	14
27 Algoritmo da bissetriz	14
28 Ilustração da construção	15
29 Justificativa da construção da bissetriz	15
30 Exemplo algébrico com bissetriz	16
31 Distância de um ponto a uma reta	17
32 Bissetriz e equidistância dos lados	17
33 Demonstração da equidistância na bissetriz	17
34 Recíproca da propriedade da bissetriz	18
35 Comparação entre mediatriz e bissetriz	19
36 Mediatriz não é bissetriz	19
37 Aplicação em triângulos	19
38 Mediatriz de um lado de triângulo	20
39 Construção de um triângulo isósceles	20
40 Construção de um ângulo dividido igualmente	21
41 Bissetrizes sucessivas	21
42 Construção de 45°	22
43 Construção de 30°	22
44 Problema de equidistância com mediatriz	23
45 Problema com bissetriz	24
46 Problemas de decisão	25
47 Algoritmo: reconhecer uma mediatriz	25

48 Algoritmo: reconhecer uma bissetriz	26
49 Fluxograma conceitual	26
50 Erros comuns	26
51 Mapa conceitual	28
52 Resumo teórico	28
53 Exercícios	29
53.1 Parte A – Ponto médio	29
53.2 Parte B – Reconhecimento da mediatriz	29
53.3 Parte C – Propriedade da mediatriz	30
53.4 Parte D – Recíproca da mediatriz	30
53.5 Parte E – Construção da mediatriz	30
53.6 Parte F – Bissetriz	30
53.7 Parte G – Expressões algébricas e bissetriz	31
53.8 Parte H – Construção da bissetriz	31
53.9 Parte I – Equidistância	31
53.10Parte J – Aplicações	32
54 Gabarito comentado	32
54.1 Parte A	32
54.2 Parte B	33
54.3 Parte C	33
54.4 Parte D	34
54.5 Parte E	34
54.6 Parte F	35
54.7 Parte G	35
54.8 Parte H	36
54.9 Parte I	37
54.10Parte J	37
55 Avaliação final	38
55.1 Gabarito da avaliação final	39
56 Conclusão	41

1 Introdução

Considere dois pontos:

A

e:

B .

Podemos perguntar:

Quais pontos do plano estão à mesma distância de A e de B ?

A resposta está relacionada à **mediatriz** do segmento:

AB .

Agora considere um ângulo:

$\widehat{AOB}$.

Podemos perguntar:

Qual semirreta divide esse ângulo exatamente em duas partes iguais?

A resposta é a **bissetriz**.

Mediatriz e bissetriz são objetos fundamentais da Geometria e aparecem em:

- construções geométricas;
- problemas de equidistância;
- propriedades de triângulos;
- localização de centros;
- demonstrações geométricas.

2 Revisão: segmento

Definição 2.1: Segmento de reta

Dados dois pontos distintos A e B , o segmento de reta de extremidades A e B é indicado por:

$$\overline{AB}.$$

A medida do segmento será indicada por:

$$AB.$$

Assim:

$$AB = 8 \text{ cm}$$

significa que o comprimento do segmento $\overline{AB}$ é 8 cm.

3 Ponto médio

Definição 3.1: Ponto médio

O ponto M é o **ponto médio** do segmento $\overline{AB}$ quando:

$$M \in \overline{AB}$$

e:

$$AM = MB.$$

Exemplo

Se:

$$AB = 14 \text{ cm}$$

e M é ponto médio de AB , então:

$$AM = MB.$$

Como:

$$AM + MB = 14,$$

temos:

$$2AM = 14.$$

Logo:

$$AM = MB = 7 \text{ cm.}$$

4 Retas perpendiculares

Definição 4.1: Retas perpendiculares

Duas retas são perpendiculares quando se intersectam formando ângulos de:

$$90^\circ.$$

Escrevemos:

$$r \perp s.$$

Atenção

Ser perpendicular a um segmento não significa, por si só, passar por seu ponto médio.

5 Definição de mediatriz

Definição 5.1: Mediatriz de um segmento

A **mediatriz** de um segmento é a reta perpendicular ao segmento que passa por seu ponto médio.

Se M é ponto médio de:

$$\overline{AB}$$

e uma reta r passa por M de modo que:

$$r \perp AB,$$

então:

$$r \text{ é a mediatriz de } \overline{AB}.$$

6 As duas condições da mediatriz

Para que uma reta seja mediatriz de:

$$\overline{AB},$$

ela precisa satisfazer simultaneamente:

$$\text{passar pelo ponto médio}$$

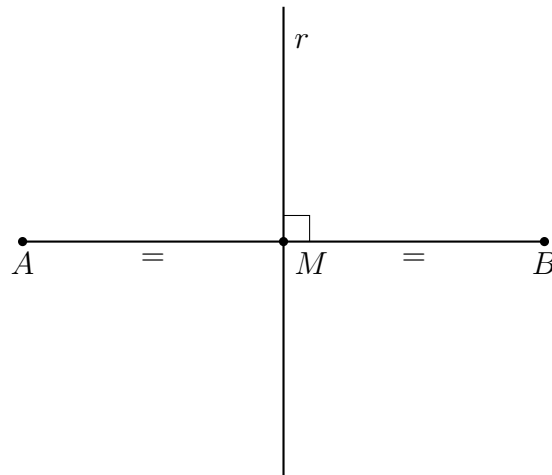
e:

ser perpendicular ao segmento.

Atenção

Uma reta que apenas passa pelo ponto médio não é necessariamente mediatriz.
Uma reta que é apenas perpendicular ao segmento também não é necessariamente mediatriz.

7 Representação da mediatriz



Temos:

$$AM = MB$$

e:

$$r \perp AB.$$

Logo:

r é a mediatriz de AB .

8 Construção da mediatriz com régua e compasso

Queremos construir a mediatriz de um segmento:

$$\overline{AB}.$$

9 Algoritmo de construção

Notação

1) trace o segmento:

$$AB;$$

2) abra o compasso com uma medida maior que:

$$\frac{AB}{2};$$

3) com centro em A , trace dois arcos, um de cada lado do segmento;

4) mantendo exatamente a mesma abertura, faça o mesmo com centro em B ;

5) marque as duas interseções dos arcos como:

$$C$$

e:

$$D;$$

6) trace a reta:

$$CD.$$

A reta CD é a mediatriz de:

$$AB.$$

10 Por que a abertura deve ser maior que metade?

Se utilizarmos um raio:

$$r$$

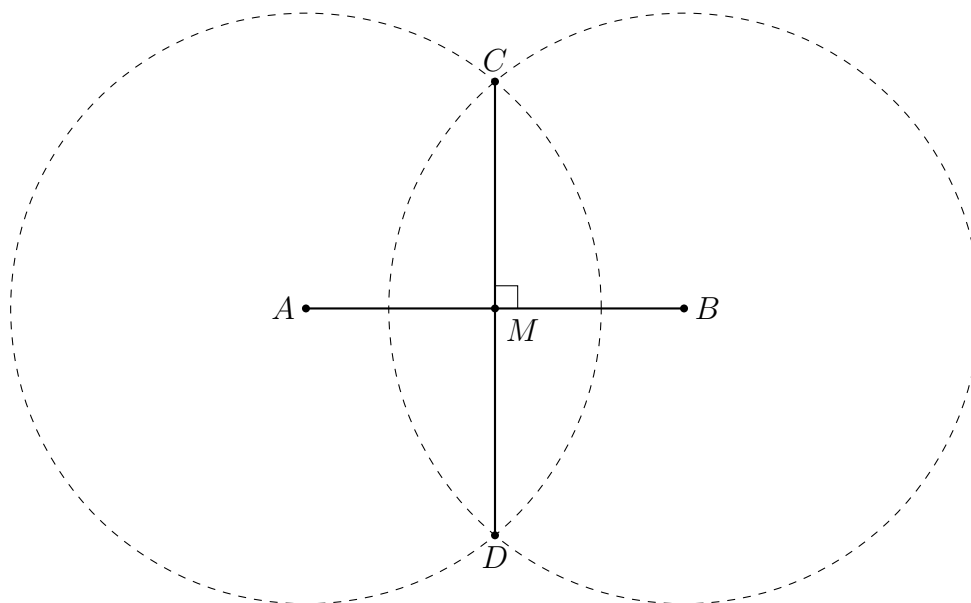
nas circunferências de centros A e B , precisamos que elas se intersectem.

Para duas circunferências de mesmo raio construídas sobre as extremidades de um segmento AB , precisamos escolher:

$$r > \frac{AB}{2}.$$

Caso contrário, as duas circunferências podem não produzir os dois pontos de interseção necessários.

11 Ilustração da construção



12 Primeira etapa da justificativa

Como C pertence às duas circunferências construídas com a mesma abertura:

$$CA = CB.$$

Da mesma maneira:

$$DA = DB.$$

Logo, os pontos:

C

e:

D

estão à mesma distância das extremidades A e B .

13 Por que a reta passa pelo ponto médio?

Seja:

$$M = CD \cap AB.$$

Considere os triângulos:

$$\triangle ACM$$

e:

$$\triangle BCM.$$

Sabemos que:

$$AC = BC$$

pela construção.

Além disso:

$$CM = CM$$

pelo lado comum.

Como os pontos C e D foram construídos simetricamente em relação ao segmento, podemos formalizar a construção pela congruência dos triângulos determinados pelas interseções.

Outra forma particularmente clara é utilizar os triângulos:

$$\triangle ACD$$

e:

$$\triangle BCD.$$

Temos:

$$AC = BC,$$

$$AD = BD,$$

e:

$$CD = CD.$$

Logo, por LLL:

$$\triangle ACD \cong \triangle BCD.$$

Portanto, a reta CD é eixo de simetria da configuração e encontra AB em seu ponto médio.

Assim:

$$\boxed{AM = MB.}$$

14 Por que a reta é perpendicular?

Da mesma congruência, a reta:

$$CD$$

divide a configuração em duas partes simétricas.

No ponto M , os ângulos:

$$\widehat{AMC}$$

e:

$$\widehat{CMB}$$

são iguais.

Como A, M, B são colineares:

$$\widehat{AMC} + \widehat{CMB} = 180^\circ.$$

Se são iguais:

$$2\widehat{AMC} = 180^\circ.$$

Logo:

$$\widehat{AMC} = 90^\circ.$$

Portanto:

$$\boxed{CD \perp AB.}$$

Como também:

$$AM = MB,$$

concluimos:

$$\boxed{CD \text{ é a mediatriz de } AB.}$$

15 Propriedade fundamental da mediatriz

Teorema 15.1: Equidistância na mediatriz

Se um ponto P pertence à mediatriz de um segmento $\overline{AB}$, então:

$$PA = PB.$$

16 Demonstração da equidistância

Seja M o ponto médio de AB .

Como P pertence à mediatriz:

$$PM \perp AB.$$

Considere:

$$\triangle AMP$$

e:

$$\triangle BMP.$$

Temos:

$$AM = MB$$

porque M é ponto médio.

Também:

$$PM = PM.$$

E:

$$\widehat{AMP} = \widehat{BMP} = 90^\circ.$$

Portanto, por LAL:

$$\triangle AMP \cong \triangle BMP.$$

Consequentemente:

$$PA = PB.$$

17 Recíproca da propriedade da mediatriz

Teorema 17.1: Recíproca da mediatriz

Se um ponto P satisfaz:

$$PA = PB,$$

então P pertence à mediatriz do segmento:

$$AB.$$

Observação

A propriedade e sua recíproca serão fundamentais para compreender a mediatriz como **lugar geométrico**, que será estudado no próximo curso.

18 Aplicação: localizar um ponto equidistante

Exemplo

Os pontos A e B representam duas cidades.

Deseja-se localizar um equipamento de modo que sua distância até as duas cidades seja a mesma.

Onde ele pode ser colocado?

Resolução

Precisamos de um ponto P tal que:

$$PA = PB.$$

Pela propriedade da mediatriz, todos esses pontos pertencem à mediatriz de:

$$AB.$$

Portanto, o equipamento deve ser colocado em algum ponto da:

mediatriz de AB .

19 Aplicação algébrica da mediatriz

Exemplo

O ponto P pertence à mediatriz de AB .

Sabemos que:

$$PA = 3x + 2$$

e:

$$PB = 20.$$

Determine x .

Resolução

Como P pertence à mediatriz:

$$PA = PB.$$

Logo:

$$3x + 2 = 20.$$

Então:

$$3x = 18.$$

Portanto:

$$\boxed{x = 6.}$$

20 Triângulo isósceles e mediatriz

Considere um triângulo isósceles:

$$AB = AC.$$

Então o vértice A está à mesma distância dos pontos:

B

e:

C .

Pela recíproca da propriedade da mediatriz:

A pertence à mediatriz de BC .

Essa observação ajuda a explicar várias propriedades de triângulos isósceles.

21 Definição de ângulo

Definição 21.1: Ângulo

Um ângulo é a figura formada por duas semirretas de mesma origem.

Considere:

$$\widehat{AOB}.$$

Seu vértice é:

$$O.$$

Seus lados são as semirretas:

$$\overrightarrow{OA}$$

e:

$$\overrightarrow{OB}.$$

22 Definição de bissetriz

Definição 22.1: Bissetriz de um ângulo

A **bissetriz** de um ângulo é a semirreta com origem no vértice que divide o ângulo em dois ângulos de mesma medida.

Se:

$$\overrightarrow{OC}$$

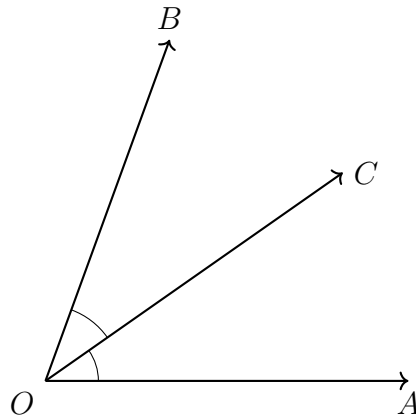
é bissetriz de:

$$\widehat{AOB},$$

então:

$$\widehat{AOC} = \widehat{COB}.$$

23 Representação da bissetriz



24 Bissetriz e metade do ângulo

Se:

$$m(\widehat{AOB}) = \theta$$

e OC é bissetriz, então:

$$m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{COB}) = \frac{\theta}{2}.$$

Notação

bissetriz $\Rightarrow$ divisão do ângulo por 2.

25 Exemplo numérico

Exemplo

Uma bissetriz divide um ângulo de:

$$86^\circ.$$

Determine as duas partes.

Resolução

$$\frac{86^\circ}{2} = 43^\circ.$$

Portanto:

$$43^\circ \text{ e } 43^\circ.$$

26 Construção da bissetriz com régua e compasso

Considere:

$$\widehat{AOB}.$$

Queremos construir sua bissetriz.

27 Algoritmo da bissetriz

Notação

- 1) com centro em O , trace um arco que intercepte:

$$\overrightarrow{OA}$$

em C e:

$$\overrightarrow{OB}$$

em D ;

- 2) mantendo uma mesma abertura do compasso, trace um arco de centro C ;

- 3) com a mesma abertura, trace um arco de centro D ;

- 4) marque uma interseção dos arcos como E ;

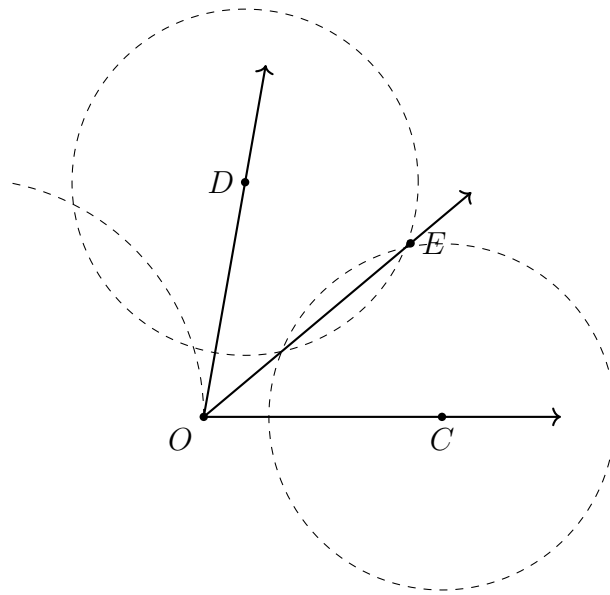
- 5) trace a semirreta:

$$\overrightarrow{OE}.$$

Então:

$$OE \text{ é a bissetriz de } \widehat{AOB}.$$

28 Ilustração da construção



29 Justificativa da construção da bissetriz

Pelo primeiro arco:

$$OC = OD.$$

Pelos arcos de centros C e D :

$$CE = DE.$$

Além disso:

$$OE = OE.$$

Logo, nos triângulos:

$$\triangle OCE$$

e:

$$\triangle ODE,$$

temos três pares de lados congruentes.

Portanto, por LLL:

$$\triangle OCE \cong \triangle ODE.$$

Consequentemente:

$$\widehat{COE} = \widehat{EOD}.$$

Assim:

$$\boxed{OE \text{ é bissetriz de } \widehat{COD}.}$$

30 Exemplo algébrico com bissetriz

Exemplo

A semirreta OC é bissetriz de:

$$\widehat{AOB}.$$

Sabemos que:

$$m(\widehat{AOC}) = 3x + 5^\circ$$

e:

$$m(\widehat{COB}) = 5x - 15^\circ.$$

Determine x .

Resolução

Como OC é bissetriz:

$$3x + 5 = 5x - 15.$$

Somando 15:

$$3x + 20 = 5x.$$

Logo:

$$20 = 2x.$$

Portanto:

$$\boxed{x = 10.}$$

Cada ângulo mede:

$$3(10) + 5 = 35^\circ.$$

Logo:

$$m(\widehat{AOB}) = 70^\circ.$$

31 Distância de um ponto a uma reta

Para compreender outra propriedade da bissetriz, precisamos definir a distância de um ponto a uma reta.

Definição 31.1: Distância de um ponto a uma reta

A distância de um ponto P a uma reta r é o comprimento do segmento perpendicular traçado de P até r .

Se:

$$PH \perp r,$$

então:

$$d(P, r) = PH.$$

Atenção

A distância de um ponto a uma reta não é medida por um segmento oblíquo qualquer. Devemos usar o segmento perpendicular.

32 Bissetriz e equidistância dos lados

Teorema 32.1: Equidistância na bissetriz

Se um ponto P pertence à bissetriz de um ângulo, então suas distâncias aos dois lados do ângulo são iguais.

33 Demonstração da equidistância na bissetriz

Considere o ângulo:

$$\widehat{AOB}.$$

Seja P um ponto de sua bissetriz.

Traçamos:

$$PH \perp OA$$

e:

$$PK \perp OB.$$

Queremos mostrar:

$$PH = PK.$$

Considere os triângulos:

$$\triangle OPH$$

e:

$$\triangle OPK.$$

Temos:

$$OP = OP$$

pelo lado comum.

Como OP é bissetriz:

$$\widehat{HOP} = \widehat{POK}.$$

Além disso:

$$\widehat{OHP} = \widehat{OKP} = 90^\circ.$$

Logo, os triângulos são congruentes pelo caso AAL.

Consequentemente:

$$\boxed{PH = PK.}$$

34 Recíproca da propriedade da bissetriz

Teorema 34.1: Recíproca da bissetriz

Se um ponto interior a um ângulo está à mesma distância dos dois lados desse ângulo, então pertence à bissetriz do ângulo.

Essa recíproca também será importante no estudo de lugares geométricos.

35 Comparação entre mediatriz e bissetriz

Objeto	Mediatriz	Bissetriz
Parte de	segmento	ângulo
É uma	reta	semirreta
Divide	segmento ao meio	ângulo ao meio
Perpendicular?	sim	não necessariamente
Equidistância	extremidades	lados do ângulo
Construção	arcos nas extremidades	arcos nos lados do ângulo

36 Mediatriz não é bissetriz

Atenção

Mediatriz e bissetriz são conceitos diferentes.

A mediatriz está associada a:

segmentos.

A bissetriz está associada a:

ângulos.

A mediatriz é uma reta perpendicular a um segmento em seu ponto médio.

A bissetriz é uma semirreta que divide um ângulo em duas partes iguais.

37 Aplicação em triângulos

Mediatrizes e bissetrizes aparecem naturalmente em triângulos.

Em um triângulo:

ABC ,

podemos construir:

- a mediatriz de cada lado;
- a bissetriz de cada ângulo interno.

Essas construções levam a pontos especiais do triângulo.

Observação

A interseção das mediatrizes e a interseção das bissetrizes serão retomadas em estudos posteriores. Aqui, o objetivo principal é reconhecer e construir corretamente cada objeto.

38 Mediatriz de um lado de triângulo

Considere:

$$\triangle ABC.$$

Se r é mediatriz de:

$$BC,$$

todo ponto $P \in r$ satisfaz:

$$PB = PC.$$

Assim, a mediatriz de um lado pode ser utilizada para construir pontos que formam triângulos isósceles.

39 Construção de um triângulo isósceles

Exemplo

Dado um segmento:

$$AB,$$

construa um ponto C tal que:

$$CA = CB.$$

Resolução

Construímos a mediatriz de:

$$AB.$$

Escolhemos qualquer ponto:

$$C$$

sobre essa mediatriz, diferente do ponto médio.

Pela propriedade da mediatriz:

$$CA = CB.$$

Logo:

$$\triangle ABC \text{ é isósceles.}$$

40 Construção de um ângulo dividido igualmente

Exemplo

Um ângulo mede:

$$124^\circ.$$

Determine as medidas resultantes quando construímos sua bissetriz.

Resolução

A bissetriz divide o ângulo em duas partes iguais.

Logo:

$$\frac{124^\circ}{2} = 62^\circ.$$

Portanto:

$$62^\circ \text{ e } 62^\circ.$$

41 Bissetrizes sucessivas

Podemos aplicar a construção da bissetriz mais de uma vez.

Por exemplo, partindo de:

$$120^\circ,$$

uma bissecção produz:

$$60^\circ.$$

Uma nova bissecção produz:

$$30^\circ.$$

Assim:

$$\boxed{120^\circ \longrightarrow 60^\circ \longrightarrow 30^\circ.}$$

42 Construção de 45°

Partimos de um ângulo reto:

$$90^\circ.$$

Construímos sua bissetriz.

Logo:

$$\frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

Portanto:

$$\boxed{45^\circ.}$$

43 Construção de 30°

Partimos de um ângulo de:

$$60^\circ.$$

Construímos sua bissetriz.

Logo:

$$\frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Portanto:

$$\boxed{30^\circ.}$$

44 Problema de equidistância com mediatriz

Exemplo

Um ponto P pertence à mediatriz de AB .

Se:

$$PA = 2x + 7$$

e:

$$PB = 5x - 8,$$

determine x .

Resolução

Como:

$$PA = PB,$$

temos:

$$2x + 7 = 5x - 8.$$

Somando 8:

$$2x + 15 = 5x.$$

Logo:

$$15 = 3x.$$

Portanto:

$$\boxed{x = 5.}$$

Então:

$$PA = 2(5) + 7 = 17$$

e:

$$PB = 5(5) - 8 = 17.$$

45 Problema com bissetriz

Exemplo

A semirreta OP é bissetriz de:

$$\widehat{AOB}.$$

Sabemos que:

$$m(\widehat{AOP}) = 4x + 6^\circ$$

e:

$$m(\widehat{POB}) = 6x - 18^\circ.$$

Determine o ângulo total.

Resolução

Como OP é bissetriz:

$$4x + 6 = 6x - 18.$$

Somando 18:

$$4x + 24 = 6x.$$

Logo:

$$24 = 2x.$$

Então:

$$x = 12.$$

Cada metade mede:

$$4(12) + 6 = 54^\circ.$$

Portanto:

$$m(\widehat{AOB}) = 54^\circ + 54^\circ.$$

Logo:

$$\boxed{m(\widehat{AOB}) = 108^\circ.}$$

46 Problemas de decisão

Exemplo

Um ponto P satisfaz:

$$PA = PB.$$

O que podemos concluir?

Resolução

Pela recíproca da propriedade da mediatriz:

$$P \text{ pertence à mediatriz de } AB.$$

Exemplo

Um ponto P , interior a um ângulo, possui distâncias iguais aos dois lados do ângulo.

O que podemos concluir?

Resolução

Pela recíproca da propriedade da bissetriz:

$$P \text{ pertence à bissetriz do ângulo.}$$

47 Algoritmo: reconhecer uma mediatriz

Notação

Para decidir se uma reta r é mediatriz de AB :

- 1) determine o ponto de interseção:

$$M = r \cap AB;$$

- 2) verifique se:

$$AM = MB;$$

- 3) verifique se:

$$r \perp AB;$$

- 4) se as duas condições forem verdadeiras:

$$r \text{ é mediatriz.}$$

48 Algoritmo: reconhecer uma bissetriz

Notação

Para decidir se uma semirreta OP é bissetriz de:

$$\widehat{AOB},$$

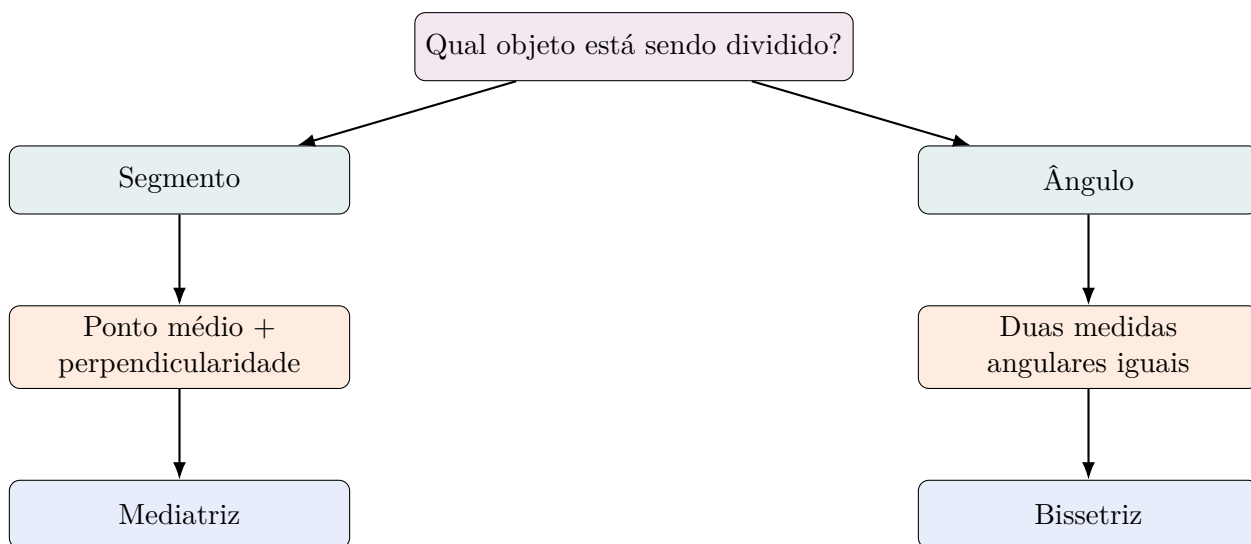
verifique se:

$$m(\widehat{AOP}) = m(\widehat{POB}).$$

Se a igualdade for verdadeira e OP estiver no interior do ângulo, então:

$$OP \text{ é bissetriz.}$$

49 Fluxograma conceitual



50 Erros comuns

Atenção

Erro 1: afirmar que toda perpendicular a um segmento é sua mediatriz. É necessário também passar pelo:

ponto médio.

Atenção

Erro 2: afirmar que toda reta que passa pelo ponto médio é mediatriz. Também é necessário que seja:

perpendicular ao segmento.

Atenção

Erro 3: dizer que a bissetriz divide um lado ao meio.

A bissetriz divide:

um ângulo

em duas partes iguais.

Atenção

Erro 4: confundir bissetriz com mediatriz.

mediatriz $\rightarrow$ segmento

bissetriz $\rightarrow$ ângulo

Atenção

Erro 5: pensar que qualquer ponto sobre a perpendicular a AB satisfaz:

$$PA = PB.$$

Isso só é garantido quando a perpendicular é a **mediatriz**, isto é, passa pelo ponto médio de AB .

Atenção

Erro 6: medir a distância de um ponto a uma reta por um segmento inclinado.

A distância é medida pelo segmento:

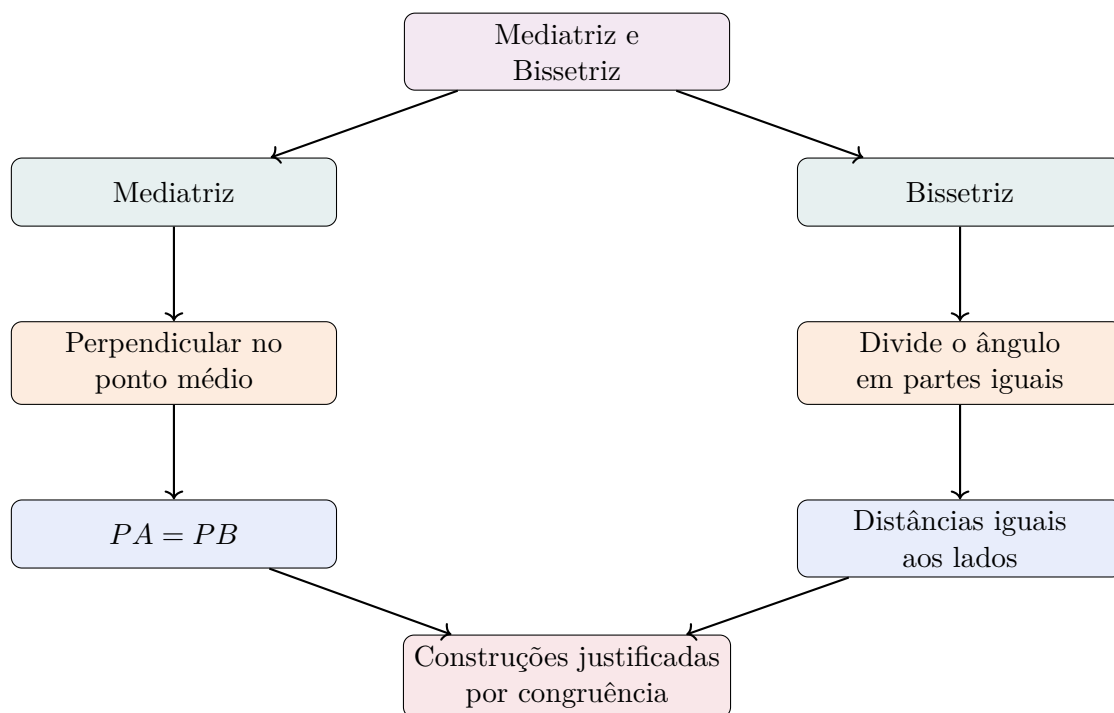
perpendicular à reta.

Atenção

Erro 7: alterar a abertura do compasso entre os arcos simétricos da construção.

A igualdade dos raios é essencial para garantir as congruências utilizadas nas demonstrações.

51 Mapa conceitual



52 Resumo teórico

Conceito	Caracterização	Propriedade
Ponto médio	$AM = MB$	divide o segmento igualmente
Mediatriz	perpendicular no ponto médio	$PA = PB$
Bissetriz	divide o ângulo igualmente	equidistância dos lados
Distância ponto-reta	segmento perpendicular	menor distância

Notação

Mediatriz de AB :

$$AM = MB \text{ e } r \perp AB.$$

Se:

$$P \in r,$$

então:

$$PA = PB.$$

Bissetriz de:

$$\widehat{AOB} :$$

$$\widehat{AOP} = \widehat{POB}.$$

Além disso:

$$P \text{ na bissetriz} \Rightarrow d(P, OA) = d(P, OB).$$

53 Exercícios

53.1 Parte A – Ponto médio

Exercício

Resolva.

- a) $AB = 18$ cm e M é ponto médio. Determine:

$$AM$$

e:

$$MB.$$

- b) $AM = 3x + 1$, $MB = 16$ e M é ponto médio. Determine x .

- c) $AM = 2x + 5$, $MB = 5x - 7$ e M é ponto médio. Determine x .

53.2 Parte B – Reconhecimento da mediatriz

Exercício

Em cada situação, diga se as informações são suficientes para concluir que r é mediatriz de AB .

- a) $r \perp AB$;
- b) r passa pelo ponto médio de AB ;
- c) $r \perp AB$ e passa pelo ponto médio;
- d) r passa por um ponto P tal que:

$$PA = PB.$$

53.3 Parte C – Propriedade da mediatriz

Exercício

O ponto P pertence à mediatriz de AB .
Determine x .

a)

$$PA = x + 9, \quad PB = 17;$$

b)

$$PA = 3x - 2, \quad PB = 2x + 7;$$

c)

$$PA = 5x + 1, \quad PB = 41.$$

53.4 Parte D – Recíproca da mediatriz

Exercício

Se:

$$PA = PB,$$

o que podemos concluir sobre a posição de P em relação ao segmento AB ?
Justifique.

53.5 Parte E – Construção da mediatriz

Exercício

Descreva, passo a passo, como construir a mediatriz de um segmento AB utilizando régua e compasso.

Exercício

Explique por que devemos usar a mesma abertura do compasso nos arcos de centros A e B .

53.6 Parte F – Bissetriz

Exercício

Determine as medidas das duas partes produzidas pela bissetriz de um ângulo de:

a) 60° ;

b) 90° ;

c) 128° ;

d) 150° .

53.7 Parte G – Expressões algébricas e bissetriz

Exercício

A semirreta OP é bissetriz de:

$$\widehat{AOB}.$$

Determine x .

a)

$$m(\widehat{AOP}) = 2x + 10^\circ, \quad m(\widehat{POB}) = 50^\circ;$$

b)

$$m(\widehat{AOP}) = 3x + 4^\circ, \quad m(\widehat{POB}) = 5x - 20^\circ;$$

c)

$$m(\widehat{AOP}) = 6x - 12^\circ, \quad m(\widehat{POB}) = 4x + 18^\circ.$$

53.8 Parte H – Construção da bissetriz

Exercício

Descreva o algoritmo de construção da bissetriz de:

$$\widehat{AOB}$$

com régua e compasso.

Exercício

Explique por que os triângulos usados na justificativa da construção são congruentes por LLL.

53.9 Parte I – Equidistância

Exercício

Um ponto P está na bissetriz de um ângulo.

As distâncias perpendiculares de P aos lados do ângulo são:

$$PH = 2x + 3$$

e:

$$PK = 5x - 12.$$

Determine x .

53.10 Parte J – Aplicações

Exercício

Dois pontos A e B representam duas escolas.
Deseja-se construir uma praça que fique à mesma distância das duas.
Que construção geométrica determina as possíveis posições da praça?

Exercício

Construa conceitualmente um triângulo isósceles com base AB utilizando a mediatriz.

Exercício

Explique como construir um ângulo de:

$$45^\circ$$

usando a bissetriz.

54 Gabarito comentado

54.1 Parte A

Resolução

a)

Como M é ponto médio:

$$AM = MB.$$

E:

$$AM + MB = 18.$$

Logo:

$$2AM = 18.$$

Portanto:

$$\boxed{AM = MB = 9 \text{ cm.}}$$

b)

$$AM = MB.$$

Logo:

$$3x + 1 = 16.$$

$$3x = 15.$$

Portanto:

$$\boxed{x = 5.}$$

c)

$$2x + 5 = 5x - 7.$$

Somando 7:

$$2x + 12 = 5x.$$

Logo:

$$12 = 3x.$$

Portanto:

$$\boxed{x = 4.}$$

54.2 Parte B

Resolução

- a) Não. Falta saber se passa pelo ponto médio.
- b) Não. Falta saber se é perpendicular.
- c) Sim. São exatamente as duas condições da definição.
- d) Saber que:

$$PA = PB$$

implica que P pertence à mediatriz, mas isso não basta, sozinho, para afirmar que uma reta arbitrária r seja a mediatriz, a menos que r seja justamente a reta determinada pela condição adequada.

54.3 Parte C

Resolução

Como P pertence à mediatriz:

$$PA = PB.$$

a)

$$x + 9 = 17.$$

Logo:

$$\boxed{x = 8.}$$

b)

$$3x - 2 = 2x + 7.$$

Logo:

$$\boxed{x = 9.}$$

c)

$$5x + 1 = 41.$$

$$5x = 40.$$

Logo:

$$\boxed{x = 8.}$$

54.4 Parte D

Resolução

Se:

$$PA = PB,$$

então P está à mesma distância das extremidades do segmento.

Pela recíproca da propriedade da mediatriz:

$$\boxed{P \text{ pertence à mediatriz de } AB.}$$

54.5 Parte E

Resolução

Para construir a mediatriz:

- 1) traçamos AB ;
- 2) abrimos o compasso com raio maior que $AB/2$;
- 3) traçamos arcos com centro em A ;

- 4) mantendo a abertura, traçamos arcos com centro em B ;
- 5) marcamos os pontos de interseção;
- 6) traçamos a reta que passa por esses pontos.

Usamos a mesma abertura porque isso garante pontos equidistantes de:

A

e:

B .

Essa igualdade é essencial para a congruência utilizada na justificativa.

54.6 Parte F

Resolução

- a)
$$\frac{60^\circ}{2} = \boxed{30^\circ}.$$
- b)
$$\frac{90^\circ}{2} = \boxed{45^\circ}.$$
- c)
$$\frac{128^\circ}{2} = \boxed{64^\circ}.$$
- d)
$$\frac{150^\circ}{2} = \boxed{75^\circ}.$$

54.7 Parte G

Resolução

Como OP é bissetriz, as medidas são iguais.

a)

$$2x + 10 = 50.$$

Logo:

$$2x = 40.$$

$$\boxed{x = 20.}$$

b)

$$3x + 4 = 5x - 20.$$

$$24 = 2x.$$

Logo:

$$\boxed{x = 12.}$$

c)

$$6x - 12 = 4x + 18.$$

$$2x = 30.$$

Logo:

$$\boxed{x = 15.}$$

54.8 Parte H

Resolução

Primeiro traçamos um arco de centro no vértice O , obtendo dois pontos C e D nos lados do ângulo.

Depois, com a mesma abertura, traçamos arcos de centros C e D , obtendo sua interseção E .

Traçamos:

$$OE.$$

Na justificativa:

$$OC = OD,$$

$$CE = DE,$$

e:

$$OE = OE.$$

Portanto:

$$\triangle OCE \cong \triangle ODE$$

por LLL.

Logo:

$$\widehat{COE} = \widehat{EOD}.$$

Assim:

OE é bissetriz.

54.9 Parte I

Resolução

Como P está na bissetriz, suas distâncias aos lados são iguais:

$$PH = PK.$$

Logo:

$$2x + 3 = 5x - 12.$$

Somando 12:

$$2x + 15 = 5x.$$

Então:

$$15 = 3x.$$

Portanto:

$$x = 5.$$

54.10 Parte J

Resolução

1.

As posições equidistantes de A e B estão sobre a:

mediatriz de AB .

2.

Construímos a mediatriz de AB e escolhemos um ponto C sobre ela.

Então:

$$CA = CB.$$

Logo:

$\triangle ABC$ é isósceles.

3.

Construímos inicialmente um ângulo de:

$$90^\circ.$$

Depois construímos sua bissetriz.
Como:

$$\frac{90^\circ}{2} = 45^\circ,$$

obtemos:

$$\boxed{45^\circ}.$$

55 Avaliação final

Avaliação final – Mediatriz e bissetriz

Resolva as questões abaixo.

1. Defina ponto médio.
2. Defina mediatriz de um segmento.
3. Quais são as duas condições que uma reta deve satisfazer para ser mediatriz de AB ?
4. Um ponto P pertence à mediatriz de AB . Se:

$$PA = 4x - 3$$

e:

$$PB = 25,$$

determine x .

5. Explique a recíproca da propriedade fundamental da mediatriz.
6. Defina bissetriz de um ângulo.
7. A bissetriz de um ângulo de:

$$136^\circ$$

divide-o em quais medidas?

8. Se:

$$m(\widehat{AOP}) = 3x + 8^\circ$$

e:

$$m(\widehat{POB}) = 5x - 16^\circ,$$

sabendo que OP é bissetriz, determine x .

9. Descreva a construção da bissetriz com régua e compasso e justifique-a utilizando congruência.

10. Compare mediatriz e bissetriz, destacando:

- a) a figura à qual cada uma está associada;
- b) o que cada uma divide;
- c) sua principal propriedade de equidistância.

55.1 Gabarito da avaliação final

Resolução

1. M é ponto médio de AB quando:

$$M \in \overline{AB}$$

e:

$$\boxed{AM = MB.}$$

2. A mediatriz é a reta perpendicular a um segmento que passa por seu ponto médio.

3. Devemos ter:

$$\boxed{AM = MB}$$

e:

$$\boxed{r \perp AB.}$$

4. Como P pertence à mediatriz:

$$PA = PB.$$

Logo:

$$4x - 3 = 25.$$

$$4x = 28.$$

Portanto:

$$\boxed{x = 7.}$$

5. Se um ponto P satisfaz:

$$PA = PB,$$

então:

$$\boxed{P \text{ pertence à mediatriz de } AB.}$$

6. A bissetriz é a semirreta, com origem no vértice do ângulo, que o divide em dois ângulos congruentes.

7. :

$$\frac{136^\circ}{2} = 68^\circ.$$

Logo:

$$\boxed{68^\circ \text{ e } 68^\circ.}$$

8. Como OP é bissetriz:

$$3x + 8 = 5x - 16.$$

Somando 16:

$$3x + 24 = 5x.$$

Logo:

$$24 = 2x.$$

Portanto:

$$\boxed{x = 12.}$$

9. Na construção, um arco centrado em O determina pontos C e D nos lados do ângulo. Arcos de mesma abertura e centros C e D determinam E .

Temos:

$$OC = OD,$$

$$CE = DE,$$

e:

$$OE = OE.$$

Logo:

$$\triangle OCE \cong \triangle ODE$$

por LLL.

Assim:

$$\widehat{COE} = \widehat{EOD}.$$

Portanto:

$$\boxed{OE \text{ é bissetriz.}}$$

10. a) A mediatriz está associada a um segmento; a bissetriz está associada a um ângulo.
- b) A mediatriz passa pelo ponto que divide o segmento em duas partes iguais e é perpendicular a ele; a bissetriz divide o ângulo em duas partes iguais.
- c) Pontos da mediatriz são equidistantes das extremidades do segmento. Pontos da bissetriz são equidistantes dos lados do ângulo.

56 Conclusão

Mediatriz e bissetriz são duas construções fundamentais da Geometria.

Embora ambas estejam relacionadas à ideia de divisão em partes iguais, elas atuam sobre objetos diferentes e possuem propriedades distintas.

As ideias fundamentais deste curso são:

- 1) o ponto médio divide um segmento em duas partes de mesma medida;
- 2) a mediatriz é perpendicular ao segmento e passa por seu ponto médio;
- 3) qualquer ponto da mediatriz está à mesma distância das duas extremidades do segmento;
- 4) se um ponto está à mesma distância das duas extremidades, ele pertence à mediatriz;
- 5) a construção da mediatriz pode ser realizada com arcos de mesmo raio;
- 6) a bissetriz divide um ângulo em dois ângulos de mesma medida;
- 7) a construção da bissetriz utiliza arcos de mesmo raio;
- 8) a validade das construções pode ser demonstrada utilizando congruência de triângulos;
- 9) pontos da bissetriz estão à mesma distância dos dois lados do ângulo;
- 10) a mediatriz e a bissetriz possuem importantes interpretações em termos de equidistância.

Notação

Resumo da mediatriz:

$$r \text{ é mediatriz de } AB$$

quando:

$$r \perp AB$$

e passa pelo ponto M tal que:

$$AM = MB.$$

Além disso:

$$P \in r \implies PA = PB.$$

Resumo da bissetriz:

$$OP \text{ é bissetriz de } \widehat{AOB}$$

quando:

$$\widehat{AOP} = \widehat{POB}.$$

E:

$$P \text{ na bissetriz} \implies d(P, OA) = d(P, OB).$$

Finalmente:

$$\text{mediatriz} \longleftrightarrow \text{equidistância entre pontos}$$

e:

$$\text{bissetriz} \longleftrightarrow \text{equidistância entre lados de um ângulo.}$$

Fim do curso