

Lugares Geométricos

Matemática – 8º Ano

Conjuntos de pontos, equidistância, mediatriz, bissetriz e resolução de problemas

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste curso, o estudante deverá ser capaz de:

- 1) compreender o conceito de lugar geométrico;
- 2) interpretar uma condição geométrica como um conjunto de pontos;
- 3) distinguir exemplo particular de caracterização de um conjunto;
- 4) compreender a importância de uma propriedade e de sua recíproca;
- 5) reconhecer a circunferência como lugar geométrico;
- 6) reconhecer a mediatriz como o lugar geométrico dos pontos equidistantes das extremidades de um segmento;
- 7) demonstrar as duas implicações que caracterizam a mediatriz;
- 8) reconhecer a bissetriz interna como o lugar geométrico dos pontos interiores equidistantes dos lados de um ângulo;
- 9) compreender corretamente a distância entre um ponto e uma reta;
- 10) utilizar interseções de lugares geométricos para determinar pontos que satisfazem várias condições simultaneamente;
- 11) resolver problemas de localização utilizando mediatrizes;
- 12) resolver problemas de localização utilizando bissetrizes;
- 13) interpretar construções geométricas como soluções de problemas;
- 14) formular e justificar conclusões utilizando linguagem matemática precisa.

Sumário

1	Introdução	1
2	Definição de lugar geométrico	1

3	Exemplo inicial	1
4	Condição necessária e suficiente	2
5	As duas direções	2
6	Por que as duas direções são importantes?	3
7	Circunferência como lugar geométrico	3
8	Ilustração da circunferência	4
9	Disco e circunferência	4
10	Mediatriz: retomada	4
11	Mediatriz como lugar geométrico	5
12	Primeira direção da mediatriz	5
13	Demonstração da primeira direção	5
14	Segunda direção da mediatriz	6
15	Demonstração da segunda direção	6
16	Caracterização completa da mediatriz	8
17	Representação da mediatriz como lugar geométrico	8
18	Problema de localização com duas cidades	9
19	Problema com uma condição adicional	9
20	Interseção de lugares geométricos	10
21	Exemplo com duas mediatrizes	10
22	Circuncentro: uma aplicação	11
23	Bissetriz como lugar geométrico	12
24	Distância entre ponto e reta	12

25 Ilustração da distância	13
26 Primeira direção da bissetriz	13
27 Demonstração da primeira direção da bissetriz	13
28 Segunda direção da bissetriz	14
29 Demonstração da segunda direção da bissetriz	14
30 Caracterização completa da bissetriz	15
31 Representação da bissetriz como lugar geométrico	16
32 Cuidado com a bissetriz externa	16
33 Problema de localização com duas paredes	16
34 Problema com duas condições angulares	17
35 Três bissetrizes de um triângulo	17
36 Por que o incentro é equidistante dos lados?	18
37 Circuncentro e incentro: comparação	19
38 Lugares geométricos e construção	19
39 Exemplo de duas circunferências	20
40 Número de soluções	20
41 Exemplo: mediatriz e circunferência	21
42 Distância fixa de uma reta: ampliação	21
43 Ilustração: distância fixa de uma reta	22
44 Condição “mais perto de A que de B”	22
45 Exemplo de região de influência	23
46 Algoritmo para resolver problemas de lugares geométricos	23

47 Tabela de traduções úteis	24
48 Problema completo de localização	24
49 Problema completo com lados de um triângulo	25
50 Erros comuns	26
51 Resumo teórico	28
52 Exercícios	28
52.1 Parte A – Conceito	28
52.2 Parte B – Identificação	29
52.3 Parte C – Mediatriz	29
52.4 Parte D – Propriedade da mediatriz	29
52.5 Parte E – Recíproca	30
52.6 Parte F – Bissetriz	30
52.7 Parte G – Distâncias à bissetriz	30
52.8 Parte H – Interseção de lugares	30
52.9 Parte I – Aplicações	31
52.10 Parte J – Desafios	31
53 Gabarito comentado	32
53.1 Parte A	32
53.2 Parte B	32
53.3 Parte C	32
53.4 Parte D	33
53.5 Parte E	33
53.6 Parte F	34
53.7 Parte G	34
53.8 Parte H	34
53.9 Parte I	35
53.10 Parte J	36
54 Avaliação final	36
54.1 Gabarito da avaliação final	37
55 Conclusão	40

1 Introdução

Em muitos problemas de Geometria, não procuramos apenas um ponto específico.

Procuramos **todos os pontos** que satisfazem determinada condição.

Por exemplo:

- todos os pontos que estão a 3 cm de um ponto O ;
- todos os pontos que estão à mesma distância de dois pontos A e B ;
- todos os pontos interiores de um ângulo que estão à mesma distância de seus dois lados.

Cada uma dessas condições determina um conjunto de pontos.

Esse conjunto é chamado de:

lugar geométrico.

2 Definição de lugar geométrico

Definição 2.1: Lugar geométrico

Um **lugar geométrico** é o conjunto de todos os pontos do plano que satisfazem uma determinada propriedade ou condição geométrica.

Assim, um lugar geométrico sempre envolve duas ideias:

pontos

e:

uma condição.

3 Exemplo inicial

Considere a condição:

$$PO = 4 \text{ cm.}$$

Queremos determinar todos os pontos P do plano cuja distância até O seja exatamente 4 cm.

Esses pontos formam uma circunferência de:

centro O

e:

raio 4 cm.

Portanto:

a circunferência é o lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância fixa de um ponto fixo.

4 Condição necessária e suficiente

Ao caracterizar rigorosamente um lugar geométrico, normalmente precisamos verificar duas direções.

Considere uma figura L e uma propriedade $\mathcal{P}$.

Queremos mostrar:

$$P \in L$$

se, e somente se, P satisfaz $\mathcal{P}$.

Definição 4.1: Condição necessária e suficiente

Dizemos que duas afirmações são equivalentes quando cada uma implica a outra. Escrevemos:

$$A \Longleftrightarrow B.$$

5 As duas direções

Para provar:

$$P \in L \Longleftrightarrow P \text{ possui a propriedade } \mathcal{P},$$

devemos mostrar:

$$P \in L \implies P \text{ possui } \mathcal{P}$$

e também:

$$P \text{ possui } \mathcal{P} \implies P \in L.$$

Notação

$$A \Longleftrightarrow B$$

significa simultaneamente:

e:

$$A \implies B$$

$$B \implies A.$$

6 Por que as duas direções são importantes?

Suponha que mostramos apenas:

$$P \in L \implies P \text{ possui uma propriedade.}$$

Isso prova que todos os pontos de L possuem a propriedade.

Entretanto, ainda poderia existir algum ponto fora de L que também possuísse a mesma propriedade.

Para concluir que L contém **todos e somente** os pontos procurados, precisamos provar também a recíproca.

7 Circunferência como lugar geométrico

Teorema 7.1: Circunferência como lugar geométrico

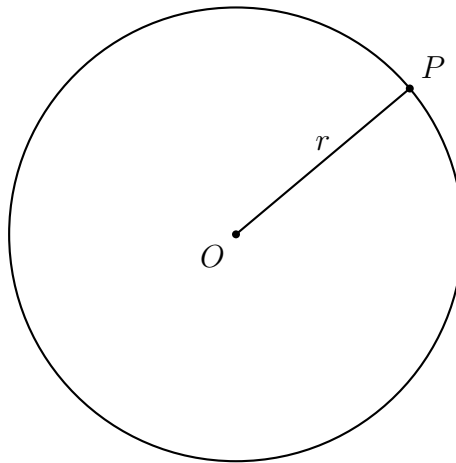
Dado um ponto fixo O e um número positivo r , a circunferência de centro O e raio r é o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que:

$$PO = r.$$

Em símbolos:

$$P \in \mathcal{C}(O, r) \iff PO = r.$$

8 Ilustração da circunferência



Todo ponto da circunferência satisfaz:

$$PO = r.$$

E todo ponto cuja distância a O é r pertence à circunferência.

9 Disco e circunferência

Atenção

Não confunda circunferência com disco.

A circunferência é formada pelos pontos que satisfazem:

$$PO = r.$$

Já o disco fechado inclui também os pontos internos:

$$PO \leq r.$$

Assim, as duas condições representam lugares geométricos diferentes.

10 Mediatriz: retomada

Considere um segmento:

$$\overline{AB}.$$

A mediatriz de AB é a reta:

- perpendicular a AB ;
- que passa pelo ponto médio de AB .

Mas agora queremos interpretá-la de maneira mais profunda.

11 Mediatriz como lugar geométrico

Teorema 11.1: Mediatriz como lugar geométrico

A mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ é o lugar geométrico dos pontos P do plano que estão à mesma distância de A e B .

Em símbolos:

$$P \text{ pertence à mediatriz de } AB \iff PA = PB.$$

Essa afirmação contém duas partes:

$$P \text{ na mediatriz} \implies PA = PB$$

e:

$$PA = PB \implies P \text{ na mediatriz.}$$

12 Primeira direção da mediatriz

Teorema 12.1: Ponto da mediatriz é equidistante

Se P pertence à mediatriz de AB , então:

$$PA = PB.$$

13 Demonstração da primeira direção

Seja M o ponto médio de:

$$AB.$$

Como P pertence à mediatriz:

$$PM \perp AB.$$

Nos triângulos:

$$\triangle AMP$$

e:

$$\triangle BMP,$$

temos:

$$AM = MB$$

porque M é ponto médio.

Também:

$$PM = PM.$$

E:

$$\widehat{AMP} = \widehat{BMP} = 90^\circ.$$

Logo, por LAL:

$$\triangle AMP \cong \triangle BMP.$$

Portanto:

$$\boxed{PA = PB.}$$

14 Segunda direção da mediatriz

Teorema 14.1: Ponto equidistante pertence à mediatriz

Se:

$$PA = PB,$$

então:

$$\boxed{P \text{ pertence à mediatriz de } AB.}$$

15 Demonstração da segunda direção

Seja M o ponto médio de AB .

Considere os triângulos:

$$\triangle APM$$

e:

$$\triangle BPM.$$

Temos:

$$PA = PB$$

por hipótese.

Também:

$$AM = MB$$

porque M é ponto médio.

E:

$$PM = PM.$$

Logo, por LLL:

$$\triangle APM \cong \triangle BPM.$$

Assim:

$$\widehat{AMP} = \widehat{BMP}.$$

Como:

$$A, M, B$$

são colineares, esses dois ângulos são suplementares:

$$\widehat{AMP} + \widehat{BMP} = 180^\circ.$$

Como possuem a mesma medida:

$$2\widehat{AMP} = 180^\circ.$$

Então:

$$\widehat{AMP} = 90^\circ.$$

Logo:

$$PM \perp AB.$$

Como M é ponto médio de AB , a reta PM é a mediatriz.

Portanto:

$$P \text{ pertence à mediatriz de } AB.$$

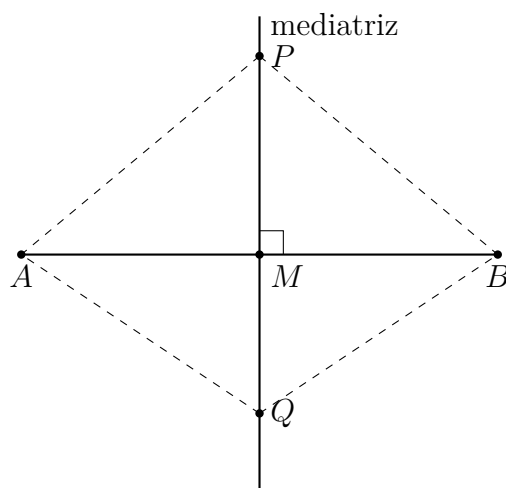
16 Caracterização completa da mediatriz

Podemos agora escrever:

$$P \in \text{med}(AB) \iff PA = PB.$$

Essa equivalência é uma das caracterizações mais importantes da Geometria elementar.

17 Representação da mediatriz como lugar geométrico



Temos:

$$PA = PB$$

e:

$$QA = QB.$$

Todos os pontos da reta possuem essa propriedade.

18 Problema de localização com duas cidades

Exemplo

Duas cidades estão representadas pelos pontos:

A

e:

B .

Deseja-se construir um hospital que fique exatamente à mesma distância das duas cidades.

Qual é o conjunto das posições possíveis?

Resolução

Queremos todos os pontos P tais que:

$$PA = PB.$$

Pela caracterização da mediatriz:

$$P \in \text{med}(AB).$$

Portanto, todas as posições possíveis estão sobre a:

$$\text{mediatriz de } AB.$$

19 Problema com uma condição adicional

Exemplo

Um ponto P deve estar:

- à mesma distância de A e B ;
- sobre uma determinada reta r .

Como encontrar P ?

Resolução

A primeira condição determina:

$$\text{med}(AB).$$

A segunda exige:

$$P \in r.$$

Portanto:

$$P$$

deve pertencer simultaneamente às duas figuras.

Assim:

$$P = r \cap \text{med}(AB),$$

desde que essa interseção exista e seja única.

20 Interseção de lugares geométricos

Definição 20.1: Interseção de condições

Quando um ponto deve satisfazer duas ou mais condições simultaneamente, procuramos a interseção dos respectivos lugares geométricos.

Em símbolos:

$$P \text{ satisfaz } \mathcal{P}_1 \text{ e } \mathcal{P}_2 \implies P \in L_1 \cap L_2.$$

21 Exemplo com duas mediatrizes

Exemplo

Queremos encontrar um ponto P que esteja à mesma distância de três pontos não colineares:

$$A, \quad B, \quad C.$$

Resolução

A condição:

$$PA = PB$$

determina a mediatriz de:

$$AB.$$

A condição:

$$PB = PC$$

determina a mediatriz de:

$$BC.$$

Portanto, P deve estar na interseção dessas duas mediatrizes.

Assim:

$$P = \text{med}(AB) \cap \text{med}(BC).$$

Como:

$$PA = PB$$

e:

$$PB = PC,$$

temos:

$$PA = PB = PC.$$

22 Circuncentro: uma aplicação

Definição 22.1: Circuncentro

O ponto de encontro das mediatrizes dos lados de um triângulo é chamado de **circuncentro**.

Se O é o circuncentro de:

$$\triangle ABC,$$

então:

$$OA = OB = OC.$$

Logo, podemos traçar uma circunferência de centro O que passa pelos três vértices.

Observação

O estudo completo dos pontos notáveis de um triângulo pertence a conteúdos posteriores. Aqui, o circuncentro aparece apenas como aplicação natural do conceito de lugar geométrico.

23 Bissetriz como lugar geométrico

Considere um ângulo:

$$\widehat{AOB}.$$

Agora procuramos todos os pontos interiores do ângulo que possuem a mesma distância dos seus dois lados.

A resposta é a bissetriz interna.

Teorema 23.1: Bissetriz interna como lugar geométrico

A bissetriz interna de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos interiores ao ângulo que estão à mesma distância de seus dois lados.

Em símbolos:

$$P \text{ está na bissetriz interna} \iff d(P, OA) = d(P, OB).$$

24 Distância entre ponto e reta

Antes de demonstrar o teorema, recordemos:

Definição 24.1: Distância de ponto a reta

A distância de um ponto P a uma reta r é o comprimento do segmento perpendicular traçado de P até r .

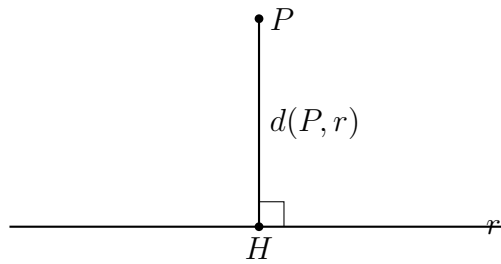
Se:

$$PH \perp r,$$

então:

$$d(P, r) = PH.$$

25 Ilustração da distância



26 Primeira direção da bissetriz

Teorema 26.1: Ponto da bissetriz é equidistante dos lados

Se P pertence à bissetriz interna de:

$$\widehat{AOB},$$

então:

$$d(P, OA) = d(P, OB).$$

27 Demonstração da primeira direção da bissetriz

Trace:

$$PH \perp OA$$

e:

$$PK \perp OB.$$

Nos triângulos:

$$\triangle OPH$$

e:

$$\triangle OPK,$$

temos:

$$OP = OP.$$

Como OP é bissetriz:

$$\widehat{HOP} = \widehat{POK}.$$

Além disso:

$$\widehat{OHP} = \widehat{OKP} = 90^\circ.$$

Logo, por AAL:

$$\triangle OPH \cong \triangle OPK.$$

Consequentemente:

$$PH = PK.$$

Portanto:

$$\boxed{d(P, OA) = d(P, OB).}$$

28 Segunda direção da bissetriz

Teorema 28.1: Ponto equidistante dos lados pertence à bissetriz

Se P é um ponto interior a:

$$\widehat{AOB}$$

e:

$$d(P, OA) = d(P, OB),$$

então:

$$\boxed{P \text{ pertence à bissetriz interna do ângulo.}}$$

29 Demonstração da segunda direção da bissetriz

Trace:

$$PH \perp OA$$

e:

$$PK \perp OB.$$

Por hipótese:

$$PH = PK.$$

Nos triângulos retângulos:

$$\triangle OPH$$

e:

$$\triangle OPK,$$

temos:

$$OP = OP$$

e:

$$PH = PK.$$

Pelo caso especial de congruência de triângulos retângulos, ou equivalentemente utilizando a igualdade da hipotenusa e de um cateto, os triângulos são congruentes.

Consequentemente:

$$\widehat{HOP} = \widehat{POK}.$$

Logo:

$$\boxed{OP \text{ é a bissetriz interna.}}$$

Observação

Se ainda não se deseja utilizar o caso específico de congruência em triângulos retângulos, essa conclusão pode ser tratada como uma propriedade geométrica decorrente da unicidade da perpendicular e da congruência dos triângulos construídos.

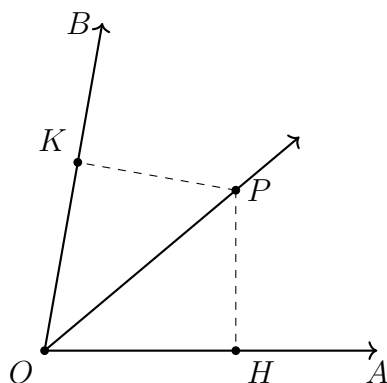
30 Caracterização completa da bissetriz

Podemos escrever:

$$\boxed{P \text{ na bissetriz interna de } \widehat{AOB} \iff d(P, OA) = d(P, OB).}$$

Essa equivalência permite transformar um problema de distâncias em um problema de construção de bissetriz.

31 Representação da bissetriz como lugar geométrico



Como:

$$PH = PK,$$

o ponto P pertence à bissetriz interna.

32 Cuidado com a bissetriz externa

Quando consideramos duas **retas completas**, e não apenas o interior de um ângulo, existem duas retas de pontos equidistantes das duas retas dadas:

- a bissetriz interna;
- a bissetriz externa.

Atenção

Neste curso, quando dissermos que “a bissetriz é o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos lados de um ângulo”, estaremos considerando os pontos **interiores ao ângulo**.

Nesse contexto, o lugar geométrico é a bissetriz interna.

33 Problema de localização com duas paredes

Exemplo

Duas paredes encontram-se formando um ângulo.

Deseja-se colocar uma luminária no interior do ângulo de modo que sua distância até as duas paredes seja a mesma.

Onde ela deve ser colocada?

Resolução

Queremos:

$$d(P, r) = d(P, s),$$

onde r e s representam as paredes.

No interior do ângulo, o lugar geométrico desses pontos é a:

bissetriz interna.

Portanto, a luminária deve estar em algum ponto da bissetriz.

34 Problema com duas condições angulares

Exemplo

Um ponto P deve:

- estar equidistante dos lados de um ângulo;
- pertencer a uma circunferência de centro O e raio r .

Como localizar as possíveis soluções?

Resolução

A primeira condição determina a bissetriz interna.

A segunda condição determina a circunferência:

$$\mathcal{C}(O, r).$$

Logo, as soluções são os pontos da interseção:

$$\text{bissetriz} \cap \mathcal{C}(O, r).$$

Dependendo da configuração, podem existir:

- nenhum ponto;
- um ponto;
- mais de um ponto no conjunto geométrico considerado.

35 Três bissetrizes de um triângulo

Em um triângulo:

$$ABC,$$

podemos construir as bissetrizes dos três ângulos internos.

Elas se encontram em um único ponto.

Definição 35.1: Incentro

O ponto de encontro das três bissetrizes internas de um triângulo é chamado de **incentro**.

Se I é o incentro:

$$d(I, AB) = d(I, BC) = d(I, CA).$$

36 Por que o incentro é equidistante dos lados?

Se I está na bissetriz de:

$$\hat{A},$$

então:

$$d(I, AB) = d(I, AC).$$

Se também está na bissetriz de:

$$\hat{B},$$

então:

$$d(I, BA) = d(I, BC).$$

Assim:

$$d(I, AB) = d(I, BC) = d(I, CA).$$

Logo, existe uma circunferência de centro I tangente aos três lados do triângulo.

Observação

Essa circunferência é chamada de circunferência inscrita. O aprofundamento desse tema pode ser realizado em cursos posteriores.

37 Circuncentro e incentro: comparação

Ponto	Interseção	Equidistância
Circuncentro	mediatrizes	vértices
Incentro	bissetrizes internas	lados

Notação

Circuncentro:

$$OA = OB = OC.$$

Incentro:

$$d(I, AB) = d(I, BC) = d(I, CA).$$

38 Lugares geométricos e construção

Muitas construções geométricas podem ser compreendidas como interseções de lugares geométricos.

Por exemplo, suponha que desejamos construir um ponto P tal que:

$$PA = 5 \text{ cm}$$

e:

$$PB = 4 \text{ cm.}$$

A primeira condição determina uma circunferência de:

centro A

e raio:

5 cm.

A segunda determina uma circunferência de:

centro B

e raio:

4 cm.

Logo, P deve ser uma interseção dessas duas circunferências.

39 Exemplo de duas circunferências

Exemplo

Queremos construir um triângulo:

$$ABC$$

tal que:

$$AB = 6 \text{ cm},$$

$$AC = 5 \text{ cm},$$

$$BC = 4 \text{ cm}.$$

Como localizar C ?

Resolução

A condição:

$$AC = 5$$

determina uma circunferência de centro A e raio 5.

A condição:

$$BC = 4$$

determina uma circunferência de centro B e raio 4.

Logo:

$$C \in \mathcal{C}(A, 5) \cap \mathcal{C}(B, 4).$$

Escolhendo uma interseção, obtemos o terceiro vértice.

40 Número de soluções

Quando utilizamos lugares geométricos, o número de soluções depende do número de pontos de interseção.

Podemos ter:

$$0 \text{ soluções}$$

quando não há interseção;

1 solução

quando existe apenas um ponto comum;

ou:

2 ou mais soluções

dependendo dos lugares geométricos envolvidos.

41 Exemplo: mediatriz e circunferência

Considere:

- um segmento AB ;
- uma circunferência de centro O .

Queremos pontos que:

$$PA = PB$$

e que também pertençam à circunferência.

A primeira condição fornece:

$$\text{med}(AB).$$

A segunda fornece:

$$\mathcal{C}.$$

Logo:

$P \in \text{med}(AB) \cap \mathcal{C}.$

42 Distância fixa de uma reta: ampliação

Considere uma reta r .

Quais pontos estão a uma distância fixa $d > 0$ de r ?

São duas retas paralelas a r , uma de cada lado, ambas a distância d .

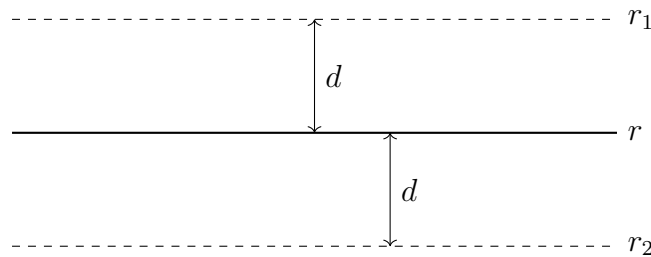
Teorema 42.1: Pontos a distância fixa de uma reta

O lugar geométrico dos pontos do plano que estão a uma distância fixa $d > 0$ de uma reta r é formado por duas retas paralelas a r , cada uma a distância d .

Observação

Esse resultado é uma ampliação do conceito central do curso e ajuda a perceber que diferentes condições produzem diferentes figuras geométricas.

43 Ilustração: distância fixa de uma reta



44 Condição “mais perto de A que de B”

A mediatriz também separa o plano em duas regiões.

Para pontos de um lado da mediatriz:

$$PA < PB.$$

Para pontos do outro lado:

$$PB < PA.$$

Sobre a própria mediatriz:

$$PA = PB.$$

Observação

Essa ideia é importante em problemas de regiões de influência e constitui uma introdução intuitiva a estruturas geométricas mais avançadas, como diagramas de Voronoi.

45 Exemplo de região de influência

Exemplo

Duas unidades de atendimento estão localizadas nos pontos A e B .
Uma pessoa deseja utilizar sempre a unidade mais próxima.
Que papel a mediatriz de AB desempenha?

Resolução

A mediatriz divide o plano em duas regiões.
De um lado:

$$PA < PB,$$

portanto A é mais próximo.

Do outro:

$$PB < PA,$$

portanto B é mais próximo.

Sobre a mediatriz:

$$PA = PB.$$

Assim, a mediatriz é a:

fronteira de equidistância entre A e B .

46 Algoritmo para resolver problemas de lugares geométricos

Notação

Ao resolver um problema:

- 1) identifique a condição exigida;
- 2) traduza a condição em um lugar geométrico conhecido;
- 3) faça isso para todas as condições;
- 4) determine a interseção dos lugares geométricos;
- 5) verifique se os pontos encontrados satisfazem todas as condições;
- 6) analise o número de soluções.

47 Tabela de traduções úteis

Condição	Lugar geométrico
$PO = r$	circunferência de centro O e raio r
$PA = PB$	mediatriz de AB
distâncias iguais aos lados de um ângulo	bissetriz interna
distância d de uma reta	duas paralelas à reta
duas condições simultâneas	interseção dos lugares

48 Problema completo de localização

Exemplo

Três pontos A , B e C , não colineares, representam três torres.
Deseja-se instalar um equipamento à mesma distância das três torres.
Como determinar sua posição?

Resolução

Queremos:

$$PA = PB = PC.$$

Primeiro:

$$PA = PB$$

determina a mediatriz de:

$$AB.$$

Depois:

$$PB = PC$$

determina a mediatriz de:

$$BC.$$

O ponto procurado é a interseção:

$$P = \text{med}(AB) \cap \text{med}(BC).$$

Pela transitividade:

$$PA = PB$$

e:

$$PB = PC$$

implicam:

$$PA = PC.$$

Logo:

$$\boxed{PA = PB = PC.}$$

Portanto, P é o circuncentro do triângulo ABC .

49 Problema completo com lados de um triângulo

Exemplo

Deseja-se localizar um ponto interior a um triângulo que esteja à mesma distância dos três lados.

Como encontrá-lo?

Resolução

Para estar à mesma distância dos lados:

$$AB$$

e:

$$AC,$$

o ponto deve pertencer à bissetriz de:

$$\hat{A}.$$

Para estar à mesma distância dos lados:

$$AB$$

e:

$$BC,$$

deve pertencer à bissetriz de:

$$\hat{B}.$$

Portanto, o ponto procurado é a interseção dessas bissetrizes.

Logo:

P é o incentro do triângulo.

50 Erros comuns

Atenção

Erro 1: pensar que um único ponto constitui necessariamente o lugar geométrico. O lugar geométrico é o conjunto de **todos** os pontos que satisfazem a condição.

Atenção

Erro 2: provar apenas uma direção.

Para caracterizar rigorosamente um lugar geométrico, precisamos geralmente mostrar:

$$A \implies B$$

e:

$$B \implies A.$$

Atenção

Erro 3: dizer que a mediatriz é apenas uma reta perpendicular a AB .
Ela deve também passar pelo:

ponto médio de AB .

Atenção

Erro 4: medir a distância de um ponto a uma reta por qualquer segmento.
A distância é o comprimento do segmento:

perpendicular à reta.

Atenção

Erro 5: confundir:

$$PO = r$$

com:

$$PO \leq r.$$

A primeira condição define uma circunferência.
A segunda define um disco fechado.

Atenção

Erro 6: esquecer de intersectar as condições.
Se um ponto deve satisfazer duas propriedades ao mesmo tempo, ele deve pertencer:

aos dois lugares geométricos simultaneamente.

Atenção

Erro 7: afirmar que todos os pontos equidistantes de duas retas concorrentes pertencem apenas à bissetriz interna.
Considerando as retas completas, existem bissetrizes interna e externa.
Para o interior de um ângulo, usamos a bissetriz interna.

51 Resumo teórico

Lugar geométrico	Condição	Caracterização
Circunferência	distância fixa a um ponto	$PO = r$
Mediatriz	equidistância de dois pontos	$PA = PB$
Bissetriz interna	equidistância de dois lados	$d_1 = d_2$
Paralelas	distância fixa a uma reta	$d(P, r) = k$

Notação

Lugar geométrico:

$$L = \{P \mid P \text{ satisfaz determinada condição}\}.$$

Mediatriz:

$$P \in \text{med}(AB) \iff PA = PB.$$

Bissetriz interna:

$$P \in \text{bis}(\widehat{AOB}) \iff d(P, OA) = d(P, OB),$$

para P interior ao ângulo.

Circunferência:

$$P \in \mathcal{C}(O, r) \iff PO = r.$$

Várias condições:

$$P \in L_1 \quad \text{e} \quad P \in L_2 \iff P \in L_1 \cap L_2.$$

52 Exercícios

52.1 Parte A – Conceito

Exercício

Responda:

- O que é um lugar geométrico?
- Por que devemos procurar todos os pontos que satisfazem uma condição?
- O que significa:

$$A \iff B?$$

d) Por que provar apenas:

$$A \implies B$$

pode não ser suficiente?

52.2 Parte B – Identificação

Exercício

Identifique o lugar geométrico.

a) pontos P tais que:

$$PO = 5 \text{ cm};$$

b) pontos P tais que:

$$PA = PB;$$

c) pontos interiores a um ângulo que estão à mesma distância dos dois lados;

d) pontos cuja distância a uma reta r é 3 cm.

52.3 Parte C – Mediatriz

Exercício

Complete:

$$P \in \text{med}(AB) \iff \underline{\hspace{2cm}}.$$

Explique o significado geométrico dessa equivalência.

52.4 Parte D – Propriedade da mediatriz

Exercício

O ponto P pertence à mediatriz de AB .

Determine x .

a)

$$PA = 2x + 7, \quad PB = 21;$$

b)

$$PA = 5x - 4, \quad PB = 3x + 12;$$

c)

$$PA = 7x - 8, \quad PB = 34.$$

52.5 Parte E – Recíproca

Exercício

Sabemos que:

$$PA = PB.$$

O que podemos concluir sobre P ?

Justifique utilizando a linguagem de lugar geométrico.

52.6 Parte F – Bissetriz

Exercício

Complete:

$$P \in \text{bis}(\widehat{AOB}) \iff \underline{\hspace{4cm}},$$

considerando P interior ao ângulo.

52.7 Parte G – Distâncias à bissetriz

Exercício

Um ponto P pertence à bissetriz interna de um ângulo.

As distâncias aos lados são:

$$PH = 3x + 2$$

e:

$$PK = 5x - 12.$$

Determine x .

52.8 Parte H – Interseção de lugares

Exercício

Descreva geometricamente como encontrar um ponto P que satisfaça simultaneamente:

$$PA = PB$$

e:

$$PO = 4 \text{ cm.}$$

Exercício

Como encontrar um ponto equidistante de três pontos não colineares:

$$A, B, C?$$

52.9 Parte I – Aplicações

Exercício

Duas cidades A e B devem ser atendidas por um depósito que fique à mesma distância das duas.

Qual é o lugar geométrico das possíveis localizações?

Exercício

Duas ruas formam um ângulo.

Deseja-se instalar uma placa dentro do ângulo, à mesma distância das duas ruas.

Qual lugar geométrico deve ser utilizado?

Exercício

Um equipamento deve estar a exatamente 10 m de um ponto O .

Qual é o lugar geométrico das possíveis posições?

52.10 Parte J – Desafios

Exercício

Explique como construir um ponto que esteja:

- à mesma distância de A e B ;
- a exatamente 6 cm de C .

Exercício

Explique por que o circuncentro de um triângulo está à mesma distância dos três vértices.

Exercício

Explique por que o incentro de um triângulo está à mesma distância dos três lados.

53 Gabarito comentado

53.1 Parte A

Resolução

- a) Um lugar geométrico é o conjunto de todos os pontos que satisfazem determinada condição geométrica.
- b) Porque um lugar geométrico deve caracterizar o conjunto completo de soluções, e não apenas apresentar exemplos particulares.
- c) Significa que:

$$A \implies B$$

e também:

$$B \implies A.$$

- d) Porque podem existir pontos fora do conjunto proposto que também satisfazem a condição. A recíproca garante que não estamos deixando soluções de fora.

53.2 Parte B

Resolução

- a) Circunferência de centro O e raio 5 cm.
- b) Mediatriz do segmento:
 AB .
- c) Bissetriz interna do ângulo.
- d) Duas retas paralelas a r , uma de cada lado, a 3 cm de distância.

53.3 Parte C

Resolução

A equivalência é:

$$P \in \text{med}(AB) \iff PA = PB.$$

Isso significa que:

- todo ponto da mediatriz está à mesma distância de A e B ;
- todo ponto que está à mesma distância de A e B pertence à mediatriz.

53.4 Parte D

Resolução

Como P pertence à mediatriz:

$$PA = PB.$$

a)

$$2x + 7 = 21.$$

$$2x = 14.$$

Logo:

$$\boxed{x = 7.}$$

b)

$$5x - 4 = 3x + 12.$$

$$2x = 16.$$

Logo:

$$\boxed{x = 8.}$$

c)

$$7x - 8 = 34.$$

$$7x = 42.$$

Logo:

$$\boxed{x = 6.}$$

53.5 Parte E

Resolução

Se:

$$PA = PB,$$

então P satisfaz exatamente a condição que caracteriza a mediatriz.

Logo:

$$P \in \text{med}(AB).$$

53.6 Parte F

Resolução

Para um ponto interior ao ângulo:

$$P \in \text{bis}(\widehat{AOB}) \iff d(P, OA) = d(P, OB).$$

53.7 Parte G

Resolução

Como P pertence à bissetriz:

$$PH = PK.$$

Logo:

$$3x + 2 = 5x - 12.$$

Somando 12:

$$3x + 14 = 5x.$$

Então:

$$14 = 2x.$$

Portanto:

$$x = 7.$$

53.8 Parte H

Resolução

1.

A condição:

$$PA = PB$$

determina a mediatriz de AB .

A condição:

$$PO = 4 \text{ cm}$$

determina a circunferência de centro O e raio 4 cm.

Logo, as soluções são:

$$\text{med}(AB) \cap \mathcal{C}(O, 4).$$

2.

Construímos, por exemplo:

$$\text{med}(AB)$$

e:

$$\text{med}(BC).$$

A interseção é o ponto P .

Então:

$$PA = PB$$

e:

$$PB = PC.$$

Logo:

$$PA = PB = PC.$$

53.9 Parte I

Resolução

1.

As posições equidistantes das cidades pertencem à:

$$\text{mediatriz de } AB.$$

2.

No interior do ângulo formado pelas ruas, as posições equidistantes pertencem à:

$$\text{bissetriz interna.}$$

3.

Os pontos a exatamente 10 m de O formam uma:

$$\text{circunferência de centro } O \text{ e raio } 10 \text{ m.}$$

53.10 Parte J

Resolução

1.

A condição:

$$PA = PB$$

gera a mediatriz de AB .

A condição:

$$PC = 6$$

gera uma circunferência de centro C e raio 6.

As soluções são os pontos de interseção:

$$\text{med}(AB) \cap \mathcal{C}(C, 6).$$

2.

O circuncentro pertence às mediatrizes dos lados.

Assim:

$$OA = OB$$

e:

$$OB = OC.$$

Portanto:

$$OA = OB = OC.$$

3.

O incentro pertence às bissetrizes internas.

Logo, pela propriedade da bissetriz, suas distâncias aos lados correspondentes são iguais.

Portanto:

$$d(I, AB) = d(I, BC) = d(I, CA).$$

54 Avaliação final

Avaliação final – Lugares geométricos

Resolva as questões abaixo.

1. Defina lugar geométrico.
2. Explique por que uma caracterização de lugar geométrico geralmente exige uma propriedade e sua recíproca.

3. Qual é o lugar geométrico dos pontos P tais que:

$$PO = 7 \text{ cm?}$$

4. Complete:

$$P \in \text{med}(AB) \iff \underline{\hspace{2cm}}.$$

5. Demonstre que um ponto pertencente à mediatriz de AB é equidistante de A e B .

6. Complete, para P interior ao ângulo:

$$P \in \text{bis}(\widehat{AOB}) \iff \underline{\hspace{2cm}}.$$

7. Um ponto P pertence à mediatriz de AB . Se:

$$PA = 4x + 1$$

e:

$$PB = 29,$$

determine x .

8. Um ponto P pertence à bissetriz de um ângulo e suas distâncias aos lados são:

$$2x + 5$$

e:

$$4x - 9.$$

Determine x .

9. Explique como localizar um ponto à mesma distância de três pontos não colineares.

10. Um ponto deve satisfazer simultaneamente:

$$PA = PB$$

e:

$$PC = 5 \text{ cm}.$$

Descreva geometricamente como determinar todas as possíveis soluções.

54.1 Gabarito da avaliação final

Resolução

1. Um lugar geométrico é o conjunto de todos os pontos do plano que satisfazem determinada condição geométrica.

2. Porque precisamos garantir simultaneamente que:

todo ponto do conjunto satisfaz a condição

e que:

todo ponto que satisfaz a condição pertence ao conjunto.

3. :

circunferência de centro O e raio 7 cm.

4. :

$$P \in \text{med}(AB) \iff PA = PB.$$

5. Seja M o ponto médio de AB .

Como P está na mediatriz:

$$PM \perp AB.$$

Nos triângulos:

$$\triangle AMP$$

e:

$$\triangle BMP,$$

temos:

$$AM = MB,$$

$$PM = PM,$$

e:

$$\widehat{AMP} = \widehat{BMP} = 90^\circ.$$

Logo, por LAL:

$$\triangle AMP \cong \triangle BMP.$$

Portanto:

$$PA = PB.$$

6. :

$$P \in \text{bis}(\widehat{AOB}) \iff d(P, OA) = d(P, OB).$$

7. Como:

$$PA = PB,$$

temos:

$$4x + 1 = 29.$$

$$4x = 28.$$

Portanto:

$$\boxed{x = 7.}$$

8. As distâncias são iguais:

$$2x + 5 = 4x - 9.$$

Somando 9:

$$2x + 14 = 4x.$$

Logo:

$$14 = 2x.$$

Portanto:

$$\boxed{x = 7.}$$

9. Construimos duas mediatrizes dos lados do triângulo formado pelos três pontos.

Por exemplo:

$$\text{med}(AB)$$

e:

$$\text{med}(BC).$$

Sua interseção O satisfaz:

$$OA = OB$$

e:

$$OB = OC.$$

Logo:

$$OA = OB = OC.$$

10. A condição:

$$PA = PB$$

determina:

$$\text{med}(AB).$$

A condição:

$$PC = 5 \text{ cm}$$

determina a circunferência:

$$\mathcal{C}(C, 5).$$

Portanto, todas as soluções estão em:

$$\text{med}(AB) \cap \mathcal{C}(C, 5).$$

55 Conclusão

O conceito de lugar geométrico transforma condições geométricas em conjuntos de pontos bem definidos.

Essa maneira de pensar permite resolver problemas de localização, construção e equidistância de forma sistemática.

As principais ideias estudadas foram:

- 1) um lugar geométrico é o conjunto de todos os pontos que satisfazem uma condição;
- 2) caracterizações completas normalmente exigem uma propriedade e sua recíproca;
- 3) a circunferência é o lugar geométrico dos pontos a uma distância fixa de um ponto;
- 4) a mediatriz é o lugar geométrico dos pontos equidistantes das extremidades de um segmento;
- 5) portanto:

$$P \in \text{med}(AB) \iff PA = PB;$$

- 6) a bissetriz interna é o lugar geométrico dos pontos interiores equidistantes dos lados de um ângulo;

7) portanto:

$$P \in \text{bis}(\widehat{AOB}) \iff d(P, OA) = d(P, OB);$$

8) quando existem várias condições simultâneas, procuramos a interseção dos lugares geométricos;

9) a interseção das mediatrizes permite localizar pontos equidistantes dos vértices de um triângulo;

10) a interseção das bissetrizes permite localizar pontos equidistantes dos lados de um triângulo;

11) lugares geométricos fornecem uma linguagem poderosa para resolver problemas de construção e localização.

Notação

Resumo fundamental:

lugar geométrico = todos os pontos que satisfazem uma condição.

Circunferência:

$$PO = r.$$

Mediatriz:

$$P \in \text{med}(AB) \iff PA = PB.$$

Bissetriz interna:

$$P \in \text{bis}(\widehat{AOB}) \iff d(P, OA) = d(P, OB).$$

Várias condições:

$$P \in L_1 \cap L_2.$$

Assim:

condições geométricas $\implies$ lugares geométricos $\implies$ interseções $\implies$ soluções.

Fim do curso