

Comprimento da Circunferência

Matemática – 8º Ano

Número π , fórmulas $C = \pi d = 2\pi r$, comprimento de arcos e aplicações

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste curso, o estudante deverá ser capaz de:

1) distinguir círculo e circunferência;

2) reconhecer centro, raio e diâmetro;

3) utilizar corretamente a relação:

$$d = 2r;$$

4) compreender o significado geométrico do número:

$$\pi;$$

5) compreender a razão:

$$\frac{C}{d} = \pi;$$

6) deduzir:

$$C = \pi d;$$

7) deduzir:

$$C = 2\pi r;$$

8) calcular comprimentos exatos em termos de π ;

9) calcular aproximações utilizando:

$$\pi \approx 3,14;$$

10) determinar raio ou diâmetro a partir do comprimento da circunferência;

11) calcular comprimentos de semicircunferências;

12) distinguir semicircunferência de perímetro de um semicírculo;

13) calcular comprimento de arcos;

14) relacionar ângulo central e comprimento de arco;

15) resolver problemas envolvendo rodas e número de voltas;

16) determinar distâncias percorridas em movimentos de rolamento ideal;

17) trabalhar com circunferências concêntricas;

18) comparar comprimentos quando o raio é alterado;

19) resolver problemas de perímetro envolvendo segmentos e arcos.

Sumário

1	Introdução	1
2	Circunferência e círculo	1
3	Círculo	2
4	Comprimento da circunferência	2
5	Comprimento não é área	2
6	Raio	3
7	Diâmetro	3
8	Representação	4
9	O número π	4
10	Definição geométrica de π	4
11	Valor aproximado	5
12	Dedução de $C = \pi d$	5
13	Dedução de $C = 2\pi r$	5
14	Teorema fundamental	6
15	As duas fórmulas são equivalentes	6
16	Exemplo com raio	6
17	Exemplo com diâmetro	7
18	Forma exata e aproximada	8
19	Cuidado com o símbolo de aproximação	9
20	Determinação do raio pelo comprimento	9
21	Exemplo inverso com raio	9

22	Determinação do diâmetro pelo comprimento	10
23	Exemplo inverso com diâmetro	10
24	Relação entre comprimento e raio	11
25	Dobrar o raio	11
26	Triplicar o raio	12
27	Comparação com a área	12
28	Semicircunferência	13
29	Cuidado: semicircunferência e perímetro do semicírculo	13
30	Exemplo com semicírculo	14
31	Quarto de circunferência	14
32	Perímetro de um quarto de círculo	15
33	Arco de circunferência	15
34	Ângulo central	15
35	Comprimento de arco	16
36	Dedução da fórmula do arco	16
37	Exemplo: arco de 90°	17
38	Exemplo: arco de 60°	17
39	Exemplo: arco de 120°	18
40	Determinação do ângulo pelo arco	18
41	Exemplo inverso de arco	19
42	Rodas e deslocamento	19
43	Número de voltas	20

44 Distância percorrida	20
45 Exemplo com roda	20
46 Exemplo com várias voltas	21
47 Exemplo para determinar o número de voltas	22
48 Problema com bicicleta	23
49 Rolamento sem deslizamento	24
50 Circunferências concêntricas	24
51 Diferença entre comprimentos	25
52 Exemplo com pistas concêntricas	25
53 Perímetros com arcos	26
54 Exemplo: semicírculo com diâmetro	26
55 Exemplo: quarto de círculo	27
56 Exemplo numérico de perímetro misto	27
57 Arcos em polígonos regulares inscritos	27
58 Exemplo: hexágono regular	28
59 Comprimento e proporcionalidade	28
60 Exemplo de comparação	29
61 Unidades diferentes	29
62 Exemplo com conversão	30
63 Estratégia geral	30
64 Erros comuns	31
65 Mapa conceitual	33

66	Resumo teórico	34
67	Exercícios	35
67.1	Parte A – Conceitos	35
67.2	Parte B – Raio e diâmetro	35
67.3	Parte C – Comprimento pelo raio	35
67.4	Parte D – Comprimento pelo diâmetro	36
67.5	Parte E – Aproximações	36
67.6	Parte F – Problemas inversos	37
67.7	Parte G – Semicircunferência	37
67.8	Parte H – Comprimento de arcos	37
67.9	Parte I – Ângulo central	38
67.10	Parte J – Rodas	38
67.11	Parte K – Número de voltas	39
67.12	Parte L – Circunferências concêntricas	39
67.13	Parte M – Proporcionalidade	40
67.14	Parte N – Perímetros mistos	40
67.15	Parte O – Aplicações	40
68	Gabarito comentado	41
68.1	Parte A	41
68.2	Parte B	41
68.3	Parte C	42
68.4	Parte D	42
68.5	Parte E	43
68.6	Parte F	43
68.7	Parte G	44
68.8	Parte H	45
68.9	Parte I	46
68.10	Parte J	47
68.11	Parte K	48
68.12	Parte L	48
68.13	Parte M	49
68.14	Parte N	49
68.15	Parte O	50

69 Avaliação final	51
69.1 Gabarito da avaliação final	52
70 Conclusão	55

1 Introdução

O comprimento da circunferência aparece em inúmeros contextos:

- bordas de objetos circulares;
- rodas e pneus;
- engrenagens;
- pistas circulares;
- cabos envolvendo cilindros;
- jardins circulares;
- mecanismos de rotação.

Para calcular essa medida, utilizaremos uma das relações mais importantes da Geometria:

$$C = 2\pi r.$$

Também podemos escrever:

$$C = \pi d.$$

O objetivo deste curso é compreender por que essas fórmulas funcionam e como utilizá-las corretamente.

2 Circunferência e círculo

Definição 2.1: Circunferência

Uma **circunferência** de centro O e raio r é o conjunto dos pontos do plano que estão exatamente à distância r de O .

Em símbolos:

$$OP = r.$$

A circunferência é o:

$$\text{contorno.}$$

3 Círculo

Definição 3.1: Círculo

O **círculo** é a região formada pela circunferência e por todos os pontos localizados em seu interior.

Portanto:

$$\text{circunferência} = \text{contorno}$$

e:

$$\text{círculo} = \text{região}.$$

4 Comprimento da circunferência

Definição 4.1: Comprimento da circunferência

O **comprimento da circunferência** é a medida total de seu contorno.

Podemos representá-lo por:

$$C.$$

Em alguns livros também encontramos:

$$L.$$

Neste curso utilizaremos:

$$\boxed{C.}$$

5 Comprimento não é área

Atenção

O comprimento da circunferência é uma medida **linear**.
Logo, suas unidades são:

$$\text{cm}, \quad \text{m}, \quad \text{km},$$

e não:

$$\text{cm}^2, \quad \text{m}^2.$$

Por exemplo:

e não:

$$C = 20\pi \text{ cm}$$

$$20\pi \text{ cm}^2.$$

6 Raio

Definição 6.1: Raio

O raio é o segmento que liga o centro da circunferência a qualquer ponto pertencente a ela.

Sua medida será indicada por:

$$r.$$

7 Diâmetro

Definição 7.1: Diâmetro

O diâmetro é um segmento que liga dois pontos da circunferência e passa pelo centro.

Sua medida será indicada por:

$$d.$$

Como o diâmetro contém dois raios:

$$d = r + r.$$

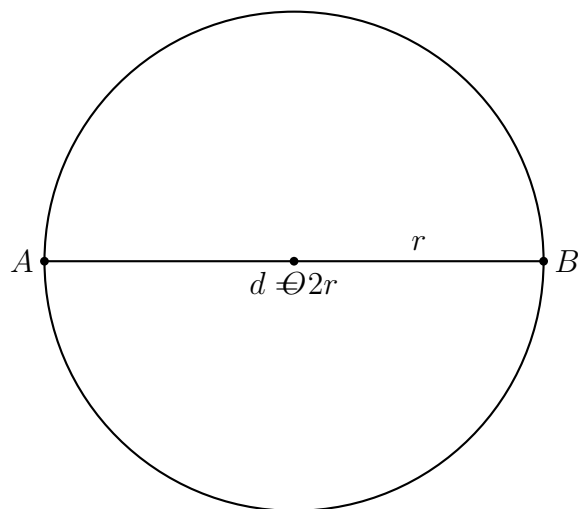
Portanto:

$$d = 2r.$$

Consequentemente:

$$r = \frac{d}{2}.$$

8 Representação



9 O número π

O número π surge da comparação entre o comprimento de qualquer circunferência e seu diâmetro.

Experimentalmente, se medirmos vários objetos circulares e calcularmos:

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{diâmetro}},$$

obteremos sempre aproximadamente:

$$3,14.$$

Essa constante é:

$$\boxed{\pi}.$$

10 Definição geométrica de π

Definição 10.1: Número π

O número π é a razão constante entre o comprimento C de uma circunferência e seu diâmetro d :

$$\boxed{\pi = \frac{C}{d}}.$$

Essa razão é a mesma para todas as circunferências.

11 Valor aproximado

O número π é irracional.

Sua expansão decimal começa por:

$$\pi = 3,14159265358979 \dots$$

No 8º ano, utilizaremos frequentemente:

$$\pi \approx 3,14.$$

Em respostas exatas, mantemos:

$$\pi.$$

12 Dedução de $C = \pi d$

Partimos da definição:

$$\pi = \frac{C}{d}.$$

Multiplicando os dois lados por:

$$d,$$

temos:

$$\pi d = C.$$

Portanto:

$$C = \pi d.$$

13 Dedução de $C = 2\pi r$

Sabemos que:

$$d = 2r.$$

Substituindo em:

$$C = \pi d,$$

obtemos:

$$C = \pi(2r).$$

Logo:

$$\boxed{C = 2\pi r.}$$

14 Teorema fundamental

Teorema 14.1: Comprimento da circunferência

O comprimento de uma circunferência de raio r e diâmetro d é:

$$\boxed{C = 2\pi r}$$

ou, equivalentemente,

$$\boxed{C = \pi d.}$$

15 As duas fórmulas são equivalentes

Como:

$$d = 2r,$$

temos:

$$\pi d = \pi(2r) = 2\pi r.$$

Portanto:

$$\boxed{\pi d = 2\pi r.}$$

A escolha da fórmula depende da informação fornecida pelo problema.

16 Exemplo com raio

Exemplo

Uma circunferência possui raio:

5 cm.

Determine seu comprimento.

Resolução

Utilizamos:

$$C = 2\pi r.$$

Então:

$$C = 2\pi \cdot 5.$$

Logo:

$$C = 10\pi \text{ cm.}$$

Usando:

$$\pi \approx 3,14,$$

temos:

$$C \approx 10 \cdot 3,14.$$

Portanto:

$$C \approx 31,4 \text{ cm.}$$

17 Exemplo com diâmetro

Exemplo

Uma circunferência possui diâmetro:

$$12 \text{ m.}$$

Determine seu comprimento.

Resolução

Como o diâmetro é conhecido, podemos usar:

$$C = \pi d.$$

Logo:

$$C = 12\pi.$$

Portanto:

$$C = 12\pi \text{ m.}$$

Usando:

$$\pi \approx 3,14 :$$

$$C \approx 12 \cdot 3,14.$$

$$C \approx 37,68 \text{ m.}$$

18 Forma exata e aproximada

Se encontramos:

$$C = 18\pi \text{ cm,}$$

essa é uma resposta:

exata.

Ao utilizar:

$$\pi \approx 3,14,$$

temos:

$$C \approx 56,52 \text{ cm.}$$

Essa é uma resposta:

aproximada.

19 Cuidado com o símbolo de aproximação

Atenção

Não devemos escrever:

$$18\pi = 56,52.$$

Como:

$$\pi \neq 3,14$$

exatamente, devemos escrever:

$$18\pi \approx 56,52.$$

20 Determinação do raio pelo comprimento

Se:

$$C = 2\pi r,$$

podemos isolar r .

Dividindo por:

$$2\pi,$$

temos:

$$r = \frac{C}{2\pi}.$$

21 Exemplo inverso com raio

Exemplo

Uma circunferência possui comprimento:

$$20\pi \text{ cm.}$$

Determine o raio.

Resolução

Temos:

$$20\pi = 2\pi r.$$

Dividindo por:

$$2\pi :$$

$$r = 10.$$

Portanto:

$$\boxed{r = 10 \text{ cm.}}$$

22 Determinação do diâmetro pelo comprimento

Partindo de:

$$C = \pi d,$$

dividimos por π :

$$\boxed{d = \frac{C}{\pi}.$$

23 Exemplo inverso com diâmetro

Exemplo

Uma circunferência possui:

$$C = 18\pi \text{ m.}$$

Determine seu diâmetro.

Resolução

$$18\pi = \pi d.$$

Dividindo por π :

$$d = 18.$$

Logo:

$$d = 18 \text{ m.}$$

24 Relação entre comprimento e raio

A fórmula:

$$C = 2\pi r$$

mostra que o comprimento é **diretamente proporcional** ao raio.

Isso significa que, se o raio é multiplicado por um fator k , o comprimento também é multiplicado por k .

25 Dobrar o raio

Se:

$$r \longmapsto 2r,$$

então:

$$C' = 2\pi(2r).$$

Logo:

$$C' = 4\pi r.$$

Como:

$$C = 2\pi r,$$

temos:

$$C' = 2C.$$

Portanto:

dobrar o raio dobra o comprimento da circunferência.

26 Triplicar o raio

Se:

$$r \longmapsto 3r,$$

então:

$$C' = 2\pi(3r) = 6\pi r.$$

Como:

$$C = 2\pi r,$$

temos:

$$C' = 3C.$$

Logo:

triplicar o raio triplica o comprimento.

27 Comparação com a área

A área do círculo é:

$$A = \pi r^2.$$

O comprimento da circunferência é:

$$C = 2\pi r.$$

Portanto:

$$C \propto r$$

enquanto:

$$A \propto r^2.$$

Observação

Se o raio dobra:

$$C \rightarrow 2C,$$

mas:

$$A \rightarrow 4A.$$

Essa diferença é fundamental.

28 Semicircunferência

Definição 28.1: Semicircunferência

Uma semicircunferência corresponde a metade do comprimento de uma circunferência.

Como:

$$C = 2\pi r,$$

metade é:

$$\frac{2\pi r}{2}.$$

Logo:

$$L_{\text{semicircunferência}} = \pi r.$$

29 Cuidado: semicircunferência e perímetro do semicírculo

Esses dois conceitos são diferentes.

A **semicircunferência** é apenas o arco curvo.

Seu comprimento é:

$$\pi r.$$

O **perímetro do semicírculo** inclui:

- a semicircunferência;
- o diâmetro.

Portanto:

$$P = \pi r + 2r.$$

Logo:

$$P_{\text{semicírculo}} = \pi r + 2r.$$

30 Exemplo com semicírculo

Exemplo

Um semicírculo possui raio:

$$6 \text{ cm.}$$

Determine:

- a) o comprimento da semicircunferência;
- b) o perímetro completo do semicírculo.

Resolução

a)

$$L = \pi r.$$

Então:

$$L = 6\pi \text{ cm.}$$

b)

Adicionamos o diâmetro:

$$d = 12 \text{ cm.}$$

Logo:

$$P = 6\pi + 12.$$

Portanto:

$$P = (6\pi + 12) \text{ cm.}$$

31 Quarto de circunferência

Um quarto da circunferência possui comprimento:

$$\frac{1}{4} \cdot 2\pi r.$$

Logo:

$$L_{\frac{1}{4}} = \frac{\pi r}{2}.$$

32 Perímetro de um quarto de círculo

Se queremos o perímetro da região correspondente a um quarto de círculo, devemos adicionar os dois raios.

Portanto:

$$P = \frac{\pi r}{2} + r + r.$$

Logo:

$$P = \frac{\pi r}{2} + 2r.$$

33 Arco de circunferência

Definição 33.1: Arco

Um **arco de circunferência** é uma parte da própria circunferência compreendida entre dois pontos.

O comprimento de um arco depende:

- do raio;
- do ângulo central associado.

34 Ângulo central

Definição 34.1: Ângulo central

Um ângulo central é um ângulo cujo vértice coincide com o centro da circunferência.

Se:

$$\widehat{AOB} = \theta,$$

então o arco:

AB

representa a fração:

$$\frac{\theta}{360^\circ}$$

da circunferência completa.

35 Comprimento de arco

Teorema 35.1: Comprimento de arco

Em uma circunferência de raio r , um arco associado a um ângulo central θ possui comprimento:

$$L = \frac{\theta}{360^\circ} \cdot 2\pi r.$$

Equivalentemente:

$$L = \frac{\theta}{360^\circ} \pi d.$$

36 Dedução da fórmula do arco

Uma volta completa possui:

$$360^\circ$$

e comprimento:

$$2\pi r.$$

Portanto, um ângulo de:

$$\theta$$

corresponde à fração:

$$\frac{\theta}{360^\circ}.$$

Logo:

$$L = \frac{\theta}{360^\circ} \cdot 2\pi r.$$

Assim:

$$L = \frac{\theta}{360^\circ} 2\pi r.$$

37 Exemplo: arco de 90°

Exemplo

Uma circunferência possui raio:

8 cm.

Determine o comprimento de um arco correspondente a:

90° .

Resolução

$$L = \frac{90}{360} \cdot 2\pi \cdot 8.$$

Como:

$$\frac{90}{360} = \frac{1}{4},$$

temos:

$$L = \frac{1}{4} \cdot 16\pi.$$

Logo:

$$L = 4\pi \text{ cm.}$$

38 Exemplo: arco de 60°

Exemplo

Uma circunferência possui raio:

6 cm.

Determine o comprimento de um arco de:

60° .

Resolução

$$L = \frac{60}{360} \cdot 2\pi \cdot 6.$$

Como:

$$\frac{60}{360} = \frac{1}{6},$$

temos:

$$L = \frac{1}{6} \cdot 12\pi.$$

Logo:

$$L = 2\pi \text{ cm.}$$

39 Exemplo: arco de 120°

Exemplo

Uma circunferência possui raio:

9 m.

Determine o arco de:

120° .

Resolução

$$L = \frac{120}{360} \cdot 2\pi \cdot 9.$$

$$L = \frac{1}{3} \cdot 18\pi.$$

Logo:

$$L = 6\pi \text{ m.}$$

40 Determinação do ângulo pelo arco

Também podemos resolver problemas inversos.

Se:

$$L = \frac{\theta}{360^\circ} \cdot C,$$

então:

$$\frac{L}{C} = \frac{\theta}{360^\circ}.$$

Logo:

$$\theta = 360^\circ \frac{L}{C}.$$

41 Exemplo inverso de arco

Exemplo

Uma circunferência possui comprimento total:

$$24\pi \text{ cm.}$$

Um arco possui comprimento:

$$8\pi \text{ cm.}$$

Determine seu ângulo central.

Resolução

A fração da circunferência é:

$$\frac{8\pi}{24\pi} = \frac{1}{3}.$$

Logo:

$$\theta = \frac{1}{3} \cdot 360^\circ.$$

Portanto:

$$\theta = 120^\circ.$$

42 Rodas e deslocamento

Quando uma roda gira sem escorregar, uma volta completa corresponde a um deslocamento igual ao comprimento da circunferência.

Assim:

$$\text{distância por volta} = 2\pi r.$$

43 Número de voltas

Se uma roda percorre uma distância total D e cada volta corresponde a um comprimento C , então:

$$D = nC,$$

onde n é o número de voltas.

Portanto:

$$n = \frac{D}{C}.$$

44 Distância percorrida

Se uma roda realiza:

$$n$$

voltas completas, então:

$$D = n \cdot 2\pi r.$$

Ou:

$$D = n\pi d.$$

45 Exemplo com roda

Exemplo

Uma roda possui raio:

35 cm.

Quantos centímetros ela percorre em uma volta completa?

Resolução

$$C = 2\pi r.$$

Logo:

$$C = 2\pi \cdot 35.$$

Portanto:

$$C = 70\pi \text{ cm.}$$

Usando:

$$\pi \approx 3,14 :$$

$$C \approx 219,8 \text{ cm.}$$

46 Exemplo com várias voltas

Exemplo

Uma roda de raio:

20 cm

realiza:

50

voltas completas.

Determine a distância percorrida.

Resolução

Uma volta:

$$C = 2\pi \cdot 20 = 40\pi \text{ cm.}$$

Em 50 voltas:

$$D = 50 \cdot 40\pi.$$

Logo:

$$D = 2000\pi \text{ cm.}$$

Portanto:

$$D = 2000\pi \text{ cm.}$$

Convertendo para metros:

$$2000\pi \text{ cm} = 20\pi \text{ m.}$$

Logo:

$$D = 20\pi \text{ m.}$$

47 Exemplo para determinar o número de voltas

Exemplo

Uma roda possui comprimento:

$$2 \text{ m}$$

e percorre:

$$100 \text{ m.}$$

Quantas voltas completas realiza?

Resolução

$$n = \frac{D}{C}.$$

Logo:

$$n = \frac{100}{2}.$$

Portanto:

$$\boxed{n = 50.}$$

48 Problema com bicicleta

Exemplo

Uma roda de bicicleta possui diâmetro:

70 cm.

Utilizando:

$$\pi \approx 3,14,$$

determine a distância percorrida em:

100

voltas.

Resolução

Comprimento de uma volta:

$$C = \pi d.$$

Então:

$$C \approx 3,14 \cdot 70.$$

$$C \approx 219,8 \text{ cm.}$$

Em 100 voltas:

$$D = 100 \cdot 219,8.$$

$$D = 21\,980 \text{ cm.}$$

Convertendo:

$$21\,980 \text{ cm} = 219,8 \text{ m.}$$

Portanto:

$$D \approx 219,8 \text{ m.}$$

49 Rolamento sem deslizamento

Observação

As relações entre número de voltas e distância percorrida pressupõem um modelo ideal em que a roda:

rola sem escorregar.

Em situações reais, deslizamentos ou deformações podem introduzir pequenas diferenças.

50 Circunferências concêntricas

Definição 50.1: Circunferências concêntricas

Duas circunferências são **concêntricas** quando possuem o mesmo centro.

Considere raios:

$$R$$

e:

$$r,$$

com:

$$R > r.$$

Seus comprimentos são:

$$C_R = 2\pi R$$

e:

$$C_r = 2\pi r.$$

51 Diferença entre comprimentos

A diferença é:

$$C_R - C_r = 2\pi R - 2\pi r.$$

Colocando:

$$2\pi$$

em evidência:

$$C_R - C_r = 2\pi(R - r).$$

52 Exemplo com pistas concêntricas

Exemplo

Duas pistas circulares concêntricas possuem raios:

$$20 \text{ m}$$

e:

$$22 \text{ m}.$$

Determine a diferença entre os comprimentos de uma volta.

Resolução

$$\Delta C = 2\pi(22 - 20).$$

$$\Delta C = 2\pi \cdot 2.$$

Logo:

$$\Delta C = 4\pi \text{ m.}$$

Utilizando:

$$\pi \approx 3,14 :$$

$$\Delta C \approx 12,56 \text{ m.}$$

53 Perímetros com arcos

Algumas figuras possuem contornos formados por:

- segmentos de reta;
- arcos de circunferência.

Para determinar seu perímetro, devemos somar **todas** as partes do contorno.

54 Exemplo: semicírculo com diâmetro

Já vimos que:

$$P = \pi r + 2r.$$

Observe que:

$$\pi r$$

corresponde à parte curva e:

$$2r$$

ao segmento reto.

55 Exemplo: quarto de círculo

Para uma região correspondente a um quarto de círculo:

$$P = \frac{1}{4}(2\pi r) + 2r.$$

Logo:

$$P = \frac{\pi r}{2} + 2r.$$

56 Exemplo numérico de perímetro misto

Exemplo

Um quarto de círculo possui raio:

10 cm.

Determine seu perímetro.

Resolução

Parte curva:

$$L = \frac{\pi r}{2}.$$

Então:

$$L = \frac{10\pi}{2} = 5\pi.$$

Os dois raios somam:

$$10 + 10 = 20.$$

Logo:

$$P = (5\pi + 20) \text{ cm.}$$

57 Arcos em polígonos regulares inscritos

Em um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência, os vértices consecutivos dividem a circunferência em:

n

arcos congruentes.

Cada arco corresponde ao ângulo:

$$\frac{360^\circ}{n}.$$

Seu comprimento é:

$$L = \frac{1}{n} \cdot 2\pi r.$$

Portanto:

$$L = \frac{2\pi r}{n}.$$

58 Exemplo: hexágono regular

Em um hexágono regular inscrito:

$$n = 6.$$

Logo, cada arco mede:

$$\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ.$$

Seu comprimento é:

$$L = \frac{2\pi r}{6}.$$

Assim:

$$L = \frac{\pi r}{3}.$$

59 Comprimento e proporcionalidade

Podemos comparar duas circunferências.

Se:

$$C_1 = 2\pi r_1$$

e:

$$C_2 = 2\pi r_2,$$

então:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{2\pi r_1}{2\pi r_2}.$$

Simplificando:

$$\boxed{\frac{C_1}{C_2} = \frac{r_1}{r_2}}.$$

Logo, a razão entre os comprimentos é igual à razão entre os raios.

60 Exemplo de comparação

Exemplo

Duas circunferências possuem raios:

4 cm

e:

10 cm.

Qual é a razão entre seus comprimentos?

Resolução

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{4}{10}.$$

Simplificando:

$$\boxed{\frac{C_1}{C_2} = \frac{2}{5}}.$$

61 Unidades diferentes

Atenção

Antes de aplicar:

$$C = 2\pi r,$$

devemos garantir que todas as medidas estejam em unidades compatíveis.

Por exemplo, se o raio é:

0,5 m,

o resultado natural será em:

m.

62 Exemplo com conversão

Exemplo

Uma circunferência possui raio:

50 cm.

Determine seu comprimento em metros.

Resolução

Primeiro:

$$50 \text{ cm} = 0,5 \text{ m.}$$

Então:

$$C = 2\pi(0,5).$$

Logo:

$$C = \pi \text{ m.}$$

Aproximadamente:

$$C \approx 3,14 \text{ m.}$$

63 Estratégia geral

Notação

Ao resolver problemas de comprimento da circunferência:

1) identifique se o dado é raio ou diâmetro;

2) se necessário, utilize:

$$d = 2r$$

ou:

$$r = \frac{d}{2};$$

3) escolha:

$$C = 2\pi r$$

ou:

$$C = \pi d;$$

4) mantenha π para uma resposta exata;

5) utilize:

$$\pi \approx 3,14$$

somente para aproximações;

6) em arcos, determine a fração:

$$\frac{\theta}{360^\circ};$$

7) em perímetros mistos, some segmentos e arcos;

8) em problemas de rodas, relacione:

$$D = nC;$$

9) escreva corretamente a unidade linear;

10) verifique se o resultado é coerente com as dimensões dadas.

64 Erros comuns

Atenção

Erro 1: confundir comprimento com área.

Comprimento:

$$C = 2\pi r$$

e unidade:

$$\text{cm, m, } \dots$$

Área:

$$A = \pi r^2$$

e unidade quadrada.

Atenção

Erro 2: esquecer o fator 2.

A fórmula não é:

$$C = \pi r.$$

A fórmula correta é:

$$C = 2\pi r.$$

Atenção

Erro 3: utilizar o diâmetro em $2\pi r$.

Se o valor fornecido é um diâmetro, devemos usar:

$$C = \pi d$$

ou calcular primeiro:

$$r = \frac{d}{2}.$$

Atenção

Erro 4: usar unidade quadrada.

O comprimento de uma circunferência de raio 4 cm é:

$$8\pi \text{ cm},$$

e não:

$$8\pi \text{ cm}^2.$$

Atenção

Erro 5: confundir semicircunferência e perímetro do semicírculo.

Semicircunferência:

$$\boxed{\pi r}.$$

Perímetro do semicírculo:

$$\boxed{\pi r + 2r}.$$

Atenção

Erro 6: esquecer os segmentos retos em figuras compostas.

O perímetro é formado por todo o contorno, não apenas pelos arcos.

Atenção

Erro 7: utilizar diretamente θ como multiplicador do comprimento.

Para um arco:

$$\boxed{L = \frac{\theta}{360^\circ} 2\pi r.}$$

Atenção

Erro 8: pensar que dobrar o raio quadruplica o comprimento.

Isso ocorre com a área.

Para comprimento:

$$r \rightarrow 2r \implies C \rightarrow 2C.$$

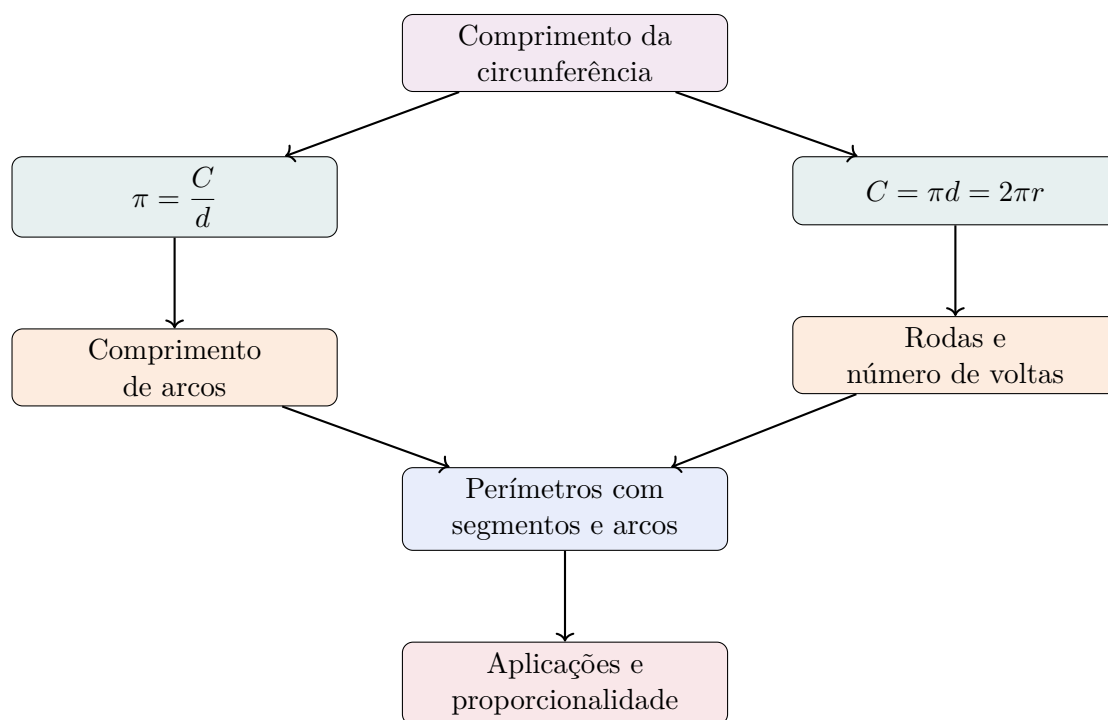
Atenção

Erro 9: esquecer de converter unidades em problemas de rodas.

Por exemplo:

$$2000 \text{ cm} = 20 \text{ m}.$$

65 Mapa conceitual



66 Resumo teórico

Situação	Fórmula
Diâmetro	$d = 2r$
Raio	$r = \frac{d}{2}$
Comprimento	$C = 2\pi r$
Comprimento pelo diâmetro	$C = \pi d$
Semicircunferência	$L = \pi r$
Perímetro do semicírculo	$P = \pi r + 2r$
Arco	$L = \frac{\theta}{360^\circ} 2\pi r$
Distância por n voltas	$D = n 2\pi r$
Número de voltas	$n = \frac{D}{C}$

Notação

Fórmulas fundamentais:

$$\pi = \frac{C}{d}$$

$$C = \pi d$$

$$C = 2\pi r$$

$$d = 2r$$

Comprimento de arco:

$$L = \frac{\theta}{360^\circ} 2\pi r.$$

Número de voltas:

$$n = \frac{D}{C}.$$

Distância percorrida:

$$D = nC.$$

Proporcionalidade:

$$r \rightarrow kr \implies C \rightarrow kC.$$

67 Exercícios

67.1 Parte A – Conceitos

Exercício

Responda:

- a) Qual é a diferença entre círculo e circunferência?
- b) O que significa comprimento da circunferência?
- c) O que é um raio?
- d) O que é um diâmetro?
- e) Qual relação define o número π ?

67.2 Parte B – Raio e diâmetro

Exercício

Determine a medida desconhecida.

- a)
- $r = 9 \text{ cm.}$

Determine d .

- b)
- $d = 30 \text{ cm.}$

Determine r .

- c)
- $r = 4,5 \text{ m.}$

Determine d .

- d)
- $d = 7,2 \text{ m.}$

Determine r .

67.3 Parte C – Comprimento pelo raio

Exercício

Determine o comprimento exato.

- a)
- $r = 3 \text{ cm;}$

b)

$$r = 8 \text{ cm};$$

c)

$$r = 12 \text{ m};$$

d)

$$r = 2,5 \text{ cm}.$$

67.4 Parte D – Comprimento pelo diâmetro

Exercício

Determine o comprimento exato.

a)

$$d = 10 \text{ cm};$$

b)

$$d = 16 \text{ cm};$$

c)

$$d = 25 \text{ m};$$

d)

$$d = 7,5 \text{ m}.$$

67.5 Parte E – Aproximações

Exercício

Utilize:

$$\pi \approx 3,14.$$

Calcule aproximadamente o comprimento das circunferências.

a)

$$r = 4 \text{ cm};$$

b)

$$r = 7 \text{ cm};$$

c)

$$d = 20 \text{ m};$$

d)

$$d = 6 \text{ cm}.$$

67.6 Parte F – Problemas inversos

Exercício

Determine o raio e o diâmetro.

- a) $C = 12\pi \text{ cm};$
- b) $C = 30\pi \text{ cm};$
- c) $C = 44\pi \text{ m}.$

67.7 Parte G – Semicircunferência

Exercício

Determine:

- a) o comprimento da semicircunferência de raio:
 $8 \text{ cm};$
- b) o perímetro do semicírculo de raio:
 $8 \text{ cm};$
- c) o comprimento da semicircunferência de diâmetro:
 $20 \text{ cm};$
- d) o perímetro completo dessa região.

67.8 Parte H – Comprimento de arcos

Exercício

Calcule o comprimento dos arcos.

- a) $r = 6 \text{ cm}, \quad \theta = 90^\circ;$
- b) $r = 9 \text{ cm}, \quad \theta = 120^\circ;$
- c) $r = 10 \text{ cm}, \quad \theta = 36^\circ;$

d)

$$r = 12 \text{ m}, \quad \theta = 45^\circ.$$

67.9 Parte I – Ângulo central

Exercício

Uma circunferência possui comprimento:

$$30\pi \text{ cm.}$$

Determine o ângulo central de um arco cujo comprimento é:

a)

$$5\pi \text{ cm;}$$

b)

$$10\pi \text{ cm;}$$

c)

$$15\pi \text{ cm.}$$

67.10 Parte J – Rodas

Exercício

Uma roda possui raio:

$$30 \text{ cm.}$$

Determine:

a) a distância percorrida em uma volta;

b) a distância percorrida em 20 voltas.

Exercício

Uma roda possui diâmetro:

$$80 \text{ cm.}$$

Utilizando:

$$\pi \approx 3,14,$$

determine aproximadamente a distância percorrida em:

$$50$$

voltas.

67.11 Parte K – Número de voltas

Exercício

Uma roda possui comprimento:

2,5 m.

Quantas voltas realiza para percorrer:

125 m?

Exercício

Uma roda percorre:

60π m

em:

30

voltas.

Determine:

- a) seu comprimento;
- b) seu raio.

67.12 Parte L – Circunferências concêntricas

Exercício

Duas circunferências concêntricas possuem raios:

12 cm

e:

15 cm.

Determine:

- a) os comprimentos;
- b) a diferença entre eles.

67.13 Parte M – Proporcionalidade

Exercício

Responda:

- a) Se o raio dobra, o que acontece com o comprimento?
- b) Se o raio triplica, o que acontece com o comprimento?
- c) Se o raio é reduzido à metade, o que acontece com o comprimento?
- d) Se o raio é multiplicado por 5, por qual fator o comprimento é multiplicado?

67.14 Parte N – Perímetros mistos

Exercício

Determine o perímetro de um semicírculo de raio:

10 cm.

Exercício

Determine o perímetro de um quarto de círculo de raio:

8 cm.

67.15 Parte O – Aplicações

Exercício

Uma pista circular possui raio:

50 m.

Determine o comprimento de uma volta.

Exercício

Uma pessoa percorre:

10

voltas completas nessa pista.

Determine a distância percorrida.

Exercício

Uma roda de bicicleta possui diâmetro:

70 cm.

Utilizando:

$$\pi \approx 3,14,$$

quantas voltas aproximadamente são necessárias para percorrer:

1 km?

68 Gabarito comentado

68.1 Parte A

Resolução

- a) Circunferência é o contorno; círculo é a região interna juntamente com o contorno.
- b) É a medida total do contorno da circunferência.
- c) Raio liga o centro a um ponto da circunferência.
- d) Diâmetro liga dois pontos da circunferência e passa pelo centro.
- e) :

$$\pi = \frac{C}{d}.$$

68.2 Parte B

Resolução

a)

$$d = 2 \cdot 9.$$

$$d = 18 \text{ cm.}$$

b)

$$r = \frac{30}{2}.$$

$$r = 15 \text{ cm.}$$

c)

$$d = 2 \cdot 4,5.$$

$$d = 9 \text{ m.}$$

d)

$$r = \frac{7,2}{2}.$$

$$r = 3,6 \text{ m.}$$

68.3 Parte C

Resolução

a)

$$C = 2\pi \cdot 3.$$

$$C = 6\pi \text{ cm.}$$

b)

$$C = 2\pi \cdot 8.$$

$$C = 16\pi \text{ cm.}$$

c)

$$C = 2\pi \cdot 12.$$

$$C = 24\pi \text{ m.}$$

d)

$$C = 2\pi \cdot 2,5.$$

$$C = 5\pi \text{ cm.}$$

68.4 Parte D

Resolução

a)

$$C = \pi \cdot 10.$$

$$C = 10\pi \text{ cm.}$$

b)

c)

$$C = 16\pi \text{ cm.}$$

d)

$$C = 25\pi \text{ m.}$$

$$C = 7,5\pi \text{ m.}$$

68.5 Parte E

Resolução

a)

$$C \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 4.$$

$$C \approx 25,12 \text{ cm.}$$

b)

$$C \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 7.$$

$$C \approx 43,96 \text{ cm.}$$

c)

$$C \approx 3,14 \cdot 20.$$

$$C \approx 62,8 \text{ m.}$$

d)

$$C \approx 3,14 \cdot 6.$$

$$C \approx 18,84 \text{ cm.}$$

68.6 Parte F

Resolução

a)

$$12\pi = 2\pi r.$$

Logo:

$$r = 6.$$

Então:

$$d = 12.$$

$$r = 6 \text{ cm}, \quad d = 12 \text{ cm}.$$

b)

$$30\pi = 2\pi r.$$

Logo:

$$r = 15.$$

Então:

$$d = 30.$$

$$r = 15 \text{ cm}, \quad d = 30 \text{ cm}.$$

c)

$$44\pi = 2\pi r.$$

Logo:

$$r = 22.$$

Então:

$$d = 44.$$

$$r = 22 \text{ m}, \quad d = 44 \text{ m}.$$

68.7 Parte G

Resolução

a)

$$L = \pi r.$$

$$L = 8\pi \text{ cm}.$$

b)

$$P = \pi r + 2r.$$

$$P = (8\pi + 16) \text{ cm.}$$

c)

Se:

$$d = 20,$$

então:

$$r = 10.$$

Logo:

$$L = 10\pi \text{ cm.}$$

d)

$$P = 10\pi + 20.$$

$$P = (10\pi + 20) \text{ cm.}$$

68.8 Parte H

Resolução

a)

$$L = \frac{90}{360} \cdot 2\pi \cdot 6.$$

$$L = \frac{1}{4} \cdot 12\pi.$$

$$L = 3\pi \text{ cm.}$$

b)

$$L = \frac{120}{360} \cdot 18\pi.$$

$$L = \frac{1}{3} \cdot 18\pi.$$

$$L = 6\pi \text{ cm.}$$

c)

$$L = \frac{36}{360} \cdot 20\pi.$$

$$L = \frac{1}{10} \cdot 20\pi.$$

$$L = 2\pi \text{ cm.}$$

d)

$$L = \frac{45}{360} \cdot 24\pi.$$

$$L = \frac{1}{8} \cdot 24\pi.$$

$$L = 3\pi \text{ m.}$$

68.9 Parte I

Resolução

Usamos:

$$\frac{L}{C} = \frac{\theta}{360^\circ}.$$

a)

$$\frac{5\pi}{30\pi} = \frac{1}{6}.$$

Logo:

$$\theta = \frac{1}{6} \cdot 360^\circ.$$

$$\theta = 60^\circ.$$

b)

$$\frac{10\pi}{30\pi} = \frac{1}{3}.$$

Logo:

$$\theta = 120^\circ.$$

c)

$$\frac{15\pi}{30\pi} = \frac{1}{2}.$$

Logo:

$$\theta = 180^\circ.$$

68.10 Parte J

Resolução

Uma volta:

$$C = 2\pi \cdot 30.$$

$$C = 60\pi \text{ cm.}$$

Em 20 voltas:

$$D = 20 \cdot 60\pi.$$

$$D = 1200\pi \text{ cm.}$$

Logo:

$$D = 1200\pi \text{ cm.}$$

Resolução

No segundo exercício:

$$C \approx 3,14 \cdot 80.$$

$$C \approx 251,2 \text{ cm.}$$

Em 50 voltas:

$$D = 50 \cdot 251,2.$$

$$D = 12\,560 \text{ cm.}$$

Convertendo:

$$12\,560 \text{ cm} = 125,6 \text{ m.}$$

Portanto:

$$D \approx 125,6 \text{ m.}$$

68.11 Parte K

Resolução

1.

$$n = \frac{125}{2,5}.$$

Logo:

$$n = 50.$$

2.

A distância total é:

$$60\pi \text{ m.}$$

Em:

$$30$$

voltas:

$$C = \frac{60\pi}{30}.$$

Logo:

$$C = 2\pi \text{ m.}$$

Agora:

$$2\pi = 2\pi r.$$

Portanto:

$$r = 1 \text{ m.}$$

68.12 Parte L

Resolução

Para:

$$r_1 = 12 :$$

$$C_1 = 24\pi.$$

Para:

$$r_2 = 15 :$$

$$C_2 = 30\pi.$$

Logo:

$$C_1 = 24\pi \text{ cm}, \quad C_2 = 30\pi \text{ cm.}$$

Diferença:

$$30\pi - 24\pi.$$

Portanto:

$$\Delta C = 6\pi \text{ cm.}$$

68.13 Parte M

Resolução

a) Dobra:

$$C \rightarrow 2C.$$

b) Triplica:

$$C \rightarrow 3C.$$

c) Reduz-se à metade:

$$C \rightarrow \frac{C}{2}.$$

d) Multiplica-se por:

$$5.$$

68.14 Parte N

Resolução

Semicírculo de raio 10:

$$P = \pi r + 2r.$$

Logo:

$$P = (10\pi + 20) \text{ cm.}$$

Quarto de círculo de raio 8:

Parte curva:

$$L = \frac{\pi r}{2} = 4\pi.$$

Somamos dois raios:

$$8 + 8 = 16.$$

Portanto:

$$P = (4\pi + 16) \text{ cm.}$$

68.15 Parte O

Resolução

Pista circular

$$C = 2\pi \cdot 50.$$

Logo:

$$C = 100\pi \text{ m.}$$

Em 10 voltas:

$$D = 10 \cdot 100\pi.$$

Logo:

$$D = 1000\pi \text{ m.}$$

Bicicleta

Diâmetro:

$$70 \text{ cm.}$$

Comprimento aproximado:

$$C \approx 3,14 \cdot 70.$$

$$C \approx 219,8 \text{ cm.}$$

Convertendo:

$$219,8 \text{ cm} = 2,198 \text{ m.}$$

A distância é:

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m.}$$

Então:

$$n \approx \frac{1000}{2,198}.$$

$$n \approx 454,96.$$

Portanto:

$$n \approx 455 \text{ voltas.}$$

69 Avaliação final

Avaliação final – Comprimento da circunferência

Resolva as questões abaixo.

1. Explique a diferença entre círculo e circunferência.

2. Escreva a relação entre:

$$C, d, \pi.$$

3. Deduzindo a partir de:

$$C = \pi d$$

e:

$$d = 2r,$$

obtenha a fórmula em função do raio.

4. Uma circunferência possui:

$$r = 7 \text{ cm.}$$

Determine seu comprimento exato.

5. Uma circunferência possui:

$$d = 18 \text{ m.}$$

Determine seu comprimento exato.

6. Utilizando:

$$\pi \approx 3,14,$$

determine aproximadamente o comprimento de uma circunferência de raio:

$$10 \text{ cm.}$$

7. Uma circunferência possui:

$$C = 36\pi \text{ cm.}$$

Determine:

a) o raio;

b) o diâmetro.

8. Uma circunferência possui raio:

$$12 \text{ cm.}$$

Determine o comprimento de um arco de:

$$150^\circ.$$

9. Uma roda de diâmetro:

60 cm

realiza:

100

voltas completas.

Determine a distância exata percorrida.

10. Um semicírculo possui raio:

9 cm.

Determine:

- a) o comprimento apenas da semicircunferência;
- b) o perímetro completo da região semicircular.

69.1 Gabarito da avaliação final

Resolução

1. Circunferência é o contorno; círculo é a região interior juntamente com o contorno.

2. :

$$\pi = \frac{C}{d}$$

ou:

$$C = \pi d.$$

3. Como:

$$d = 2r,$$

substituímos:

$$C = \pi(2r).$$

Logo:

$$C = 2\pi r.$$

4. :

$$C = 2\pi \cdot 7.$$

Portanto:

$$C = 14\pi \text{ cm.}$$

5. :

$$C = \pi d.$$

Então:

$$C = 18\pi \text{ m.}$$

6. :

$$C \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 10.$$

Logo:

$$C \approx 62,8 \text{ cm.}$$

7. :

$$36\pi = 2\pi r.$$

Logo:

$$r = 18.$$

Portanto:

$$r = 18 \text{ cm.}$$

O diâmetro é:

$$d = 36 \text{ cm.}$$

Assim:

$$d = 36 \text{ cm.}$$

8. :

$$L = \frac{150}{360} \cdot 2\pi \cdot 12.$$

Simplificando:

$$\frac{150}{360} = \frac{5}{12}.$$

Então:

$$L = \frac{5}{12} \cdot 24\pi.$$

Logo:

$$L = 10\pi \text{ cm.}$$

9. Uma volta:

$$C = \pi d.$$

Logo:

$$C = 60\pi \text{ cm.}$$

Em 100 voltas:

$$D = 6000\pi \text{ cm.}$$

Convertendo:

$$6000\pi \text{ cm} = 60\pi \text{ m.}$$

Portanto:

$$D = 60\pi \text{ m.}$$

10. :

a) Semicircunferência:

$$L = \pi r.$$

Logo:

$$L = 9\pi \text{ cm.}$$

b) Adicionamos o diâmetro:

$$d = 18 \text{ cm.}$$

Então:

$$P = (9\pi + 18) \text{ cm.}$$

70 Conclusão

O comprimento da circunferência estabelece uma relação fundamental entre o raio, o diâmetro e o número π .

As principais ideias estudadas foram:

1) a circunferência representa o contorno de uma região circular;

2) o comprimento da circunferência é uma grandeza linear;

3) raio e diâmetro satisfazem:

$$d = 2r;$$

4) o número π é definido pela razão:

$$\pi = \frac{C}{d};$$

5) conseqüentemente:

$$C = \pi d;$$

6) utilizando:

$$d = 2r,$$

obtemos:

$$C = 2\pi r;$$

7) uma semicircunferência possui comprimento:

$$\pi r;$$

8) o perímetro de uma região semicircular é:

$$\pi r + 2r;$$

9) o comprimento de um arco de ângulo central θ é:

$$\frac{\theta}{360^\circ} 2\pi r;$$

10) em uma roda que rola sem escorregar, cada volta corresponde ao comprimento da circunferência;

11) o número de voltas pode ser determinado por:

$$n = \frac{D}{C};$$

12) o comprimento da circunferência é diretamente proporcional ao raio.

Notação

Resumo final:

$$d = 2r$$

$$\pi = \frac{C}{d}$$

$$C = \pi d$$

$$C = 2\pi r$$

$$L_{\text{arco}} = \frac{\theta}{360^\circ} 2\pi r$$

$$L_{\text{semicircunferência}} = \pi r$$

$$P_{\text{semicírculo}} = \pi r + 2r$$

$$D = nC$$

$$n = \frac{D}{C}.$$

Além disso:

$$C \propto r.$$

Portanto:

$$r \rightarrow kr \implies C \rightarrow kC.$$

Fim do curso