

Construções Geométricas

Matemática – 8º Ano

Ângulos de 90° , 60° , 45° , 30° e polígonos regulares

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste curso, o estudante deverá ser capaz de:

- 1) compreender o significado de uma construção geométrica exata;
- 2) reconhecer as funções da régua não graduada e do compasso;
- 3) transportar comprimentos com o compasso;
- 4) construir segmentos congruentes;
- 5) construir um triângulo equilátero;
- 6) construir exatamente um ângulo de:
 60° ;
- 7) construir uma reta perpendicular e um ângulo de:
 90° ;
- 8) dividir geometricamente um ângulo em duas partes iguais;
- 9) construir ângulos de:
 45°
e:
 30° ;
- 10) combinar construções para obter outros ângulos;
- 11) compreender o conceito de polígono regular;
- 12) determinar o ângulo central de um polígono regular;
- 13) determinar o ângulo interno de um polígono regular;
- 14) construir triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares;
- 15) compreender por que, no hexágono regular inscrito, o lado possui a mesma medida que o raio da circunferência;
- 16) elaborar e interpretar algoritmos para construções geométricas;
- 17) representar a construção de um hexágono regular por meio de um fluxograma;
- 18) justificar matematicamente as construções realizadas.

Sumário

1	Introdução	1
2	Construções com régua e compasso	1
3	Operações geométricas fundamentais	1
4	Circunferência como conjunto de pontos equidistantes	2
5	Transporte de comprimentos	2
6	Construção do triângulo equilátero	3
7	Procedimento para o triângulo equilátero	3
8	Ilustração do triângulo equilátero	4
9	Justificativa da construção	4
10	Ângulos do triângulo equilátero	5
11	Construção de um ângulo de 60°	5
12	Construção prática de 60°	6
13	Retas perpendiculares	6
14	Construção de uma perpendicular por um ponto da reta	7
15	Algoritmo da perpendicular	7
16	Ilustração da perpendicular	7
17	Justificativa da perpendicular	8
18	Construção de um ângulo de 90°	9
19	Divisão de um ângulo em duas partes iguais	9
20	Construção da bissetriz	9
21	Justificativa da bissetriz	10

22 Construção do ângulo de 45°	11
23 Construção do ângulo de 30°	11
24 Construção sucessiva de ângulos	12
25 Ângulos suplementares	12
26 Resumo das construções angulares	13
27 Polígonos	13
28 Polígono regular	13
29 Circunferência circunscrita	14
30 Ângulo central de um polígono regular	14
31 Exemplos de ângulos centrais	15
32 Soma dos ângulos internos	15
33 Justificativa da fórmula	15
34 Ângulo interno do polígono regular	15
35 Relação entre ângulo central e externo	16
36 Exemplo: hexágono regular	16
37 Construção do hexágono regular	17
38 Demonstração da propriedade do hexágono	17
39 Algoritmo para construir o hexágono regular	18
40 Ilustração do hexágono regular	19
41 Fluxograma para construção do hexágono	20
42 Construção do triângulo equilátero a partir do hexágono	20
43 Construção do quadrado inscrito	21

44 Ilustração do quadrado inscrito	21
45 Construção de um octógono regular	22
46 Construção de um dodecágono regular	22
47 Construção de um polígono regular pelo ângulo central	22
48 Exemplo: octógono regular	23
49 Exemplo: dodecágono regular	23
50 Um cuidado importante	24
51 Ângulos internos de polígonos regulares	24
52 Outro exemplo	25
53 Descobrindo o número de lados pelo ângulo central	25
54 Descobrindo o número de lados pelo ângulo externo	26
55 Perímetro de um polígono regular	27
56 Perímetro do hexágono inscrito	27
57 Construção e demonstração	28
58 Exemplo completo: construir 30°	28
59 Erros comuns	29
60 Resumo teórico	31
61 Exercícios	32
61.1 Parte A – Conceitos fundamentais	32
61.2 Parte B – Triângulo equilátero	32
61.3 Parte C – Construção de ângulos	32
61.4 Parte D – Combinação de ângulos	33
61.5 Parte E – Polígonos regulares	33
61.6 Parte F – Ângulos internos	33
61.7 Parte G – Descobrir o número de lados	34

61.8 Parte H – Hexágono regular	34
61.9 Parte I – Construções	34
61.10Parte J – Justificativas	35
62 Gabarito comentado	35
62.1 Parte A	35
62.2 Parte B	35
62.3 Parte C	36
62.4 Parte D	36
62.5 Parte E	37
62.6 Parte F	37
62.7 Parte G	38
62.8 Parte H	39
62.9 Parte I	39
62.10Parte J	40
63 Avaliação final	41
63.1 Gabarito da avaliação final	42
64 Conclusão	44

1 Introdução

Construir uma figura geométrica não significa apenas desenhá-la aproximadamente.

Na Geometria clássica, uma **construção geométrica** deve utilizar propriedades matemáticas que garantam exatamente as medidas desejadas.

Por exemplo, desenhar “a olho” um ângulo que pareça medir:

60°

não constitui uma construção geométrica rigorosa.

Em contrapartida, podemos construir um triângulo equilátero e utilizar a propriedade de que seus três ângulos internos medem exatamente:

60° .

Assim, a própria geometria garante a medida obtida.

2 Construções com régua e compasso

Definição 2.1: Construção com régua e compasso

Uma construção clássica com régua e compasso é um procedimento geométrico realizado por meio de:

- uma régua idealizada para traçar retas;
- um compasso para traçar circunferências e transportar distâncias.

Observação

Na concepção clássica, a régua é considerada **não graduada**: sua função fundamental é traçar retas por pontos conhecidos.

O compasso é responsável pela transferência exata de comprimentos.

3 Operações geométricas fundamentais

Com régua e compasso podemos realizar operações como:

- 1) traçar uma reta por dois pontos;
- 2) prolongar um segmento;
- 3) construir uma circunferência de centro e raio conhecidos;
- 4) transportar a medida de um segmento;

- 5) localizar interseções entre retas e circunferências;
- 6) construir retas perpendiculares;
- 7) dividir certos ângulos em partes iguais;
- 8) construir polígonos regulares específicos.

4 Circunferência como conjunto de pontos equidistantes

Definição 4.1: Circunferência

Dado um ponto O e um número positivo r , a circunferência de centro O e raio r é o conjunto dos pontos P do plano tais que:

$$OP = r.$$

Essa propriedade é essencial para construções geométricas.

Se abrimos o compasso com medida r e traçamos uma circunferência de centro O , todos os pontos obtidos possuem exatamente a distância:

$$r$$

do centro.

5 Transporte de comprimentos

Suponha que temos um segmento:

$$AB$$

e desejamos construir, a partir de um ponto C , outro segmento com a mesma medida.

Procedimento:

- 1) abra o compasso com a distância:

$$AB;$$

- 2) mantenha a abertura;
- 3) coloque a ponta seca do compasso em C ;
- 4) marque um ponto D ;
- 5) então:

$$CD = AB.$$

Notação

O compasso permite transportar a igualdade:

$$AB = CD.$$

6 Construção do triângulo equilátero

Definição 6.1: Triângulo equilátero

Um triângulo é **equilátero** quando seus três lados possuem a mesma medida.

Queremos construir um triângulo equilátero a partir de um segmento:

$$AB.$$

7 Procedimento para o triângulo equilátero

Notação

Construção:

1) trace o segmento:

$$AB;$$

2) abra o compasso com raio:

$$AB;$$

3) trace uma circunferência de centro A ;

4) sem alterar a abertura, trace uma circunferência de centro B ;

5) escolha um ponto de interseção C das duas circunferências;

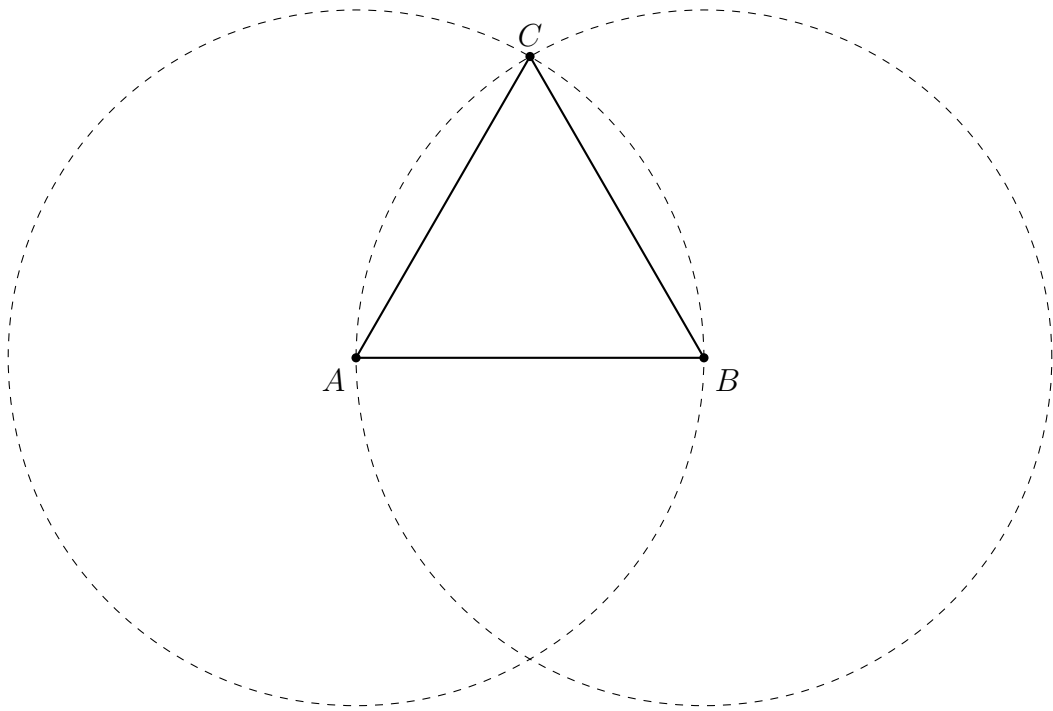
6) trace:

$$AC$$

e:

$$BC.$$

8 Ilustração do triângulo equilátero



9 Justificativa da construção

Como C pertence à circunferência de centro A e raio AB :

$$AC = AB.$$

Como C também pertence à circunferência de centro B e raio AB :

$$BC = AB.$$

Logo:

$$AB = AC = BC.$$

Portanto:

$\triangle ABC$ é equilátero.

10 Ângulos do triângulo equilátero

Teorema 10.1: Ângulos do triângulo equilátero

Todo triângulo equilátero possui três ângulos internos de mesma medida e cada um deles mede:

$$60^\circ.$$

Demonstração.

Em um triângulo equilátero, os três lados são congruentes.

Consequentemente, os três ângulos internos são congruentes.

Se cada um mede x , então:

$$x + x + x = 180^\circ.$$

Logo:

$$3x = 180^\circ.$$

Portanto:

$$x = 60^\circ.$$

11 Construção de um ângulo de 60°

Podemos utilizar diretamente a construção do triângulo equilátero.

Se construirmos:

$$\triangle ABC$$

equilátero, então:

$$\widehat{BAC} = 60^\circ.$$

Logo, as semirretas:

$$\overrightarrow{AB}$$

e:

$$\overrightarrow{AC}$$

formam um ângulo de:

$$60^\circ.$$

12 Construção prática de 60°

Exemplo

Construa um ângulo de 60° com vértice A .

Resolução

1) trace uma semirreta:

$$\overrightarrow{AB};$$

2) escolha uma abertura qualquer do compasso igual a AB ;

3) trace um arco de centro A ;

4) mantendo a mesma abertura, trace outro arco de centro B ;

5) marque a interseção como C ;

6) trace:

$$\overrightarrow{AC}.$$

Como:

$$AB = AC = BC,$$

o triângulo é equilátero.

Logo:

$$\widehat{BAC} = 60^\circ.$$

13 Retas perpendiculares

Definição 13.1: Retas perpendiculares

Duas retas são **perpendiculares** quando se intersectam formando quatro ângulos retos.

Se:

$$r \perp s,$$

cada ângulo formado mede:

$$90^\circ.$$

14 Construção de uma perpendicular por um ponto da reta

Considere uma reta r e um ponto:

$$P \in r.$$

Queremos construir uma reta perpendicular a r passando por P .

15 Algoritmo da perpendicular

Notação

1) com centro em P , trace um arco que intercepte r em dois pontos A e B ;

2) assim:

$$PA = PB;$$

3) com centros em A e B , e utilizando a mesma abertura do compasso suficientemente grande, trace dois arcos que se intersectem em C ;

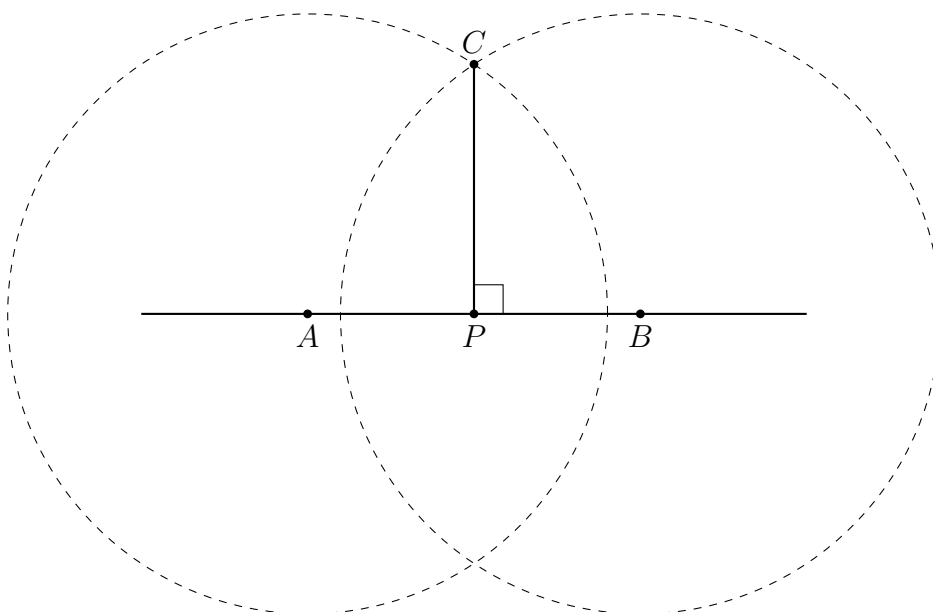
4) trace a reta:

$$PC.$$

Então:

$$PC \perp AB.$$

16 Ilustração da perpendicular



17 Justificativa da perpendicular

Temos:

$$PA = PB,$$

pois A e B foram obtidos com o mesmo arco de centro P .

Também:

$$CA = CB,$$

pois C é interseção de arcos com raios iguais e centros A e B .

Nos triângulos:

$$\triangle APC$$

e:

$$\triangle BPC,$$

temos:

$$PA = PB,$$

$$AC = BC,$$

e:

$$PC = PC.$$

Logo, por LLL:

$$\triangle APC \cong \triangle BPC.$$

Portanto:

$$\widehat{APC} = \widehat{CPB}.$$

Como esses ângulos são adjacentes sobre uma reta:

$$\widehat{APC} + \widehat{CPB} = 180^\circ.$$

Sendo iguais:

$$2\widehat{APC} = 180^\circ.$$

Logo:

$$\widehat{APC} = 90^\circ.$$

Portanto:

$$PC \perp AB.$$

18 Construção de um ângulo de 90°

Uma vez construída a perpendicular:

$$PC \perp AB,$$

temos imediatamente:

$$\widehat{BPC} = 90^\circ.$$

Assim, construir um ângulo reto equivale a construir duas semirretas perpendiculares.

19 Divisão de um ângulo em duas partes iguais

Para construir ângulos de:

$$45^\circ$$

e:

$$30^\circ,$$

precisamos dividir um ângulo ao meio.

Essa construção corresponde à construção da **bissetriz** do ângulo, conceito que será aprofundado no próximo curso.

Definição 19.1: Bissetriz de um ângulo

A bissetriz de um ângulo é a semirreta que o divide em dois ângulos de mesma medida.

20 Construção da bissetriz

Considere:

$$\widehat{AOB}.$$

Procedimento:

- 1) com centro em O , trace um arco que intercepte as semirretas em C e D ;
- 2) mantendo a mesma abertura do compasso, trace arcos de centros C e D ;
- 3) marque uma interseção desses arcos como E ;
- 4) trace:

$$\overrightarrow{OE}.$$

Então:

$$\boxed{\widehat{AOE} = \widehat{EOB}.}$$

21 Justificativa da bissetriz

Pela construção:

$$OC = OD.$$

Também:

$$CE = DE.$$

E:

$$OE = OE.$$

Portanto:

$$\triangle OCE \cong \triangle ODE$$

por LLL.

Logo:

$$\widehat{COE} = \widehat{EOD}.$$

Assim:

$$\boxed{OE \text{ é bissetriz do ângulo.}}$$

22 Construção do ângulo de 45°

Sabemos que:

$$90^\circ$$

pode ser construído por meio de retas perpendiculares.

Agora dividimos esse ângulo em duas partes iguais.

$$\frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

Logo:

$$45^\circ = \frac{90^\circ}{2}.$$

Notação

Procedimento:

$$90^\circ \longrightarrow \text{bissetriz} \longrightarrow 45^\circ.$$

23 Construção do ângulo de 30°

Primeiro construímos:

$$60^\circ$$

por meio de um triângulo equilátero.

Depois construímos sua bissetriz.

Como:

$$\frac{60^\circ}{2} = 30^\circ,$$

obtemos:

$$30^\circ.$$

Notação

$$60^\circ \longrightarrow \text{bissetriz} \longrightarrow 30^\circ.$$

24 Construção sucessiva de ângulos

Podemos combinar ângulos já construídos.

Por exemplo:

$$30^\circ + 45^\circ = 75^\circ.$$

Também:

$$45^\circ + 45^\circ = 90^\circ.$$

$$60^\circ + 30^\circ = 90^\circ.$$

$$60^\circ + 45^\circ = 105^\circ.$$

$$90^\circ + 45^\circ = 135^\circ.$$

Observação

A construção deve preservar exatamente os ângulos envolvidos. Não basta apenas somar numericamente; é necessário transportar e posicionar geometricamente as semirretas.

25 Ângulos suplementares

Se um ângulo mede:

$$\alpha,$$

seu suplemento mede:

$$180^\circ - \alpha.$$

Assim, a partir dos ângulos construídos, podemos obter:

$$180^\circ - 30^\circ = 150^\circ,$$

$$180^\circ - 45^\circ = 135^\circ,$$

$$180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

26 Resumo das construções angulares

Ângulo	Construção fundamental
60°	triângulo equilátero
90°	retas perpendiculares
45°	bissetriz de 90°
30°	bissetriz de 60°
120°	suplemento de 60°
135°	suplemento de 45°
150°	suplemento de 30°

27 Polígonos

Definição 27.1: Polígono

Um **polígono** é uma figura plana fechada formada por uma sequência de segmentos de reta que se encontram apenas em seus extremos consecutivos.

Alguns exemplos são:

triângulo,

quadrilátero,

pentágono,

hexágono.

28 Polígono regular

Definição 28.1: Polígono regular

Um polígono é **regular** quando:

- 1) todos os seus lados possuem a mesma medida;
- 2) todos os seus ângulos internos possuem a mesma medida.

Exemplos:

triângulo equilátero,

quadrado,

pentágono regular,

hexágono regular.

29 Circunferência circunscrita

Todo polígono regular pode ser inscrito em uma circunferência.

Isso significa que todos os seus vértices pertencem a uma mesma circunferência.

O centro dessa circunferência é também o centro do polígono regular.

Definição 29.1: Ângulo central

Em um polígono regular inscrito em uma circunferência, o **ângulo central** é o ângulo formado por dois raios que ligam o centro a dois vértices consecutivos.

30 Ângulo central de um polígono regular

Uma volta completa corresponde a:

$$360^\circ.$$

Se um polígono regular possui:

$$n$$

lados, os n ângulos centrais possuem a mesma medida.

Portanto:

$$\theta_c = \frac{360^\circ}{n}.$$

Teorema 30.1: Ângulo central

O ângulo central de um polígono regular de n lados mede:

$$\frac{360^\circ}{n}.$$

31 Exemplos de ângulos centrais

Polígono	n	Ângulo central
Triângulo equilátero	3	120°
Quadrado	4	90°
Pentágono regular	5	72°
Hexágono regular	6	60°
Octógono regular	8	45°
Dodecágono regular	12	30°

32 Soma dos ângulos internos

Teorema 32.1: Soma dos ângulos internos de um polígono

A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é:

$$S = (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

33 Justificativa da fórmula

Escolha um vértice de um polígono convexo de n lados.

A partir desse vértice, podemos dividir o polígono em:

$$n - 2$$

triângulos.

Cada triângulo possui soma angular:

$$180^\circ.$$

Logo:

$$S = (n - 2)180^\circ.$$

34 Ângulo interno do polígono regular

Como todos os ângulos internos são iguais, dividimos a soma por:

n .

Assim:

$$\theta_i = \frac{(n-2)180^\circ}{n}.$$

Teorema 34.1: Ângulo interno regular

Cada ângulo interno de um polígono regular de n lados mede:

$$\theta_i = \frac{(n-2)180^\circ}{n}.$$

35 Relação entre ângulo central e externo

Em um polígono regular, o ângulo externo mede:

$$\frac{360^\circ}{n}.$$

Portanto:

$$\theta_e = \theta_c.$$

Além disso:

$$\theta_i + \theta_e = 180^\circ.$$

Assim:

$$\theta_i = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}.$$

36 Exemplo: hexágono regular

Para:

$$n = 6,$$

o ângulo central é:

$$\theta_c = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ.$$

O ângulo interno é:

$$\theta_i = \frac{(6 - 2)180^\circ}{6}.$$

Logo:

$$\theta_i = \frac{720^\circ}{6} = 120^\circ.$$

Portanto:

$$\boxed{\theta_c = 60^\circ}$$

e:

$$\boxed{\theta_i = 120^\circ}.$$

37 Construção do hexágono regular

O hexágono regular possui uma propriedade especialmente conveniente.

Teorema 37.1: Lado do hexágono regular inscrito

Em um hexágono regular inscrito em uma circunferência, o comprimento de cada lado é igual ao raio da circunferência.

38 Demonstração da propriedade do hexágono

Considere dois vértices consecutivos:

A

e:

B

de um hexágono regular inscrito em uma circunferência de centro O .

O ângulo central é:

$$\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ.$$

Como:

$$OA = OB = r,$$

o triângulo AOB é isósceles.

Se o ângulo do vértice mede:

$$60^\circ,$$

os outros dois ângulos somam:

$$120^\circ$$

e, sendo iguais, medem:

$$60^\circ$$

cada.

Logo, $\triangle AOB$ é equilátero.

Portanto:

$$AB = OA = OB = r.$$

39 Algoritmo para construir o hexágono regular

Notação

- 1) trace uma circunferência de centro O ;
- 2) escolha um ponto A sobre a circunferência;
- 3) abra o compasso com a medida do raio:

$$OA;$$

- 4) mantendo a mesma abertura, coloque a ponta seca em A ;
- 5) marque na circunferência o próximo ponto B ;
- 6) coloque o compasso em B e marque C ;
- 7) repita o processo até obter:

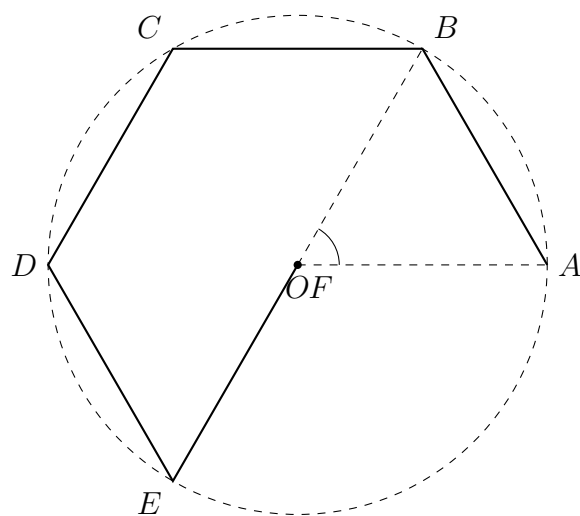
$$A, B, C, D, E, F;$$

- 8) ligue os seis pontos consecutivamente.

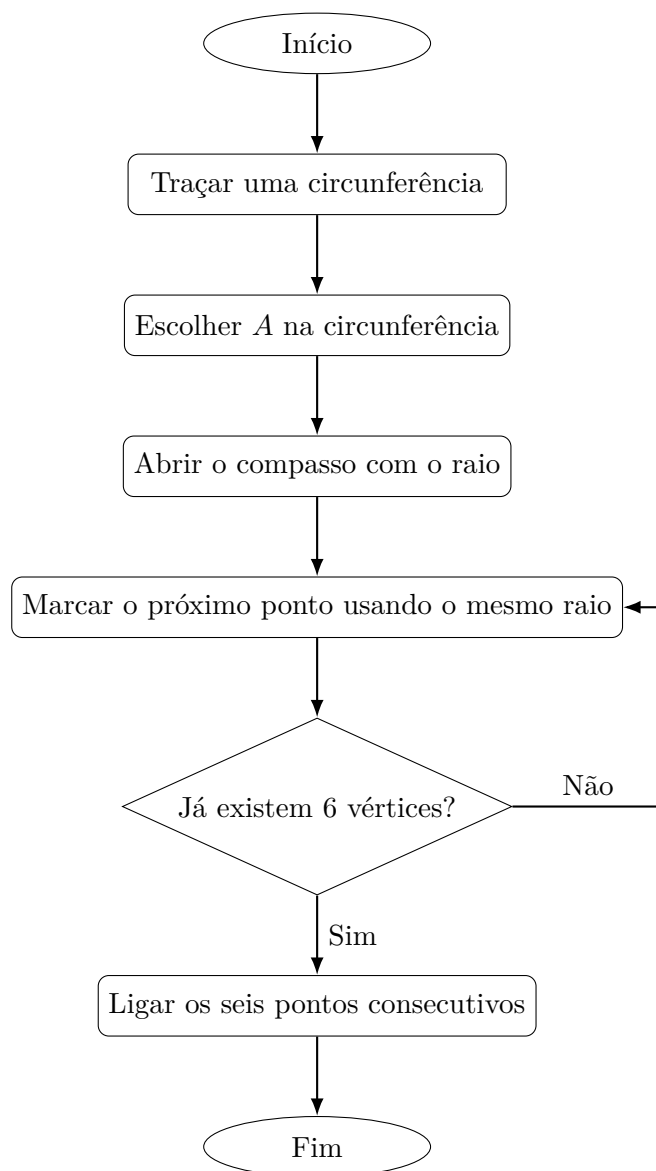
Resultado:

$$ABCDEF \text{ é um hexágono regular.}$$

40 Ilustração do hexágono regular



41 Fluxograma para construção do hexágono



42 Construção do triângulo equilátero a partir do hexágono

Em um hexágono regular inscrito:

$$A, B, C, D, E, F,$$

podemos ligar vértices alternados:

$$A, \quad C, \quad E.$$

Os arcos correspondentes são iguais.

Assim, obtemos um triângulo equilátero.

$\triangle ACE$ é equilátero.

43 Construção do quadrado inscrito

Para construir um quadrado em uma circunferência:

- 1) trace um diâmetro:

AC ;

- 2) construa pelo centro O uma reta perpendicular a AC ;

- 3) essa reta encontra a circunferência em:

B

e:

D ;

- 4) ligue:

$A - B - C - D - A$.

Os quatro ângulos centrais medem:

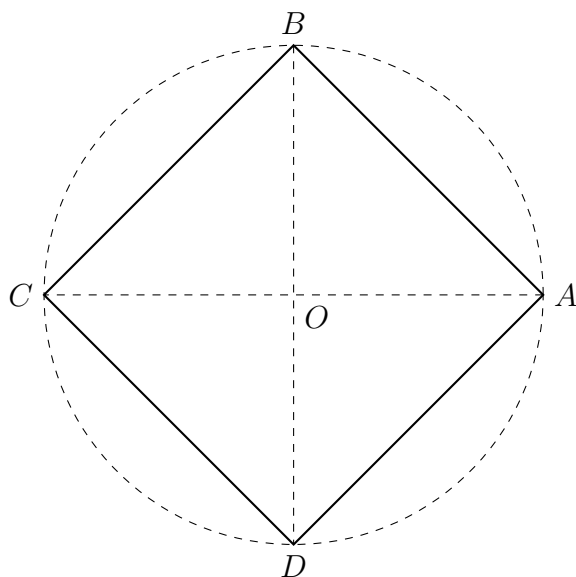
$$\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ.$$

Logo, os quatro arcos são congruentes e os quatro lados também.

Portanto:

$ABCD$ é um quadrado.

44 Ilustração do quadrado inscrito



45 Construção de um octógono regular

Como o ângulo central de um quadrado é:

$$90^\circ,$$

se dividirmos cada ângulo central ao meio, obtemos:

$$45^\circ.$$

Como:

$$\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ,$$

podemos obter um octógono regular subdividindo os quatro setores de 90° em dois setores iguais.

Notação

quadrado inscrito $\longrightarrow$ bissecção dos setores $\longrightarrow$ octógono regular.

46 Construção de um dodecágono regular

O hexágono regular possui ângulo central:

$$60^\circ.$$

Dividindo cada setor ao meio:

$$\frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Como:

$$\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ,$$

obtemos um dodecágono regular.

hexágono $\longrightarrow$ bissecção $\longrightarrow$ dodecágono.

47 Construção de um polígono regular pelo ângulo central

Em princípio, se for possível construir exatamente o ângulo:

$$\frac{360^\circ}{n},$$

podemos marcar sucessivamente esse ângulo em torno do centro de uma circunferência e obter os vértices de um polígono regular de n lados.

Notação

$$\theta_c = \frac{360^\circ}{n}$$

é a chave para a construção de um polígono regular inscrito.

48 Exemplo: octógono regular

Para:

$$n = 8,$$

temos:

$$\theta_c = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ.$$

Como sabemos construir exatamente:

$$45^\circ,$$

podemos dividir a circunferência em oito setores congruentes.

Logo, podemos construir um:

octógono regular.

49 Exemplo: dodecágono regular

Para:

$$n = 12,$$

temos:

$$\theta_c = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ.$$

Como sabemos construir:

30° ,

podemos dividir a circunferência em 12 setores iguais.

Logo:

o dodecágono regular é construtível por esse procedimento.

50 Um cuidado importante

Atenção

Não basta dividir numericamente:

$$360^\circ$$

por n .

Para uma construção exata com régua e compasso, o ângulo central correspondente também precisa ser geometricamente construtível.

Observação

Existem polígonos regulares cuja construção exata com apenas régua e compasso é possível e outros para os quais isso não é possível.

Esse é um tema avançado da Matemática. No 8º ano, nosso foco será nas construções fundamentais de triângulo equilátero, quadrado, hexágono, octógono e dodecágono.

51 Ângulos internos de polígonos regulares

Exemplo

Determine o ângulo interno de um hexágono regular.

Resolução

Utilizamos:

$$\theta_i = \frac{(n-2)180^\circ}{n}.$$

Para:

$$n = 6,$$

temos:

$$\theta_i = \frac{(6-2)180^\circ}{6}.$$

Logo:

$$\theta_i = \frac{720^\circ}{6}.$$

Portanto:

$$\boxed{\theta_i = 120^\circ}.$$

52 Outro exemplo

Exemplo

Determine o ângulo interno de um octógono regular.

Resolução

$$\theta_i = \frac{(8-2)180^\circ}{8}.$$

Logo:

$$\theta_i = \frac{1080^\circ}{8}.$$

Portanto:

$$\boxed{\theta_i = 135^\circ}.$$

53 Descobrindo o número de lados pelo ângulo central

Se o ângulo central é conhecido:

$$\theta_c,$$

temos:

$$\theta_c = \frac{360^\circ}{n}.$$

Logo:

$$n = \frac{360^\circ}{\theta_c}.$$

Exemplo

Um polígono regular possui ângulo central de:

$$30^\circ.$$

Quantos lados possui?

Resolução

$$n = \frac{360}{30}.$$

Logo:

$$n = 12.$$

Portanto, trata-se de um dodecágono regular.

54 Descobrimo o número de lados pelo ângulo externo

Como:

$$\theta_e = \frac{360^\circ}{n},$$

também temos:

$$n = \frac{360^\circ}{\theta_e}.$$

Exemplo

O ângulo externo de um polígono regular mede:

$$45^\circ.$$

Então:

$$n = \frac{360}{45} = 8.$$

Logo:

o polígono é um octógono regular.

55 Perímetro de um polígono regular

Se um polígono regular possui:

$$n$$

lados e cada lado mede:

$$l,$$

então seu perímetro é:

$$P = nl.$$

Exemplo

Um hexágono regular possui lado de:

$$5 \text{ cm.}$$

Então:

$$P = 6 \cdot 5.$$

Logo:

$$P = 30 \text{ cm.}$$

56 Perímetro do hexágono inscrito

Se um hexágono regular está inscrito em uma circunferência de raio:

$$r,$$

cada lado mede:

$$r.$$

Logo:

$$P = 6r.$$

Teorema 56.1: Perímetro do hexágono regular inscrito

Para um hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio r :

$$P = 6r.$$

57 Construção e demonstração

Uma construção geométrica completa possui duas partes:

- 1) **procedimento**: explica como construir;
- 2) **justificativa**: prova por que a construção possui a propriedade desejada.

Notação

$$\text{Construção} = \text{algoritmo} + \text{demonstração}.$$

58 Exemplo completo: construir 30°

Exemplo

Apresente a construção e a justificativa de um ângulo de:

$$30^\circ.$$

Resolução

Etapla 1: construir 60° .

Construímos um triângulo equilátero:

$$ABC.$$

Então:

$$\widehat{BAC} = 60^\circ.$$

Etapla 2: dividir o ângulo ao meio.

Construímos a bissetriz:

$$AD$$

de:

$$\widehat{BAC}.$$

Então:

$$\widehat{BAD} = \widehat{DAC}.$$

Como:

$$\widehat{BAD} + \widehat{DAC} = 60^\circ,$$

temos:

$$2\widehat{BAD} = 60^\circ.$$

Logo:

$$\boxed{\widehat{BAD} = 30^\circ.}$$

59 Erros comuns

Atenção

Erro 1: desenhar um ângulo aproximadamente e chamá-lo de construção exata.
Uma construção geométrica precisa ser garantida por propriedades matemáticas.

Atenção

Erro 2: alterar a abertura do compasso durante uma construção que depende de raios iguais.
Por exemplo, na construção do triângulo equilátero, devemos preservar a mesma abertura para garantir:

$$AB = AC = BC.$$

Atenção

Erro 3: concluir que o triângulo é equilátero apenas pela aparência.
A conclusão vem das igualdades:

$$AB = AC$$

e:

$$AB = BC.$$

Atenção

Erro 4: confundir ângulo central com ângulo interno.
No hexágono regular:

$$\theta_c = 60^\circ,$$

mas:

$$\theta_i = 120^\circ.$$

Atenção

Erro 5: usar:

$$\frac{360^\circ}{n}$$

como fórmula do ângulo interno.

Essa fórmula fornece o ângulo central ou externo.

O ângulo interno é:

$$\theta_i = \frac{(n-2)180^\circ}{n}.$$

Atenção

Erro 6: pensar que todos os polígonos equiláteros são regulares.
Um polígono regular deve ser simultaneamente:

equilátero

e:

equiângulo.

Atenção

Erro 7: acreditar que, em qualquer polígono regular inscrito, o lado é igual ao raio. Essa propriedade vale especificamente para o:

hexágono regular.

60 Resumo teórico

Construção ou conceito	Ideia fundamental
60°	triângulo equilátero
90°	perpendicular
45°	metade de 90°
30°	metade de 60°
Polígono regular	lados e ângulos congruentes
Ângulo central	$360^\circ/n$
Ângulo interno regular	$(n-2)180^\circ/n$
Hexágono inscrito	lado = raio
Quadrado inscrito	quatro setores de 90°
Octógono inscrito	oito setores de 45°
Dodecágono inscrito	doze setores de 30°

Notação

Construções fundamentais:

$60^\circ \leftarrow$ triângulo equilátero

$90^\circ \leftarrow$ perpendicular

$$45^\circ = \frac{90^\circ}{2}$$

$$30^\circ = \frac{60^\circ}{2}$$

Para um polígono regular de n lados:

$$\theta_c = \frac{360^\circ}{n}$$

e:

$$\theta_i = \frac{(n-2)180^\circ}{n}.$$

61 Exercícios

61.1 Parte A – Conceitos fundamentais

Exercício

Responda:

- a) Qual é a função da régua em uma construção clássica?
- b) Qual é a função do compasso?
- c) O que significa transportar um comprimento?
- d) Por que um desenho feito “a olho” não constitui uma construção exata?

61.2 Parte B – Triângulo equilátero

Exercício

Explique passo a passo como construir um triângulo equilátero de lado AB .

Exercício

Na construção de um triângulo equilátero, explique por que:

$$AB = AC = BC.$$

61.3 Parte C – Construção de ângulos

Exercício

Indique a construção fundamental utilizada para obter:

- a) 60° ;
- b) 90° ;
- c) 45° ;
- d) 30° .

61.4 Parte D – Combinação de ângulos

Exercício

Explique como podemos construir, a partir dos ângulos estudados:

- a) 75° ;
- b) 105° ;
- c) 120° ;
- d) 135° ;
- e) 150° .

61.5 Parte E – Polígonos regulares

Exercício

Determine o ângulo central dos seguintes polígonos regulares:

- a) triângulo equilátero;
- b) quadrado;
- c) hexágono regular;
- d) octógono regular;
- e) decágono regular;
- f) dodecágono regular.

61.6 Parte F – Ângulos internos

Exercício

Determine a medida de cada ângulo interno dos polígonos regulares:

- a) triângulo equilátero;
- b) quadrado;
- c) pentágono regular;
- d) hexágono regular;
- e) octógono regular;
- f) decágono regular.

61.7 Parte G – Descobrir o número de lados

Exercício

Determine o número de lados de um polígono regular cujo ângulo central mede:

- a) 120° ;
- b) 90° ;
- c) 60° ;
- d) 45° ;
- e) 30° .

61.8 Parte H – Hexágono regular

Exercício

Um hexágono regular está inscrito em uma circunferência de raio:

7 cm.

Determine:

- a) o comprimento de cada lado;
- b) seu perímetro;
- c) seu ângulo central;
- d) seu ângulo interno.

61.9 Parte I – Construções

Exercício

Descreva um algoritmo para construir um hexágono regular inscrito em uma circunferência.

Exercício

Explique como construir um quadrado inscrito em uma circunferência utilizando dois diâmetros perpendiculares.

Exercício

Explique como obter um octógono regular a partir de um quadrado inscrito.

61.10 Parte J – Justificativas

Exercício

Demonstre que o lado de um hexágono regular inscrito possui a mesma medida que o raio da circunferência.

Exercício

Explique por que a construção da perpendicular por um ponto de uma reta produz um ângulo de exatamente:

90° .

62 Gabarito comentado

62.1 Parte A

Resolução

- a) A régua é utilizada principalmente para traçar retas ou segmentos determinados por pontos conhecidos.
- b) O compasso permite traçar circunferências e transportar distâncias exatamente.
- c) Transportar um comprimento significa construir outro segmento com exatamente a mesma medida.
- d) Porque uma construção rigorosa precisa ser garantida por propriedades geométricas, e não apenas por aparência visual.

62.2 Parte B

Resolução

Partimos de:

$$AB.$$

Traçamos uma circunferência de centro A e raio AB .

Traçamos outra de centro B e mesmo raio.

Se C é uma interseção, então:

$$AC = AB$$

e:

$$BC = AB.$$

Logo:

$$AB = AC = BC.$$

Portanto:

$\triangle ABC$ é equilátero.

62.3 Parte C

Resolução

a) 60° :

triângulo equilátero.

b) 90° :

retas perpendiculares.

c) 45° :

bissetriz de 90° .

d) 30° :

bissetriz de 60° .

62.4 Parte D

Resolução

a)

$$75^\circ = 45^\circ + 30^\circ.$$

b)

$$105^\circ = 60^\circ + 45^\circ.$$

c)

$$120^\circ = 180^\circ - 60^\circ.$$

d)

$$135^\circ = 180^\circ - 45^\circ.$$

e)

$$150^\circ = 180^\circ - 30^\circ.$$

62.5 Parte E

Resolução

Utilizamos:

$$\theta_c = \frac{360^\circ}{n}.$$

a) $n = 3$:

$$\boxed{120^\circ}.$$

b) $n = 4$:

$$\boxed{90^\circ}.$$

c) $n = 6$:

$$\boxed{60^\circ}.$$

d) $n = 8$:

$$\boxed{45^\circ}.$$

e) $n = 10$:

$$\boxed{36^\circ}.$$

f) $n = 12$:

$$\boxed{30^\circ}.$$

62.6 Parte F

Resolução

Utilizamos:

$$\theta_i = \frac{(n-2)180^\circ}{n}.$$

a) Triângulo:

$$\boxed{60^\circ}.$$

b) Quadrado:

$$\boxed{90^\circ}.$$

c) Pentágono:

$$\frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = \boxed{108^\circ}.$$

d) Hexágono:

$$\boxed{120^\circ}.$$

e) Octógono:

$$\boxed{135^\circ}.$$

f) Decágono:

$$\frac{8 \cdot 180^\circ}{10} = \boxed{144^\circ}.$$

62.7 Parte G

Resolução

Utilizamos:

$$n = \frac{360^\circ}{\theta_c}.$$

a)

$$n = \frac{360}{120} = 3.$$

$$\boxed{3}.$$

b)

$$n = \frac{360}{90} = 4.$$

$$\boxed{4}.$$

c)

$$n = \frac{360}{60} = 6.$$

$$\boxed{6}.$$

d)

$$n = \frac{360}{45} = 8.$$

$$\boxed{8}.$$

e)

$$n = \frac{360}{30} = 12.$$

$$\boxed{12}.$$

62.8 Parte H

Resolução

No hexágono regular inscrito:

$$l = r.$$

Como:

$$r = 7 \text{ cm},$$

temos:

$$l = 7 \text{ cm.}$$

O perímetro é:

$$P = 6l.$$

Logo:

$$P = 6 \cdot 7.$$

Portanto:

$$P = 42 \text{ cm.}$$

O ângulo central é:

$$\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ.$$

O ângulo interno é:

$$\frac{(6 - 2)180^\circ}{6} = 120^\circ.$$

62.9 Parte I

Resolução

Hexágono:

- 1) traçar uma circunferência;
- 2) escolher um ponto na circunferência;
- 3) abrir o compasso com o raio;
- 4) marcar consecutivamente seis pontos utilizando sempre a mesma abertura;
- 5) unir os seis pontos consecutivos.

Quadrado:

Traçamos um diâmetro.

Depois construímos pelo centro um segundo diâmetro perpendicular ao primeiro. Os quatro extremos dos diâmetros estão separados por ângulos centrais de:

$$90^\circ.$$

Ligando os quatro pontos, obtemos um quadrado.

Octógono:

Partimos dos quatro setores de:

$$90^\circ$$

do quadrado inscrito.

Dividimos cada um ao meio:

$$90^\circ \div 2 = 45^\circ.$$

Obtendo oito setores de 45° , construímos oito vértices igualmente espaçados.

62.10 Parte J

Resolução

Hexágono.

O ângulo central é:

$$\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ.$$

Considere dois vértices consecutivos A e B , e o centro O .

Como:

$$OA = OB = r,$$

o triângulo AOB é isósceles.

Como:

$$\widehat{AOB} = 60^\circ,$$

os outros dois ângulos também medem 60° .

Logo, o triângulo é equilátero.

Portanto:

$$\boxed{AB = OA = OB = r.}$$

Perpendicular.

Na construção:

$$PA = PB,$$

$$CA = CB,$$

e:

$$PC = PC.$$

Logo:

$$\triangle APC \cong \triangle BPC$$

por LLL.

Assim:

$$\widehat{APC} = \widehat{CPB}.$$

Como formam um ângulo raso:

$$\widehat{APC} + \widehat{CPB} = 180^\circ.$$

Consequentemente:

$$\widehat{APC} = \widehat{CPB} = 90^\circ.$$

Logo:

$$\boxed{PC \perp AB.}$$

63 Avaliação final

Avaliação final – Construções geométricas

Resolva as questões abaixo.

1. Explique o que caracteriza uma construção geométrica exata.
2. Descreva a construção de um triângulo equilátero a partir de um segmento AB .
3. Explique como construir exatamente um ângulo de:

$$60^\circ.$$

4. Explique como construir exatamente um ângulo de:

$$90^\circ.$$

5. Explique como obter:

$$45^\circ$$

e:

$$30^\circ.$$

6. Defina polígono regular.

7. Determine o ângulo central de um polígono regular de:

12

lados.

8. Determine o ângulo interno de um hexágono regular.

9. Explique passo a passo a construção de um hexágono regular inscrito em uma circunferência.

10. Um hexágono regular está inscrito em uma circunferência de raio:

9 cm.

Determine:

- a) o lado;
- b) o perímetro;
- c) o ângulo central;
- d) o ângulo interno.

63.1 Gabarito da avaliação final

Resolução

1. Uma construção geométrica exata é obtida por um procedimento cujas medidas são garantidas por propriedades matemáticas, normalmente utilizando régua e compasso, e não por simples estimativa visual.
2. Traçamos circunferências de centros A e B , ambas com raio AB . Se C é uma interseção, então:

$$AC = AB$$

e:

$$BC = AB.$$

Logo:

$$AB = AC = BC.$$

Portanto:

$\triangle ABC$ é equilátero.

3. Construimos um triângulo equilátero. Como cada ângulo interno de um triângulo equilátero mede:

$$60^\circ,$$

obtemos exatamente o ângulo desejado.

4. Construimos uma reta perpendicular por meio de arcos equidistantes. Retas perpendiculares formam ângulos de:

$$90^\circ.$$

5. Para 45° , construimos 90° e dividimos ao meio:

$$45^\circ = \frac{90^\circ}{2}.$$

Para 30° , construimos 60° e dividimos ao meio:

$$30^\circ = \frac{60^\circ}{2}.$$

6. Um polígono regular possui todos os lados congruentes e todos os ângulos internos congruentes.

7. :

$$\theta_c = \frac{360^\circ}{12}.$$

Logo:

$$\theta_c = 30^\circ.$$

8. :

$$\theta_i = \frac{(6 - 2)180^\circ}{6}.$$

Logo:

$$\theta_i = 120^\circ.$$

9. Traçamos uma circunferência, escolhemos um ponto e usamos o próprio raio como abertura do compasso para marcar sucessivamente seis pontos sobre a circunferência. Ligando os pontos consecutivos, obtemos o hexágono regular.

10. Como o lado de um hexágono regular inscrito é igual ao raio:

$$l = 9 \text{ cm.}$$

O perímetro:

$$P = 6 \cdot 9.$$

Logo:

$$P = 54 \text{ cm.}$$

O ângulo central:

$$60^\circ.$$

O ângulo interno:

$$120^\circ.$$

64 Conclusão

As construções geométricas permitem produzir figuras e ângulos de maneira exata utilizando propriedades matemáticas.

As principais ideias estudadas foram:

- 1) o compasso permite transportar distâncias exatamente;
- 2) a interseção de circunferências permite construir segmentos congruentes;
- 3) um triângulo equilátero produz naturalmente ângulos de:

$$60^\circ;$$

- 4) uma perpendicular produz ângulos de:

$$90^\circ;$$

- 5) dividindo 90° ao meio obtemos:

$$45^\circ;$$

- 6) dividindo 60° ao meio obtemos:

$$30^\circ;$$

- 7) um polígono regular possui lados e ângulos internos congruentes;

8) o ângulo central de um polígono regular de n lados é:

$$\frac{360^\circ}{n};$$

9) seu ângulo interno é:

$$\frac{(n-2)180^\circ}{n};$$

10) no hexágono regular inscrito, cada lado é igual ao raio da circunferência;

11) a construção do hexágono pode ser descrita por um algoritmo ou fluxograma;

12) construções geométricas devem ser acompanhadas de justificativas que provem sua exatidão.

Notação

Resumo final:

$$60^\circ \leftarrow \text{triângulo equilátero}$$

$$90^\circ \leftarrow \text{perpendicular}$$

$$45^\circ = \frac{90^\circ}{2}$$

$$30^\circ = \frac{60^\circ}{2}$$

Para um polígono regular:

$$\theta_c = \frac{360^\circ}{n}$$

$$\theta_i = \frac{(n-2)180^\circ}{n}$$

e, especificamente para o hexágono regular inscrito:

$$\text{lado} = \text{raio.}$$

Finalmente:

$$\text{construção geométrica} = \text{procedimento} + \text{justificativa.}$$

Fim do curso