

Congruência de Triângulos

Matemática – 8º Ano

Correspondência entre elementos, casos de congruência, demonstrações e aplicações geométricas

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste curso, o estudante deverá ser capaz de:

- 1) compreender o significado geométrico de congruência;
- 2) distinguir figuras congruentes de figuras apenas semelhantes;
- 3) identificar lados e ângulos correspondentes;
- 4) utilizar corretamente a notação de congruência;
- 5) reconhecer que triângulos congruentes possuem lados e ângulos correspondentes de mesma medida;
- 6) compreender que não é necessário comparar os seis elementos dos triângulos para provar congruência;
- 7) aplicar o caso Lado–Lado–Lado (LLL);
- 8) aplicar o caso Lado–Ângulo–Lado (LAL);
- 9) aplicar o caso Ângulo–Lado–Ângulo (ALA);
- 10) compreender o caso Ângulo–Ângulo–Lado (AAL);
- 11) reconhecer que o caso Ângulo–Ângulo–Ângulo (AAA) não garante congruência;
- 12) reconhecer que dois lados e um ângulo não compreendido entre eles não garantem, em geral, congruência;
- 13) utilizar congruência para determinar medidas desconhecidas;
- 14) construir argumentos e demonstrações geométricas simples;
- 15) aplicar congruência em problemas envolvendo triângulos isósceles, diagonais, simetrias e quadriláteros.

Sumário

2	Triângulos	1
3	Comprimento de um segmento	2
4	Congruência de figuras	2
5	Congruência de triângulos	3
6	Correspondência entre vértices	3
7	Elementos correspondentes	4
8	Exemplo de correspondência	5
9	Por que existem casos de congruência?	6
10	Caso LLL	7
11	Ilustração do caso LLL	7
12	Por que o caso LLL funciona?	8
13	Exemplo com LLL	8
14	Caso LAL	9
15	Ângulo compreendido	9
16	Ilustração do caso LAL	10
17	Exemplo com LAL	10
18	Caso ALA	12
19	Ilustração do caso ALA	12
20	Por que ALA determina um triângulo?	12
21	Caso AAL	13
22	Exemplo com AAL	13
23	Resumo dos principais casos	14

24 Por que AAA não é caso de congruência?	14
25 Dois lados e um ângulo qualquer	15
26 Triângulos congruentes possuem o mesmo perímetro	15
27 Triângulos congruentes possuem a mesma área	16
28 Determinação de medidas desconhecidas	17
29 Medidas angulares desconhecidas	18
30 Congruência e lado comum	18
31 Exemplo com lado comum	19
32 Triângulo isósceles e congruência	19
33 Demonstração dos ângulos da base de um isósceles	20
34 Ilustração do triângulo isósceles	21
35 Congruência e mediatriz	21
36 Congruência em um paralelogramo	22
37 Estrutura de uma demonstração geométrica	23
38 Exemplo de demonstração passo a passo	24
39 Movimentos rígidos e congruência	24
40 Congruência versus semelhança	25
41 Erros comuns	25
42 Mapa conceitual	27
43 Resumo teórico	27
44 Exercícios	28
44.1 Parte A – Correspondência	28
44.2 Parte B – Determinação de medidas	28

44.3	Parte C – Identificação do caso	29
44.4	Parte D – Caso LLL	29
44.5	Parte E – Caso LAL	30
44.6	Parte F – Caso ALA	30
44.7	Parte G – Expressões algébricas	31
44.8	Parte H – Congruência ou não?	32
44.9	Parte I – Demonstração	32
44.10	Parte J – Triângulo isósceles	32
45	Gabarito comentado	33
45.1	Parte A	33
45.2	Parte B	33
45.3	Parte C	34
45.4	Parte D	35
45.5	Parte E	35
45.6	Parte F	36
45.7	Parte G	36
45.8	Parte H	37
45.9	Parte I	38
45.10	Parte J	39
46	Avaliação final	39
46.1	Gabarito da avaliação final	41
47	Conclusão	43

1 Introdução

Em Geometria, duas figuras podem possuir exatamente a mesma forma e o mesmo tamanho, mesmo que estejam em posições diferentes no plano.

Considere dois triângulos.

Um deles pode estar:

- deslocado;
- girado;
- refletido;

em relação ao outro.

Ainda assim, eles podem possuir exatamente as mesmas medidas.

Quando isso acontece, dizemos que os triângulos são **congruentes**.

Observação

A congruência é uma ideia de igualdade geométrica: figuras congruentes podem ser sobrepostas perfeitamente por meio de movimentos rígidos, como translações, rotações e reflexões.

2 Triângulos

Definição 2.1: Triângulo

Dados três pontos não colineares A , B e C , o triângulo ABC é a figura determinada pelos segmentos:

$$\overline{AB}, \quad \overline{BC}, \quad \overline{CA}.$$

Os elementos principais de um triângulo são:

- três vértices;
- três lados;
- três ângulos internos.

Para:

$$\triangle ABC,$$

temos:

vértices: A, B, C ,

lados: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$,

e:

ângulos: $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$.

3 Comprimento de um segmento

Utilizaremos a notação:

AB

para representar o comprimento do segmento:

$\overline{AB}$.

Notação

$\overline{AB}$

representa o segmento geométrico.

Já:

AB

representa sua medida ou comprimento.

Por exemplo:

$$AB = 5 \text{ cm.}$$

4 Congruência de figuras

Definição 4.1: Figuras congruentes

Duas figuras geométricas são **congruentes** quando possuem a mesma forma e o mesmo tamanho.

Equivalentemente, uma pode ser levada exatamente sobre a outra por uma composição de movimentos rígidos.

Observação

Movimentos rígidos preservam distâncias e medidas de ângulos.

5 Congruência de triângulos

Definição 5.1: Triângulos congruentes

Dois triângulos são congruentes quando seus lados e ângulos correspondentes possuem respectivamente as mesmas medidas.

Se:

$$\triangle ABC$$

é congruente a:

$$\triangle DEF,$$

escrevemos:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

6 Correspondência entre vértices

A ordem das letras na notação de congruência é fundamental.

Se:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF,$$

então a correspondência é:

$$A \leftrightarrow D,$$

$$B \leftrightarrow E,$$

$$C \leftrightarrow F.$$

Consequentemente:

$$AB \leftrightarrow DE,$$

$$BC \leftrightarrow EF,$$

$$AC \leftrightarrow DF.$$

E:

$$\widehat{A} \leftrightarrow \widehat{D},$$

$$\widehat{B} \leftrightarrow \widehat{E},$$

$$\widehat{C} \leftrightarrow \widehat{F}.$$

Atenção

A ordem dos vértices não pode ser escolhida aleatoriamente.

Se:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF,$$

não podemos concluir, por exemplo, que:

$$AB = DF.$$

O lado correspondente a AB é:

$$DE.$$

7 Elementos correspondentes

Teorema 7.1: Partes correspondentes de triângulos congruentes

Se:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF,$$

então:

$$AB = DE,$$

$$BC = EF,$$

$$AC = DF,$$

e:

$$\widehat{A} = \widehat{D},$$

$$\widehat{B} = \widehat{E},$$

$$\widehat{C} = \widehat{F}.$$

Essa propriedade é frequentemente resumida pela ideia:

partes correspondentes de triângulos congruentes são congruentes.

8 Exemplo de correspondência

Exemplo

Sabemos que:

$$\triangle ABC \cong \triangle PQR.$$

Além disso:

$$AB = 7 \text{ cm},$$

$$BC = 5 \text{ cm},$$

$$AC = 9 \text{ cm}.$$

Determine:

$$PQ, \quad QR, \quad PR.$$

Resolução

Da ordem da congruência:

$$A \leftrightarrow P,$$

$$B \leftrightarrow Q,$$

$$C \leftrightarrow R.$$

Logo:

$$AB \leftrightarrow PQ,$$

$$BC \leftrightarrow QR,$$

$$AC \leftrightarrow PR.$$

Portanto:

$$PQ = 7 \text{ cm},$$

$$QR = 5 \text{ cm},$$

$$PR = 9 \text{ cm}.$$

9 Por que existem casos de congruência?

Para verificar diretamente que dois triângulos são congruentes, poderíamos comparar:

- três lados;
- três ângulos.

Ou seja, seis informações.

Entretanto, a geometria dos triângulos possui rigidez suficiente para que determinadas combinações de apenas três informações já garantam completamente a forma e o tamanho do triângulo.

Essas combinações são chamadas de **casos ou critérios de congruência**.

10 Caso LLL

Teorema 10.1: Caso Lado–Lado–Lado (LLL)

Se os três lados de um triângulo possuem respectivamente as mesmas medidas que os três lados de outro triângulo, então os triângulos são congruentes.

Em símbolos, se:

$$AB = DE,$$

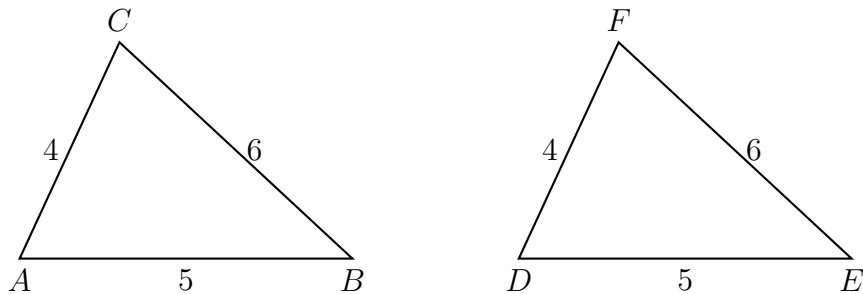
$$BC = EF,$$

$$AC = DF,$$

então:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

11 Ilustração do caso LLL



Como os três lados correspondentes possuem as mesmas medidas:

$$AB = DE,$$

$$AC = DF,$$

$$BC = EF,$$

temos:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

pelo caso LLL.

12 Por que o caso LLL funciona?

Suponha que desejamos construir um triângulo com lados:

$$4, \quad 5, \quad 6.$$

Construímos primeiro um segmento de comprimento 5.

O terceiro vértice deve estar:

- a distância 4 de uma extremidade;
- a distância 6 da outra.

Essas duas condições determinam o vértice, salvo uma reflexão em relação ao lado inicial.

Como reflexão preserva congruência, todos os triângulos construídos com esses três lados são congruentes.

Observação

Essa é uma justificativa geométrica intuitiva do caso LLL.

13 Exemplo com LLL

Exemplo

Considere dois triângulos com medidas:

$$AB = 8, \quad BC = 6, \quad AC = 5,$$

e:

$$DE = 8, \quad EF = 6, \quad DF = 5.$$

Mostre que são congruentes.

Resolução

Temos:

$$AB = DE,$$

$$BC = EF,$$

$$AC = DF.$$

Os três lados correspondentes são congruentes.

Logo, pelo caso LLL:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

14 Caso LAL

Teorema 14.1: Caso Lado–Ângulo–Lado (LAL)

Se dois lados de um triângulo possuem respectivamente as mesmas medidas que dois lados de outro triângulo e os ângulos **compreendidos entre esses lados** também possuem a mesma medida, então os triângulos são congruentes.

Se:

$$AB = DE,$$

$$AC = DF,$$

e:

$$\hat{A} = \hat{D},$$

então:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

15 Ângulo compreendido

Definição 15.1: Ângulo compreendido

O ângulo compreendido entre dois lados é o ângulo formado por esses dois lados.

Por exemplo, entre:

AB

e:

AC ,

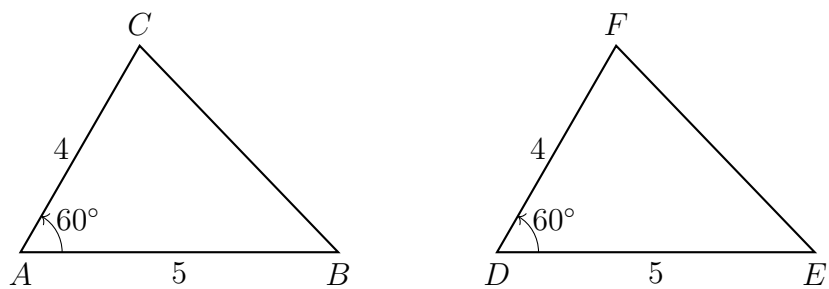
o ângulo compreendido é:

$\hat{A}$.

Atenção

No caso LAL, não basta conhecer quaisquer dois lados e qualquer ângulo. O ângulo informado deve estar **entre os dois lados conhecidos**.

16 Ilustração do caso LAL



Temos dois lados e o ângulo entre eles correspondentes.

Logo:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

pelo caso LAL.

17 Exemplo com LAL

Exemplo

Sabemos que:

$$AB = PQ = 7 \text{ cm},$$

$$AC = PR = 5 \text{ cm},$$

e:

$$\hat{A} = \hat{P} = 50^\circ.$$

Mostre que:

$$\triangle ABC \cong \triangle PQR.$$

Resolução

Os lados:

$$AB$$

e:

$$AC$$

formam o ângulo:

$$\hat{A}.$$

Os lados correspondentes:

$$PQ$$

e:

$$PR$$

formam:

$$\hat{P}.$$

Como:

$$AB = PQ,$$

$$AC = PR,$$

e:

$$\hat{A} = \hat{P},$$

temos, pelo caso LAL:

$$\triangle ABC \cong \triangle PQR.$$

18 Caso ALA

Teorema 18.1: Caso Ângulo–Lado–Ângulo (ALA)

Se dois ângulos de um triângulo possuem respectivamente as mesmas medidas que dois ângulos de outro triângulo e o lado compreendido entre esses ângulos também possui a mesma medida, então os triângulos são congruentes.

Se:

$$\widehat{A} = \widehat{D},$$

$$AB = DE,$$

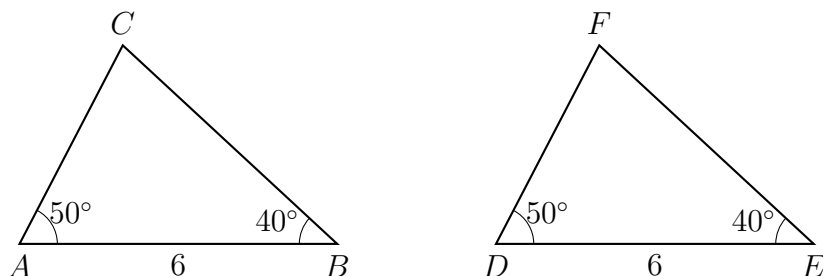
e:

$$\widehat{B} = \widehat{E},$$

então:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

19 Ilustração do caso ALA



Pelo caso ALA:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

20 Por que ALA determina um triângulo?

Conhecendo:

- um lado;
- o ângulo em uma extremidade;

- o ângulo na outra extremidade;

as direções dos outros dois lados ficam determinadas.

Essas duas semirretas encontram-se em um único ponto.

Portanto, a forma e o tamanho do triângulo ficam determinados.

21 Caso AAL

Existe ainda uma consequência importante do caso ALA.

Teorema 21.1: Caso Ângulo–Ângulo–Lado (AAL)

Se dois ângulos e um lado de um triângulo possuem respectivamente as mesmas medidas que dois ângulos e o lado correspondente de outro triângulo, então os triângulos são congruentes.

Justificativa.

A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é:

$$180^\circ.$$

Assim, se dois ângulos correspondentes são iguais, os terceiros ângulos também são iguais.

Desse modo, podemos reduzir a situação ao caso ALA.

Observação

Alguns livros apresentam AAL como caso independente; outros o tratam como consequência imediata do caso ALA.

22 Exemplo com AAL

Exemplo

Considere dois triângulos tais que:

$$\hat{A} = \hat{D} = 40^\circ,$$

$$\hat{B} = \hat{E} = 70^\circ,$$

e:

$$AC = DF = 8 \text{ cm.}$$

Mostre que são congruentes.

Resolução

Como:

$$\widehat{A} = \widehat{D},$$

$$\widehat{B} = \widehat{E},$$

e:

$$AC = DF,$$

temos dois ângulos correspondentes e um lado correspondente.

Logo, pelo caso AAL:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

23 Resumo dos principais casos

Caso	Informações conhecidas	Congruência
LLL	três lados	sim
LAL	dois lados e ângulo entre eles	sim
ALA	dois ângulos e lado entre eles	sim
AAL	dois ângulos e um lado correspondente	sim
AAA	três ângulos	não necessariamente
LLA	dois lados e ângulo não compreendido	não, em geral

24 Por que AAA não é caso de congruência?

Considere dois triângulos cujos ângulos medem:

$$30^\circ, \quad 60^\circ, \quad 90^\circ.$$

Um deles pode ter lados:

$$1, \quad \sqrt{3}, \quad 2.$$

Outro pode possuir lados:

$$2, \quad 2\sqrt{3}, \quad 4.$$

Os ângulos são iguais, mas os tamanhos são diferentes.

Portanto, os triângulos não são congruentes.

Teorema 24.1: AAA não garante congruência

A igualdade dos três ângulos correspondentes garante que dois triângulos possuem a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho.

Consequentemente, AAA não é um caso de congruência.

Atenção

$AAA \neq$ caso de congruência.

AAA será importante posteriormente no estudo de **semelhança de triângulos**.

25 Dois lados e um ângulo qualquer

Suponha que conhecemos dois lados e um ângulo que não está entre eles.

Essa informação é frequentemente chamada de situação LLA.

Em geral, ela **não determina unicamente** um triângulo.

Pode haver:

- nenhum triângulo;
- um triângulo;
- dois triângulos diferentes.

Atenção

Não confunda:

LAL

com:

LLA.

LAL garante congruência.

LLA não garante congruência em geral.

26 Triângulos congruentes possuem o mesmo perímetro

Teorema 26.1: Perímetros de triângulos congruentes

Se dois triângulos são congruentes, então possuem o mesmo perímetro.

Demonstração.

Se:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF,$$

então:

$$AB = DE,$$

$$BC = EF,$$

$$AC = DF.$$

O perímetro de ABC é:

$$P_1 = AB + BC + AC.$$

O perímetro de DEF é:

$$P_2 = DE + EF + DF.$$

Substituindo lados correspondentes:

$$P_1 = P_2.$$

Portanto:

$$\boxed{P_1 = P_2.}$$

27 Triângulos congruentes possuem a mesma área

Teorema 27.1: Áreas de triângulos congruentes

Triângulos congruentes possuem áreas iguais.

Justificativa.

Como um triângulo congruente pode ser sobreposto exatamente ao outro por movimentos rígidos, as regiões ocupadas possuem a mesma medida de área.

Logo:

$$\boxed{A_1 = A_2.}$$

Atenção

A recíproca é falsa.

Dois triângulos podem possuir a mesma área sem serem congruentes.

28 Determinação de medidas desconhecidas

Exemplo

Sabemos que:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF,$$

com:

$$AB = 2x + 1$$

e:

$$DE = 11.$$

Determine x .

Resolução

Como:

$$AB \leftrightarrow DE,$$

temos:

$$AB = DE.$$

Logo:

$$2x + 1 = 11.$$

Subtraindo 1:

$$2x = 10.$$

Portanto:

$$\boxed{x = 5.}$$

29 Medidas angulares desconhecidas

Exemplo

Sabemos que:

$$\triangle ABC \cong \triangle PQR.$$

Além disso:

$$\hat{A} = 3x + 10^\circ$$

e:

$$\hat{P} = 70^\circ.$$

Determine x .

Resolução

Como:

$$A \leftrightarrow P,$$

os ângulos são correspondentes.

Logo:

$$3x + 10 = 70.$$

Então:

$$3x = 60.$$

Portanto:

$$\boxed{x = 20.}$$

30 Congruência e lado comum

Em demonstrações geométricas, dois triângulos frequentemente compartilham um lado.

Nesse caso, podemos utilizar:

$$\boxed{AB = AB}$$

pela propriedade reflexiva da igualdade.

Definição 30.1: Propriedade reflexiva

Toda grandeza é igual a si mesma.

Assim:

$$a = a.$$

Em particular, um segmento comum a dois triângulos satisfaz:

$$\boxed{AB = AB.}$$

31 Exemplo com lado comum

Considere os triângulos:

$$\triangle ABC$$

e:

$$\triangle ADC,$$

que compartilham o lado:

$$AC.$$

Suponha que:

$$AB = AD$$

e:

$$BC = DC.$$

Além disso:

$$AC = AC.$$

Temos três pares de lados congruentes.

Logo, por LLL:

$$\boxed{\triangle ABC \cong \triangle ADC.}$$

32 Triângulo isósceles e congruência

Definição 32.1: Triângulo isósceles

Um triângulo é isósceles quando possui pelo menos dois lados de mesma medida.

Considere um triângulo isósceles:

$$AB = AC.$$

Se traçarmos um segmento do vértice A até um ponto D da base BC , em certas condições podemos utilizar congruência para demonstrar propriedades do triângulo.

33 Demonstração dos ângulos da base de um isósceles

Teorema 33.1: Ângulos da base do triângulo isósceles

Em um triângulo isósceles, os ângulos opostos aos lados congruentes possuem a mesma medida.

Considere:

$$AB = AC.$$

Suponha que D seja o ponto médio de BC .

Então:

$$BD = DC.$$

Além disso:

$$AD = AD.$$

Assim, nos triângulos:

$$\triangle ABD$$

e:

$$\triangle ACD,$$

temos:

$$AB = AC,$$

$$BD = DC,$$

$$AD = AD.$$

Logo, por LLL:

$$\triangle ABD \cong \triangle ACD.$$

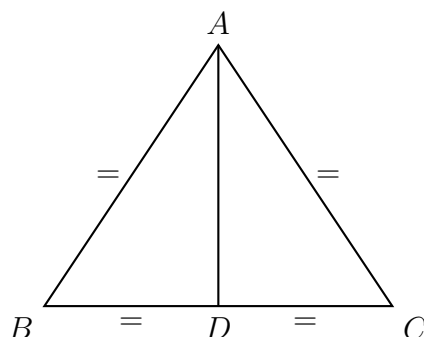
Consequentemente:

$$\hat{B} = \hat{C}.$$

Portanto:

$$\boxed{\hat{B} = \hat{C}.}$$

34 Ilustração do triângulo isósceles



35 Congruência e mediatriz

Definição 35.1: Mediatriz

A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento que passa por seu ponto médio.

Considere um segmento:

$$AB$$

e um ponto P pertencente à mediatriz de AB .

Se M é o ponto médio de AB , então:

$$AM = MB.$$

Também:

$$PM = PM.$$

E:

$$\widehat{AMP} = \widehat{BMP} = 90^\circ.$$

Logo:

$$\triangle AMP \cong \triangle BMP$$

pelo caso LAL.

Portanto:

$$\boxed{PA = PB.}$$

Esse resultado será aprofundado no estudo de lugares geométricos.

36 Congruência em um paralelogramo

Considere um paralelogramo $ABCD$ e a diagonal AC .

Pela definição de paralelogramo:

$$AB \parallel CD$$

e:

$$BC \parallel AD.$$

A diagonal AC determina dois triângulos:

$$\triangle ABC$$

e:

$$\triangle CDA.$$

Pelas propriedades de retas paralelas:

$$\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$$

e:

$$\widehat{BCA} = \widehat{DAC}.$$

Além disso:

$$AC = AC.$$

Logo, por ALA:

$$\triangle ABC \cong \triangle CDA.$$

Consequentemente:

$$AB = CD$$

e:

$$BC = AD.$$

Observação

Esse tipo de argumento mostra como a congruência de triângulos pode ser utilizada para demonstrar propriedades dos quadriláteros.

37 Estrutura de uma demonstração geométrica

Uma demonstração pode ser organizada em quatro partes:

- 1) identificar os triângulos;
- 2) listar as igualdades conhecidas;
- 3) identificar um caso de congruência;
- 4) utilizar a congruência para concluir a propriedade desejada.

Notação

Estrutura típica:

dados

⇓

caso de congruência

⇓

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

⇓

elementos correspondentes são iguais.

38 Exemplo de demonstração passo a passo

Exemplo

Considere os triângulos ABC e DCB .
Sabemos que:

$$AB = DC,$$

$$AC = DB,$$

e ambos compartilham:

$$BC.$$

Prove que:

$$\widehat{ABC} = \widehat{DCB}.$$

Resolução

Temos:

$$AB = DC.$$

Também:

$$AC = DB.$$

Como BC é comum:

$$BC = CB.$$

Portanto, os três lados correspondentes são congruentes.

Pelo caso LLL:

$$\triangle ABC \cong \triangle DCB.$$

Assim, seus ângulos correspondentes possuem a mesma medida.

Logo:

$$\boxed{\widehat{ABC} = \widehat{DCB}.}$$

39 Movimentos rígidos e congruência

Translação, rotação e reflexão não alteram:

- comprimentos;
- medidas angulares;

- perímetro;
- área.

Portanto, se um triângulo é obtido de outro por um movimento rígido, eles são congruentes.

Teorema 39.1: Movimentos rígidos preservam congruência

A imagem de um triângulo por uma translação, rotação ou reflexão é congruente ao triângulo original.

Esse resultado será retomado no estudo das transformações geométricas.

40 Congruência versus semelhança

Definição 40.1: Semelhança: ideia inicial

Duas figuras são semelhantes quando possuem a mesma forma, embora possam possuir tamanhos diferentes.

Triângulos congruentes:

mesma forma e mesmo tamanho.

Triângulos semelhantes:

mesma forma, tamanho possivelmente diferente.

Teorema 40.1: Congruência implica semelhança

Todo par de triângulos congruentes é também semelhante.

A recíproca não é verdadeira.

Triângulos semelhantes podem possuir tamanhos diferentes e, portanto, não serem congruentes.

41 Erros comuns

Atenção

Erro 1: ignorar a ordem da notação.

Se:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF,$$

a correspondência é:

$$A \leftrightarrow D,$$

$$B \leftrightarrow E,$$

$$C \leftrightarrow F.$$

Atenção

Erro 2: usar AAA como caso de congruência.

Três ângulos iguais determinam a forma, mas não o tamanho.

Logo:

AAA não garante congruência.

Atenção

Erro 3: confundir LAL com LLA.

No caso LAL, o ângulo deve estar entre os dois lados conhecidos.

Atenção

Erro 4: concluir congruência apenas porque dois lados são iguais.

Dois lados correspondentes de mesma medida não são suficientes, em geral, para determinar um triângulo.

Atenção

Erro 5: concluir que mesma área significa congruência.

Dois triângulos podem possuir a mesma área e formas diferentes.

Atenção

Erro 6: esquecer o lado comum em demonstrações.

Se dois triângulos compartilham:

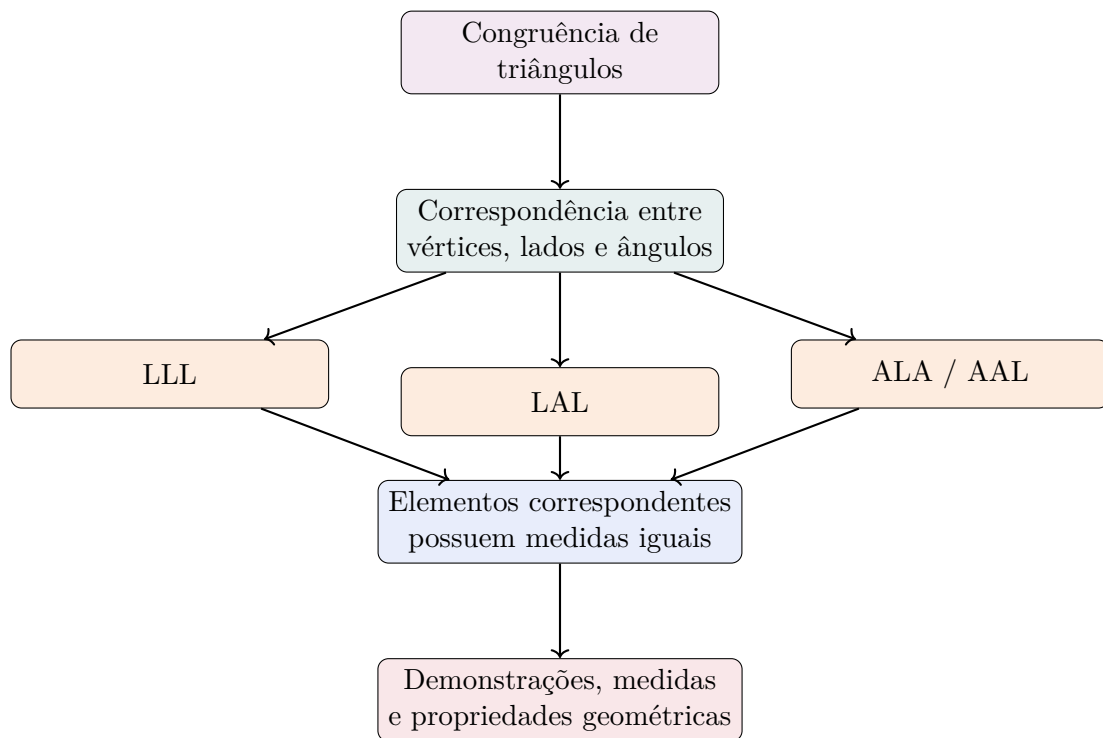
$AB,$

podemos utilizar:

$AB = AB$

pela propriedade reflexiva.

42 Mapa conceitual



43 Resumo teórico

Caso	Informações	Congruência
LLL	três lados correspondentes	sim
LAL	dois lados e ângulo compreendido	sim
ALA	dois ângulos e lado compreendido	sim
AAL	dois ângulos e um lado	sim
AAA	três ângulos	não necessariamente
LLA	dois lados e ângulo não compreendido	não, em geral

Notação

Se:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

então:

$$A \leftrightarrow D, \quad B \leftrightarrow E, \quad C \leftrightarrow F$$

e:

$$AB = DE, \quad BC = EF, \quad AC = DF$$

assim como:

$$\hat{A} = \hat{D}, \quad \hat{B} = \hat{E}, \quad \hat{C} = \hat{F}.$$

44 Exercícios

44.1 Parte A – Correspondência

Exercício

Sabendo que:

$$\triangle ABC \cong \triangle PQR,$$

responda:

- a) Qual vértice corresponde a A ?
- b) Qual vértice corresponde a B ?
- c) Qual lado corresponde a AB ?
- d) Qual lado corresponde a BC ?
- e) Qual ângulo corresponde a $\hat{C}$?

44.2 Parte B – Determinação de medidas

Exercício

Sabemos que:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

Além disso:

$$AB = 8,$$

$$BC = 10,$$

$$AC = 7,$$

$$\hat{A} = 50^\circ,$$

$$\hat{B} = 60^\circ.$$

Determine:

- a) DE ;
- b) EF ;
- c) DF ;
- d) $\widehat{D}$;
- e) $\widehat{E}$;
- f) $\widehat{F}$.

44.3 Parte C – Identificação do caso

Exercício

Indique o caso de congruência, quando possível.

- a) Três pares de lados correspondentes iguais.
- b) Dois lados correspondentes e o ângulo compreendido iguais.
- c) Dois ângulos correspondentes e o lado entre eles iguais.
- d) Três ângulos correspondentes iguais.
- e) Dois ângulos correspondentes e um lado correspondente iguais.

44.4 Parte D – Caso LLL

Exercício

Determine se os pares de triângulos abaixo são necessariamente congruentes por LLL.

a) lados:

3, 4, 5

e:

3, 4, 5;

b) lados:

5, 6, 7

e:

5, 6, 8;

c) lados:

7, 7, 10

e:

10, 7, 7.

44.5 Parte E – Caso LAL

Exercício

Em dois triângulos, temos:

$$AB = DE = 8,$$

$$AC = DF = 5,$$

e:

$$\widehat{A} = \widehat{D} = 60^\circ.$$

a) Qual caso de congruência pode ser utilizado?

b) Podemos concluir que:

$$BC = EF?$$

c) Podemos concluir que:

$$\widehat{B} = \widehat{E}?$$

44.6 Parte F – Caso ALA

Exercício

Considere dois triângulos tais que:

$$\widehat{A} = \widehat{D} = 40^\circ,$$

$$AB = DE = 9,$$

e:

$$\widehat{B} = \widehat{E} = 80^\circ.$$

- a) Mostre que os triângulos são congruentes.
- b) Determine $\widehat{C}$.
- c) Determine $\widehat{F}$.

44.7 Parte G – Expressões algébricas

Exercício

Sabemos que:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

Se:

$$AB = 3x + 2$$

e:

$$DE = 20,$$

determine x .

Exercício

Sabemos que:

$$\triangle ABC \cong \triangle PQR.$$

Se:

$$\widehat{B} = 4x - 10^\circ$$

e:

$$\widehat{Q} = 70^\circ,$$

determine x .

44.8 Parte H – Congruência ou não?

Exercício

Determine se as informações são suficientes para garantir congruência.

- a) três lados;
- b) três ângulos;
- c) dois lados e o ângulo entre eles;
- d) dois lados e um ângulo não compreendido;
- e) dois ângulos e o lado entre eles.

44.9 Parte I – Demonstração

Exercício

No quadrilátero $ABCD$, sabemos que:

$$AB = CD,$$

$$AD = BC.$$

A diagonal AC divide o quadrilátero em dois triângulos.

Mostre que:

$$\triangle ABC \cong \triangle CDA.$$

44.10 Parte J – Triângulo isósceles

Exercício

No triângulo isósceles ABC :

$$AB = AC.$$

O ponto D é o ponto médio de:

$$BC.$$

- a) Mostre que:

$$\triangle ABD \cong \triangle ACD.$$

- b) Conclua que:

$$\hat{B} = \hat{C}.$$

45 Gabarito comentado

45.1 Parte A

Resolução

Como:

$$\triangle ABC \cong \triangle PQR,$$

temos:

$$A \leftrightarrow P,$$

$$B \leftrightarrow Q,$$

$$C \leftrightarrow R.$$

Logo:

a)

$$\boxed{P}$$

b)

$$\boxed{Q}$$

c)

$$\boxed{PQ}$$

d)

$$\boxed{QR}$$

e)

$$\boxed{\hat{R}}$$

45.2 Parte B

Resolução

Da congruência:

$$A \leftrightarrow D,$$

$$B \leftrightarrow E,$$

$$C \leftrightarrow F.$$

Assim:

$$\boxed{DE = 8},$$

$$\boxed{EF = 10},$$

$$\boxed{DF = 7}.$$

Também:

$$\boxed{\widehat{D} = 50^\circ},$$

$$\boxed{\widehat{E} = 60^\circ}.$$

Como a soma interna de um triângulo é:

$$180^\circ,$$

temos:

$$\widehat{C} = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ.$$

Logo:

$$\widehat{C} = 70^\circ.$$

Portanto:

$$\boxed{\widehat{F} = 70^\circ}.$$

45.3 Parte C

Resolução

a)

$$\boxed{LLL}$$

b)

$$\boxed{LAL}$$

c)

$$\boxed{ALA}$$

d) AAA não garante congruência.

$\boxed{\text{não é caso de congruência}}$

e)

$$\boxed{AAL}$$

45.4 Parte D

Resolução

a) Os três lados possuem as mesmas medidas:

sim, por LLL.

b) Um dos lados difere:

$$7 \neq 8.$$

Portanto:

não.

c) A ordem em que os comprimentos são apresentados não importa.

Ambos possuem lados:

$$7, 7, 10.$$

Logo:

sim, por LLL.

45.5 Parte E

Resolução

Temos:

$$AB = DE,$$

$$AC = DF,$$

e:

$$\hat{A} = \hat{D}.$$

Como os ângulos são compreendidos entre os lados conhecidos:

caso LAL.

Logo, os triângulos são congruentes.

Consequentemente:

$$BC = EF$$

e:

$$\boxed{\widehat{B} = \widehat{E}}.$$

45.6 Parte F

Resolução

Temos:

$$\widehat{A} = \widehat{D},$$

$$AB = DE,$$

$$\widehat{B} = \widehat{E}.$$

Portanto, pelo caso ALA:

$$\boxed{\triangle ABC \cong \triangle DEF}.$$

A soma dos ângulos internos é:

$$180^\circ.$$

Logo:

$$\widehat{C} = 180^\circ - 40^\circ - 80^\circ.$$

Então:

$$\boxed{\widehat{C} = 60^\circ}.$$

Pela congruência:

$$\boxed{\widehat{F} = 60^\circ}.$$

45.7 Parte G

Resolução

1.

Como:

$$AB = DE,$$

temos:

$$3x + 2 = 20.$$

Então:

$$3x = 18.$$

Logo:

$$\boxed{x = 6.}$$

2.

Como:

$$B \leftrightarrow Q,$$

temos:

$$\hat{B} = \hat{Q}.$$

Logo:

$$4x - 10 = 70.$$

Então:

$$4x = 80.$$

Portanto:

$$\boxed{x = 20.}$$

45.8 Parte H

Resolução

a) Sim:

LLL.

b) Não:

AAA não garante congruência.

c) Sim:

LAL.

d) Não, em geral:

LLA não é um caso geral.

e) Sim:

ALA.

45.9 Parte I

Resolução

Nos triângulos:

$\triangle ABC$

e:

$\triangle CDA$,

temos:

$AB = CD$

por hipótese.

Também:

$BC = AD$

por hipótese.

Além disso:

$AC = CA$

pela propriedade reflexiva.

Assim, os três lados correspondentes são congruentes.

Logo, por LLL:

$$\triangle ABC \cong \triangle CDA.$$

45.10 Parte J

Resolução

Como ABC é isósceles:

$$AB = AC.$$

Como D é ponto médio de BC :

$$BD = DC.$$

Além disso:

$$AD = AD.$$

Portanto:

$$AB = AC,$$

$$BD = DC,$$

$$AD = AD.$$

Pelo caso LLL:

$$\triangle ABD \cong \triangle ACD.$$

Assim, os ângulos correspondentes possuem a mesma medida.

Em particular:

$$\widehat{B} = \widehat{C}.$$

46 Avaliação final

Avaliação final – Congruência de triângulos

Resolva as questões abaixo.

1. Defina triângulos congruentes.
2. Sabendo que:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF,$$

indique:

- a) o lado correspondente a AB ;
- b) o lado correspondente a AC ;
- c) o ângulo correspondente a $\widehat{B}$.

- 3. Explique o caso LLL.
- 4. Explique o caso LAL.
- 5. Explique o caso ALA.
- 6. Explique por que AAA não é um caso de congruência.
- 7. Dois triângulos possuem:

$$AB = DE = 6,$$

$$AC = DF = 8,$$

$$\widehat{A} = \widehat{D} = 70^\circ.$$

Prove que são congruentes.

- 8. Sabendo que:

$$\triangle ABC \cong \triangle PQR,$$

e:

$$BC = 2x + 5,$$

$$QR = 17,$$

determine x .

- 9. Em um triângulo isósceles ABC :

$$AB = AC.$$

O ponto D é o ponto médio de BC .

Explique por que:

$$\triangle ABD \cong \triangle ACD.$$

- 10. Explique como a congruência do item anterior permite concluir que os ângulos da base de um triângulo isósceles possuem a mesma medida.

46.1 Gabarito da avaliação final

Resolução

1. Dois triângulos são congruentes quando possuem a mesma forma e o mesmo tamanho, com lados e ângulos correspondentes de mesma medida.

2. Como:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF,$$

temos:

$$A \leftrightarrow D,$$

$$B \leftrightarrow E,$$

$$C \leftrightarrow F.$$

Logo:

a)

$$\boxed{AB \leftrightarrow DE}$$

b)

$$\boxed{AC \leftrightarrow DF}$$

c)

$$\boxed{\hat{B} \leftrightarrow \hat{E}}$$

3. No caso LLL, os três lados de um triângulo são respectivamente congruentes aos três lados do outro. Isso garante:

$$\boxed{\triangle ABC \cong \triangle DEF.}$$

4. No caso LAL, dois lados correspondentes e o ângulo compreendido entre eles possuem as mesmas medidas.
5. No caso ALA, dois ângulos correspondentes e o lado compreendido entre eles possuem as mesmas medidas.
6. Os três ângulos determinam a forma do triângulo, mas não seu tamanho. Portanto, triângulos com ângulos iguais podem possuir lados proporcionais de diferentes comprimentos.

Logo:

$$\boxed{AAA \text{ não garante congruência.}}$$

7. Temos:

$$AB = DE,$$

$$AC = DF,$$

e:

$$\widehat{A} = \widehat{D}.$$

O ângulo é compreendido entre os lados.

Portanto, por LAL:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

8. Da congruência:

$$BC = QR.$$

Logo:

$$2x + 5 = 17.$$

Então:

$$2x = 12.$$

Portanto:

$$x = 6.$$

9. Temos:

$$AB = AC$$

por ser isósceles;

$$BD = DC$$

porque D é ponto médio;

e:

$$AD = AD$$

pelo lado comum.

Assim, por LLL:

$$\triangle ABD \cong \triangle ACD.$$

10. Pela congruência, ângulos correspondentes possuem a mesma medida.

O ângulo em B corresponde ao ângulo em C .

Portanto:

$$\hat{B} = \hat{C}.$$

47 Conclusão

A congruência de triângulos permite demonstrar que dois triângulos possuem exatamente a mesma forma e o mesmo tamanho sem precisar comparar individualmente todos os seus lados e ângulos.

As principais ideias estudadas foram:

- 1) triângulos congruentes possuem lados e ângulos correspondentes de mesma medida;
- 2) a ordem das letras na notação:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

determina a correspondência entre os vértices;

- 3) o caso LLL utiliza três pares de lados correspondentes;
- 4) o caso LAL utiliza dois lados e o ângulo compreendido;
- 5) o caso ALA utiliza dois ângulos e o lado compreendido;
- 6) o caso AAL decorre do fato de que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180° ;
- 7) AAA não garante congruência, pois não determina o tamanho;
- 8) LLA não é um caso geral de congruência;
- 9) lados comuns podem ser utilizados em demonstrações pela propriedade reflexiva;
- 10) uma vez demonstrada a congruência, podemos concluir a igualdade de quaisquer elementos correspondentes;
- 11) a congruência é uma ferramenta fundamental para demonstrar propriedades de triângulos e quadriláteros.

Notação

Resumo final:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

significa:

$$A \leftrightarrow D, \quad B \leftrightarrow E, \quad C \leftrightarrow F.$$

Principais critérios:

LLL

LAL

ALA

AAL

mas:

AAA não garante congruência

e:

LLA não garante congruência em geral.

Por fim:

triângulos congruentes $\Rightarrow$ elementos correspondentes de mesma medida.

Fim do curso