

Área de Figuras Planas

Matemática – 8º Ano

Unidades de área, quadriláteros, triângulos, decomposição e resolução de problemas

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste curso, o estudante deverá ser capaz de:

- 1) compreender área como medida de uma superfície;
- 2) distinguir comprimento, perímetro e área;
- 3) utilizar corretamente unidades quadradas;
- 4) converter unidades de área;
- 5) calcular a área de retângulos;
- 6) deduzir e utilizar a fórmula da área do quadrado;
- 7) deduzir a área do paralelogramo por decomposição;
- 8) compreender corretamente o conceito de altura;
- 9) deduzir e utilizar a fórmula da área do triângulo;
- 10) calcular a área de triângulos com diferentes bases e alturas;
- 11) deduzir e utilizar a fórmula da área do trapézio;
- 12) deduzir e utilizar a fórmula da área do losango;
- 13) calcular áreas de figuras compostas;
- 14) determinar áreas por adição e subtração;
- 15) resolver problemas inversos envolvendo área;
- 16) comparar figuras de mesmo perímetro e áreas diferentes;
- 17) comparar figuras de mesma área e perímetros diferentes;
- 18) modelar problemas cotidianos envolvendo pisos, terrenos, paredes, plantas e superfícies;
- 19) justificar as fórmulas de área por decomposição, recomposição e congruência.

Sumário

1	Introdução	1
2	Região plana	1
3	Definição intuitiva de área	1
4	Unidade quadrada	1
5	Interpretação de 1 cm^2	2
6	Área e contagem de unidades	2
7	Comprimento, perímetro e área	3
8	Comparação entre perímetro e área	3
9	Unidades usuais de área	4
10	Conversão de unidades de área	4
11	Por que o fator é quadrático?	5
12	Escala das unidades de área	5
13	Exemplo de conversão	6
14	Área do retângulo	6
15	Justificativa da fórmula do retângulo	6
16	Representação do retângulo	7
17	Exemplo com retângulo	7
18	Área do quadrado	8
19	Exemplo com quadrado	9
20	Problema inverso no quadrado	9
21	Área do paralelogramo	9

22 O que é a altura?	10
23 Representação da altura	10
24 Dedução da área do paralelogramo	10
25 Exemplo com paralelogramo	11
26 Mesmo paralelogramo, bases diferentes	11
27 Área do triângulo	12
28 Dedução pelo paralelogramo	12
29 Representação do triângulo	13
30 Exemplo com triângulo	13
31 Altura externa ao triângulo	13
32 Triângulo retângulo	14
33 Exemplo com triângulo retângulo	14
34 Problema inverso no triângulo	15
35 Área do trapézio	15
36 Representação do trapézio	16
37 Dedução da fórmula do trapézio	16
38 Exemplo com trapézio	17
39 Interpretação pela média das bases	17
40 Área do losango	18
41 Por que a fórmula do losango funciona?	18
42 Representação do losango	19
43 Exemplo com losango	19

44	Área do losango pela base e altura	19
45	Resumo das fórmulas fundamentais	20
46	Figuras equivalentes em área	20
47	Exemplo de mesma área	21
48	Mesmo perímetro e áreas diferentes	21
49	Mesma área e perímetros diferentes	22
50	Figuras compostas	22
51	Princípio da aditividade	23
52	Área por subtração	23
53	Exemplo de figura composta	23
54	Exemplo com recorte	24
55	Figura em formato de L	25
56	Exemplo de área em formato de L	25
57	Triangulação	25
58	Área de quadrilátero por diagonal	26
59	Problema com terreno	26
60	Problema com piso	27
61	Problema de custo por metro quadrado	27
62	Problema com desperdício	28
63	Problema algébrico com retângulo	28
64	Problema algébrico com trapézio	29
65	Problema algébrico com losango	29

66 Escala e área	30
67 Exemplo de ampliação	30
68 Dobrar o lado não dobra a área	31
69 Exemplo de redução	31
70 Verificação dimensional	32
71 Medidas em unidades diferentes	32
72 Exemplo com unidades diferentes	32
73 Estratégia geral para problemas de área	33
74 Erros comuns	33
75 Mapa conceitual	35
76 Resumo teórico	35
77 Exercícios	36
77.1 Parte A – Conceitos	36
77.2 Parte B – Conversões	37
77.3 Parte C – Retângulos e quadrados	37
77.4 Parte D – Paralelogramos	38
77.5 Parte E – Triângulos	38
77.6 Parte F – Trapézios	39
77.7 Parte G – Losangos	39
77.8 Parte H – Figuras compostas	40
77.9 Parte I – Aplicações	40
77.10 Parte J – Escala	41
77.11 Parte K – Desafios	41
78 Gabarito comentado	42
78.1 Parte A	42
78.2 Parte B	42
78.3 Parte C	43
78.4 Parte D	43

78.5 Parte E	44
78.6 Parte F	44
78.7 Parte G	45
78.8 Parte H	45
78.9 Parte I	46
78.10Parte J	47
78.11Parte K	47
79 Avaliação final	49
79.1 Gabarito da avaliação final	50
80 Conclusão	53

1 Introdução

Medir uma superfície significa responder a perguntas como:

- quanto piso é necessário para cobrir uma sala?
- qual é a superfície de um terreno?
- quantos metros quadrados de tinta são necessários para uma parede?
- qual região de uma figura plana é maior?

A grandeza utilizada para medir superfícies é a:

área.

O conceito de área está presente em praticamente todos os problemas geométricos envolvendo regiões planas.

2 Região plana

Definição 2.1: Região plana

Uma **região plana** é uma parte do plano delimitada ou descrita por figuras geométricas.

Um retângulo, por exemplo, determina uma região interior.

É essa região que possui uma área.

3 Definição intuitiva de área

Definição 3.1: Área

A **área** de uma região plana é a medida de sua extensão superficial.

Para medir uma área, comparamos a região com uma unidade padrão de superfície.

4 Unidade quadrada

Considere um quadrado cujo lado mede:

1

unidade de comprimento.

Sua área é definida como:

1

1 unidade quadrada.

Se a unidade de comprimento é o centímetro, temos:

1 cm².

Se é o metro:

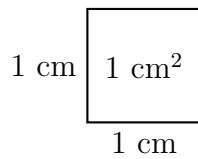
1 m².

5 Interpretação de 1 cm²

1 cm²

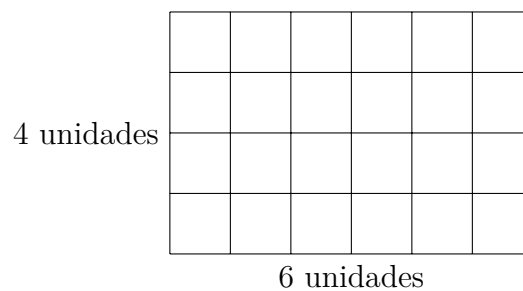
é a área de um quadrado de lado:

1 cm.



6 Área e contagem de unidades

Considere um retângulo dividido em quadrados unitários.



Existem:

6

quadrados em cada linha e:

4

2

linhas.

Logo:

$$6 \cdot 4 = 24.$$

Portanto:

$$A = 24 \text{ unidades}^2.$$

7 Comprimento, perímetro e área

Esses conceitos não devem ser confundidos.

Definição 7.1: Comprimento

Comprimento é uma medida unidimensional, expressa em unidades como:

cm, m, km.

Definição 7.2: Perímetro

Perímetro é a soma dos comprimentos dos lados que formam o contorno de uma figura.

Definição 7.3: Área

Área mede a superfície ocupada pela figura e é expressa em unidades quadradas.

8 Comparação entre perímetro e área

Grandeza	O que mede	Unidade
Comprimento	segmento	m
Perímetro	contorno	m
Área	superfície	m ²

Atenção

Nunca escreva uma área apenas em:

cm

ou:

m.

Uma área deve ser expressa em:

9 Unidades usuais de área

Algumas unidades importantes são:

$$\text{mm}^2,$$

$$\text{cm}^2,$$

$$\text{dm}^2,$$

$$\text{m}^2,$$

$$\text{dam}^2,$$

$$\text{hm}^2,$$

$$\text{km}^2.$$

10 Conversão de unidades de área

Como:

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm},$$

ao elevarmos ambos os lados ao quadrado:

$$1 \text{ m}^2 = (100 \text{ cm})^2.$$

Logo:

$$1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2.$$

11 Por que o fator é quadrático?

Em comprimentos:

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}.$$

Mas um quadrado de lado:

$$1 \text{ m}$$

possui:

$$100$$

centímetros em cada direção.

Portanto:

$$100 \cdot 100 = 10\,000.$$

Assim:

$$1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2.$$

12 Escala das unidades de área

Cada mudança entre unidades consecutivas do sistema métrico corresponde a um fator:

$$100.$$

Por exemplo:

$$1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2,$$

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2.$$

Notação

Nas unidades de comprimento, cada passo corresponde a:

$$10.$$

Nas unidades de área, cada passo corresponde a:

$$100.$$

13 Exemplo de conversão

Exemplo

Converta:

$$3,5 \text{ m}^2$$

para:

$$\text{cm}^2.$$

Resolução

Sabemos que:

$$1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2.$$

Logo:

$$3,5 \cdot 10\,000 = 35\,000.$$

Portanto:

$$3,5 \text{ m}^2 = 35\,000 \text{ cm}^2.$$

14 Área do retângulo

Considere um retângulo de base:

$$b$$

e altura:

$$h.$$

Teorema 14.1: Área do retângulo

A área de um retângulo é dada por:

$$A = bh.$$

15 Justificativa da fórmula do retângulo

Se:

$$b = 5$$

e:

$$h = 3,$$

podemos dividir o retângulo em quadrados unitários.

Em cada linha existem:

$$5$$

quadrados.

Existem:

$$3$$

linhas.

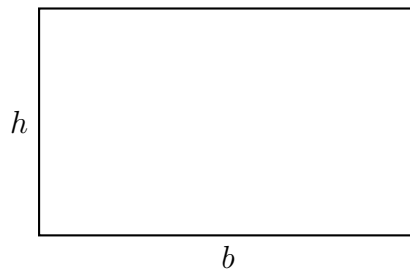
Portanto:

$$A = 5 \cdot 3 = 15.$$

Generalizando:

$$A = bh.$$

16 Representação do retângulo



17 Exemplo com retângulo

Exemplo

Um retângulo possui:

$$b = 12 \text{ cm}$$

e:

$$h = 7 \text{ cm.}$$

Determine sua área.

Resolução

$$A = bh.$$

Logo:

$$A = 12 \cdot 7.$$

Portanto:

$$A = 84 \text{ cm}^2.$$

18 Área do quadrado

Um quadrado é um retângulo cujos lados possuem a mesma medida.

Se o lado mede:

$$l,$$

então:

$$b = l$$

e:

$$h = l.$$

Logo:

$$A = l \cdot l.$$

Teorema 18.1: Área do quadrado

A área de um quadrado de lado l é:

$$A = l^2.$$

19 Exemplo com quadrado

Exemplo

Um quadrado possui lado:

$$9 \text{ cm.}$$

Determine sua área.

Resolução

Logo:

$$A = l^2.$$

$$A = 9^2.$$

Portanto:

$$A = 81 \text{ cm}^2.$$

20 Problema inverso no quadrado

Exemplo

Um quadrado possui área:

$$144 \text{ cm}^2.$$

Determine seu lado.

Resolução

Temos:

$$l^2 = 144.$$

Como o comprimento de um lado é positivo:

$$l = \sqrt{144}.$$

Logo:

$$l = 12 \text{ cm.}$$

21 Área do paralelogramo

Considere um paralelogramo de base:

b

e altura:

h .

Teorema 21.1: Área do paralelogramo

A área de um paralelogramo é:

$$A = bh.$$

22 O que é a altura?

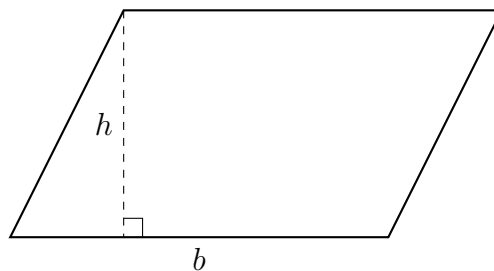
Definição 22.1: Altura relativa a uma base

A altura relativa a uma base é a distância perpendicular entre a reta que contém essa base e a reta paralela que contém o lado oposto.

Atenção

A altura de um paralelogramo não é, em geral, igual ao comprimento de seu lado inclinado.

23 Representação da altura



24 Dedução da área do paralelogramo

Podemos cortar um triângulo de uma extremidade do paralelogramo e deslocá-lo para a outra extremidade.

Essa recomposição produz um retângulo de mesma:

base b

e mesma:

altura h .

Como recortar e recompor sem sobreposição não altera a área:

$$A_{\text{paralelogramo}} = A_{\text{retângulo}}.$$

Logo:

$$A = bh.$$

25 Exemplo com paralelogramo

Exemplo

Um paralelogramo possui:

$$b = 14 \text{ cm}$$

e altura relativa a essa base:

$$h = 6 \text{ cm}.$$

Determine a área.

Resolução

$$A = bh.$$

Logo:

$$A = 14 \cdot 6.$$

Portanto:

$$A = 84 \text{ cm}^2.$$

26 Mesmo paralelogramo, bases diferentes

Uma figura pode possuir diferentes escolhas de base.

Para cada base escolhida, devemos utilizar sua **altura correspondente**.

Se escolhermos:

$$AB$$

como base, usamos a altura perpendicular a AB .

Se escolhermos:

$$AD$$

como base, devemos utilizar outra altura.

Atenção

Não podemos combinar uma base com uma altura que não seja perpendicular a ela.

27 Área do triângulo

Teorema 27.1: Área do triângulo

A área de um triângulo de base b e altura h relativa a essa base é:

$$A = \frac{bh}{2}.$$

28 Dedução pelo paralelogramo

Considere dois triângulos congruentes.

Podemos reuni-los formando um paralelogramo de base:

$$b$$

e altura:

$$h.$$

A área do paralelogramo é:

$$bh.$$

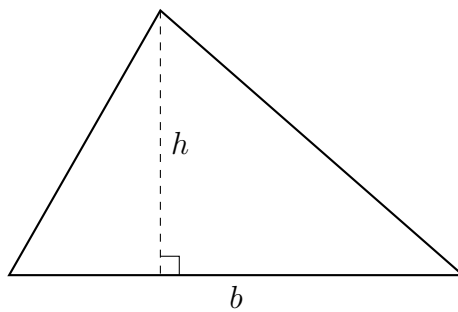
Como ele é composto por dois triângulos congruentes:

$$2A_{\triangle} = bh.$$

Logo:

$$A_{\triangle} = \frac{bh}{2}.$$

29 Representação do triângulo



30 Exemplo com triângulo

Exemplo

Um triângulo possui:

$$b = 10 \text{ cm}$$

e:

$$h = 7 \text{ cm.}$$

Determine sua área.

Resolução

Logo:

$$A = \frac{bh}{2}.$$

$$A = \frac{10 \cdot 7}{2}.$$

$$A = \frac{70}{2}.$$

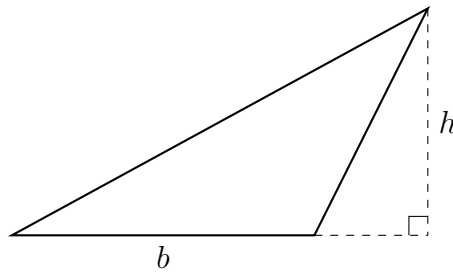
Portanto:

$$A = 35 \text{ cm}^2.$$

31 Altura externa ao triângulo

Em um triângulo obtusângulo, dependendo da base escolhida, o pé da altura pode estar fora do próprio triângulo.

Nesse caso, prolongamos a reta que contém a base.



A fórmula continua válida:

$$A = \frac{bh}{2}.$$

32 Triângulo retângulo

Em um triângulo retângulo, os dois catetos são perpendiculares.

Logo, podemos utilizar um deles como base e o outro como altura.

Se os catetos medem:

a

e:

b ,

então:

$$A = \frac{ab}{2}.$$

33 Exemplo com triângulo retângulo

Exemplo

Os catetos de um triângulo retângulo medem:

6 cm

e:

8 cm.

Determine sua área.

Resolução

$$A = \frac{6 \cdot 8}{2}.$$

$$A = \frac{48}{2}.$$

Logo:

$$A = 24 \text{ cm}^2.$$

34 Problema inverso no triângulo

Exemplo

Um triângulo possui:

$$A = 54 \text{ cm}^2$$

e:

$$b = 12 \text{ cm}.$$

Determine a altura.

Resolução

$$A = \frac{bh}{2}.$$

Substituindo:

$$54 = \frac{12h}{2}.$$

Logo:

$$54 = 6h.$$

Portanto:

$$h = 9 \text{ cm}.$$

35 Área do trapézio

Considere um trapézio com bases paralelas:

B

e:

b ,

e altura:

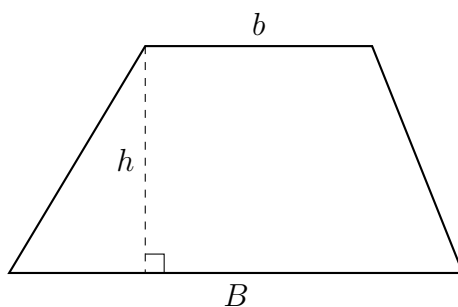
h .

Teorema 35.1: Área do trapézio

A área de um trapézio é:

$$A = \frac{(B + b)h}{2}.$$

36 Representação do trapézio



37 Dedução da fórmula do trapézio

Considere dois trapézios congruentes.

Podemos encaixá-los formando um paralelogramo.

A base desse paralelogramo mede:

$$B + b.$$

Sua altura é:

h .

Logo:

$$A_{\text{paralelogramo}} = (B + b)h.$$

Como o paralelogramo é formado por dois trapézios congruentes:

$$2A_{\text{trapézio}} = (B + b)h.$$

Portanto:

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b)h}{2}.$$

38 Exemplo com trapézio

Exemplo

Um trapézio possui:

$$B = 15 \text{ cm},$$

$$b = 9 \text{ cm},$$

$$h = 6 \text{ cm}.$$

Determine sua área.

Resolução

$$A = \frac{(B + b)h}{2}.$$

Logo:

$$A = \frac{(15 + 9) \cdot 6}{2}.$$

$$A = \frac{24 \cdot 6}{2}.$$

$$A = 72.$$

Portanto:

$$A = 72 \text{ cm}^2.$$

39 Interpretação pela média das bases

A fórmula:

$$A = \frac{(B + b)h}{2}$$

pode ser escrita como:

$$A = \left(\frac{B + b}{2} \right) h.$$

Assim, podemos interpretar:

$$\frac{B + b}{2}$$

como a média aritmética das bases.

Logo:

$$A = \text{média das bases} \times \text{altura}.$$

40 Área do losango

Considere um losango cujas diagonais medem:

$$D$$

e:

$$d.$$

Teorema 40.1: Área do losango

A área do losango é:

$$A = \frac{Dd}{2}.$$

41 Por que a fórmula do losango funciona?

As diagonais de um losango:

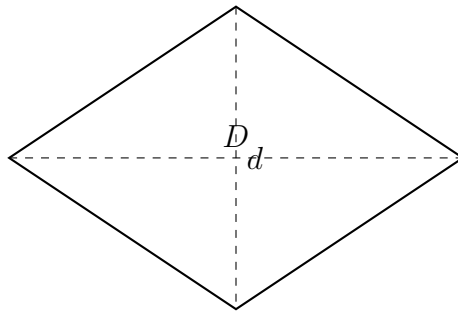
- são perpendiculares;
- cortam-se mutuamente ao meio.

Elas dividem o losango em quatro triângulos retângulos.

Somando as áreas desses quatro triângulos, obtemos:

$$A = \frac{Dd}{2}.$$

42 Representação do losango



43 Exemplo com losango

Exemplo

As diagonais de um losango medem:

12 cm

e:

8 cm.

Determine sua área.

Resolução

$$A = \frac{Dd}{2}.$$

Logo:

$$A = \frac{12 \cdot 8}{2}.$$

$$A = \frac{96}{2}.$$

Portanto:

$$\boxed{A = 48 \text{ cm}^2}.$$

44 Área do losango pela base e altura

Como todo losango é um paralelogramo, também podemos utilizar:

$$\boxed{A = bh.}$$

Portanto, existem duas fórmulas possíveis:

$$A = bh$$

ou:

$$A = \frac{Dd}{2}.$$

A escolha depende das medidas conhecidas.

45 Resumo das fórmulas fundamentais

Figura	Área
Retângulo	$A = bh$
Quadrado	$A = l^2$
Paralelogramo	$A = bh$
Triângulo	$A = \frac{bh}{2}$
Trapézio	$A = \frac{(B + b)h}{2}$
Losango	$A = \frac{Dd}{2}$

46 Figuras equivalentes em área

Definição 46.1: Figuras equivalentes em área

Duas figuras são equivalentes em área quando possuem a mesma área, mesmo que suas formas sejam diferentes.

Atenção

Mesma área não implica congruência.
Duas figuras podem possuir:

mesma área

e:

formas diferentes.

47 Exemplo de mesma área

Considere:

retângulo 6×4 .

Sua área é:

24.

Considere também:

retângulo 8×3 .

Sua área também é:

24.

Logo, possuem a mesma área.

Entretanto, não são congruentes.

48 Mesmo perímetro e áreas diferentes

Considere dois retângulos.

Primeiro:

1×5 .

Seu perímetro é:

$2(1 + 5) = 12$.

Sua área é:

5.

Segundo:

3×3 .

Seu perímetro também é:

12.

Sua área é:

9.

Portanto:

mesmo perímetro não implica mesma área.

49 Mesma área e perímetros diferentes

Considere:

$$1 \times 12$$

e:

$$3 \times 4.$$

Ambos possuem área:

$$12.$$

Mas os perímetros são:

$$26$$

e:

$$14.$$

Logo:

mesma área não implica mesmo perímetro.

50 Figuras compostas

Muitas regiões não possuem diretamente a forma de uma única figura conhecida.

Nesse caso, podemos:

- 1) decompor a figura em partes;
- 2) calcular a área de cada parte;
- 3) somar ou subtrair as áreas.

51 Princípio da aditividade

Teorema 51.1: Aditividade da área

Se uma região é dividida em partes que não se sobrepõem em seus interiores, então a área total é a soma das áreas das partes.

Assim:

$$A_{\text{total}} = A_1 + A_2 + \cdots + A_n.$$

52 Área por subtração

Se uma região menor está contida em uma região maior, podemos calcular:

$$A_{\text{desejada}} = A_{\text{maior}} - A_{\text{retirada}}.$$

Essa estratégia é muito útil em:

- molduras;
- regiões vazadas;
- pisos com recortes;
- terrenos irregulares.

53 Exemplo de figura composta

Exemplo

Uma figura é formada por dois retângulos sem sobreposição:

$$6 \text{ m} \times 4 \text{ m}$$

e:

$$3 \text{ m} \times 2 \text{ m}.$$

Determine a área total.

Resolução

Primeiro retângulo:

$$A_1 = 6 \cdot 4 = 24.$$

Segundo:

$$A_2 = 3 \cdot 2 = 6.$$

Logo:

$$A_{\text{total}} = 24 + 6.$$

Portanto:

$$A_{\text{total}} = 30 \text{ m}^2.$$

54 Exemplo com recorte

Exemplo

Uma placa retangular mede:

$$10 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}.$$

Dela é retirado um quadrado de lado:

$$3 \text{ cm}.$$

Determine a área restante.

Resolução

Área inicial:

$$A_R = 10 \cdot 8 = 80.$$

Área retirada:

$$A_Q = 3^2 = 9.$$

Logo:

$$A_{\text{restante}} = 80 - 9.$$

Portanto:

$$A_{\text{restante}} = 71 \text{ cm}^2.$$

55 Figura em formato de L

Uma figura em formato de L pode ser resolvida de duas maneiras:

- 1) dividindo-a em retângulos;
- 2) completando um retângulo maior e retirando a parte ausente.

Observação

Diferentes decomposições corretas devem produzir a mesma área final.

56 Exemplo de área em formato de L

Exemplo

Um retângulo maior mede:

$$8 \text{ m} \times 6 \text{ m}.$$

Um retângulo de:

$$3 \text{ m} \times 2 \text{ m}$$

é retirado de um canto.

Determine a área restante.

Resolução

Área maior:

$$8 \cdot 6 = 48.$$

Área retirada:

$$3 \cdot 2 = 6.$$

Logo:

$$A = 48 - 6.$$

Portanto:

$$A = 42 \text{ m}^2.$$

57 Triangulação

Outra estratégia importante consiste em dividir uma figura em triângulos.

Definição 57.1: Triangulação

Triangulação é a decomposição de uma região poligonal em triângulos que não se sobrepõem em seus interiores.

Como sabemos calcular a área de triângulos, podemos calcular áreas de muitos polígonos por essa técnica.

58 Área de quadrilátero por diagonal

Uma diagonal divide um quadrilátero convexo em dois triângulos.

Logo:

$$A_{\text{quadrilátero}} = A_{\triangle 1} + A_{\triangle 2}.$$

Esse princípio justifica diversas fórmulas conhecidas.

59 Problema com terreno

Exemplo

Um terreno retangular mede:

25 m

por:

18 m.

Determine sua área.

Resolução

$$A = bh.$$

Logo:

$$A = 25 \cdot 18.$$

$$A = 450.$$

Portanto:

$$A = 450 \text{ m}^2.$$

60 Problema com piso

Exemplo

Uma sala mede:

$$6 \text{ m} \times 4,5 \text{ m}.$$

Determine a área do piso.

Resolução

Logo:

$$A = 6 \cdot 4,5.$$

$$A = 27 \text{ m}^2.$$

61 Problema de custo por metro quadrado

Exemplo

Um piso possui área:

$$32 \text{ m}^2.$$

O revestimento custa:

$$R\$ 85,00$$

por metro quadrado.

Qual é o custo do material, desconsiderando perdas?

Resolução

Logo:

$$C = 32 \cdot 85.$$

$$C = 2720.$$

Portanto:

$$R\$ 2\,720,00.$$

62 Problema com desperdício

Exemplo

Uma obra necessita revestir:

$$40 \text{ m}^2.$$

Deseja-se comprar 10% a mais para compensar recortes e perdas.

Determine a área de revestimento a ser comprada.

Resolução

Calculamos:

$$10\% \text{ de } 40 = 0,10 \cdot 40 = 4.$$

Logo:

$$40 + 4 = 44.$$

Portanto:

$$44 \text{ m}^2.$$

63 Problema algébrico com retângulo

Exemplo

Um retângulo possui área:

$$96 \text{ cm}^2$$

e base:

$$12 \text{ cm}.$$

Determine sua altura.

Resolução

$$A = bh.$$

Logo:

$$96 = 12h.$$

Portanto:

$$h = 8 \text{ cm}.$$

64 Problema algébrico com trapézio

Exemplo

Um trapézio possui:

$$B = 14 \text{ cm},$$

$$b = 8 \text{ cm},$$

e área:

$$66 \text{ cm}^2.$$

Determine a altura.

Resolução

Substituindo:

$$A = \frac{(B + b)h}{2}.$$

$$66 = \frac{(14 + 8)h}{2}.$$

$$66 = \frac{22h}{2}.$$

$$66 = 11h.$$

Logo:

$$h = 6 \text{ cm}.$$

65 Problema algébrico com losango

Exemplo

Um losango possui área:

$$60 \text{ cm}^2$$

e diagonal maior:

$$D = 12 \text{ cm}.$$

Determine a diagonal menor.

Resolução

$$A = \frac{Dd}{2}.$$

Substituindo:

$$60 = \frac{12d}{2}.$$

$$60 = 6d.$$

Logo:

$$d = 10 \text{ cm.}$$

66 Escala e área

Considere duas figuras semelhantes cujas medidas de comprimento são multiplicadas por:

$$k.$$

As áreas são multiplicadas por:

$$k^2.$$

Teorema 66.1: Fator de escala da área

Se todas as dimensões lineares de uma figura são multiplicadas por um fator $k > 0$, então sua área é multiplicada por:

$$k^2.$$

67 Exemplo de ampliação

Considere um quadrado de lado:

$$3.$$

Sua área é:

$$9.$$

Se duplicamos seu lado:

$$3 \longrightarrow 6,$$

a nova área é:

$$36.$$

Observe:

$$36 = 4 \cdot 9.$$

Como:

$$4 = 2^2,$$

a área foi multiplicada por:

$$\boxed{2^2 = 4.}$$

68 Dobrar o lado não dobra a área

Atenção

Se todas as dimensões de uma figura são duplicadas, sua área não é duplicada. Ela é multiplicada por:

$$2^2 = 4.$$

Assim:

$$\boxed{\text{comprimentos} \times 2 \Rightarrow \text{área} \times 4.}$$

69 Exemplo de redução

Se todas as dimensões são reduzidas à metade:

$$k = \frac{1}{2},$$

então a área é multiplicada por:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Portanto:

$$\boxed{\text{comprimentos pela metade} \Rightarrow \text{área igual a } \frac{1}{4}.$$

70 Verificação dimensional

As fórmulas de área devem resultar em unidades quadradas.

Por exemplo:

$$A = bh.$$

Se:

b está em cm

e:

h está em cm,

então:

$$\text{cm} \cdot \text{cm} = \text{cm}^2.$$

Essa verificação ajuda a identificar erros.

71 Medidas em unidades diferentes

Atenção

Antes de calcular a área, todas as medidas de comprimento devem estar expressas em unidades compatíveis.

Por exemplo, não devemos calcular diretamente:

$$2 \text{ m} \cdot 50 \text{ cm}.$$

Primeiro convertamos uma das medidas.

72 Exemplo com unidades diferentes

Exemplo

Um retângulo mede:

2 m

por:

50 cm.

Determine sua área em metros quadrados.

Resolução

Convertemos:

$$50 \text{ cm} = 0,5 \text{ m.}$$

Então:

$$A = 2 \cdot 0,5.$$

Logo:

$$A = 1 \text{ m}^2.$$

73 Estratégia geral para problemas de área

Notação

- 1) identifique a região cuja área é procurada;
- 2) identifique as figuras simples presentes;
- 3) determine quais medidas são necessárias;
- 4) converta as unidades, se necessário;
- 5) escolha as fórmulas adequadas;
- 6) calcule as áreas parciais;
- 7) some ou subtraia conforme a decomposição;
- 8) escreva a unidade quadrada;
- 9) verifique se o resultado é coerente.

74 Erros comuns

Atenção

Erro 1: confundir área com perímetro.

Área mede superfície.

Perímetro mede contorno.

Atenção

Erro 2: esquecer a unidade quadrada.

Não escreva:

$$A = 35 \text{ cm.}$$

O correto é:

$$A = 35 \text{ cm}^2.$$

Atenção

Erro 3: usar o lado inclinado como altura de um paralelogramo.

A altura deve ser:

perpendicular à base.

Atenção

Erro 4: esquecer de dividir por 2 na área do triângulo.

$$A_{\triangle} = \frac{bh}{2}.$$

Atenção

Erro 5: utilizar apenas uma das bases do trapézio.

A fórmula correta é:

$$A = \frac{(B + b)h}{2}.$$

Atenção

Erro 6: multiplicar as diagonais do losango sem dividir por 2.

$$A = \frac{Dd}{2}.$$

Atenção

Erro 7: converter área como se fosse comprimento.

Por exemplo:

$$1 \text{ m}^2 \neq 100 \text{ cm}^2.$$

O correto é:

$$1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2.$$

Atenção

Erro 8: somar áreas de regiões sobrepostas sem compensar a sobreposição.

A aditividade simples vale para regiões cujos interiores não se sobrepõem.

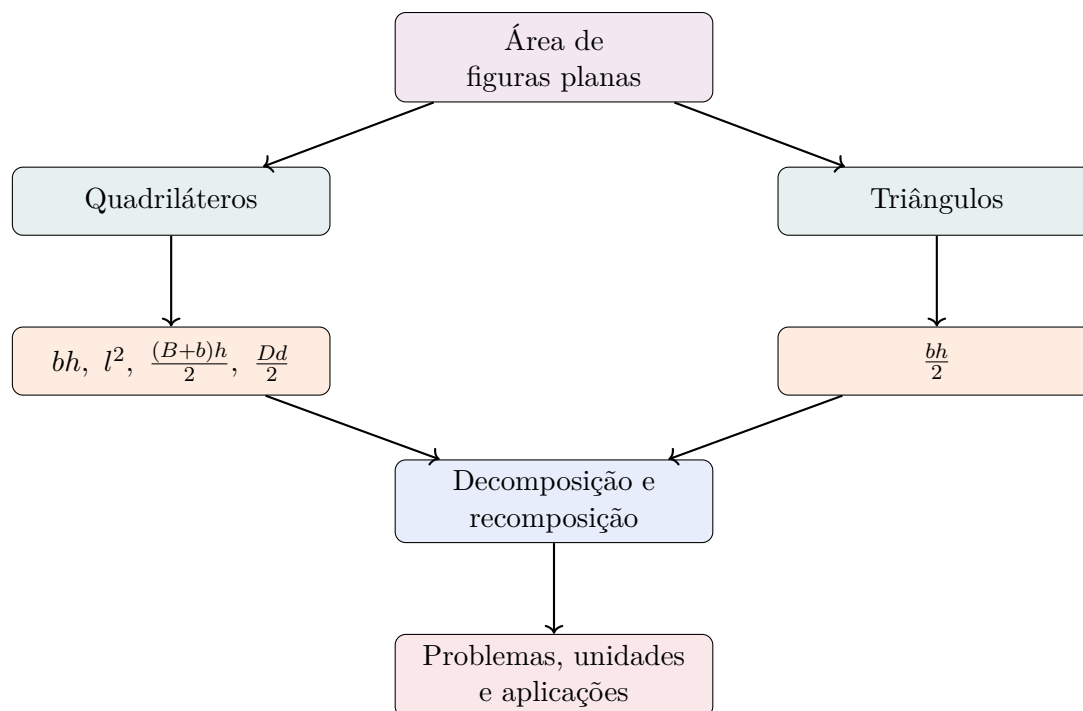
Atenção

Erro 9: pensar que dobrar todas as dimensões dobra a área.

Se o fator linear é 2, o fator de área é:

4 .

75 Mapa conceitual



76 Resumo teórico

Figura	Dados	Área
Retângulo	base e altura	bh
Quadrado	lado	l^2
Paralelogramo	base e altura	bh
Triângulo	base e altura	$\frac{bh}{2}$
Trapézio	bases e altura	$\frac{(B+b)h}{2}$
Losango	diagonais	$\frac{Dd}{2}$

Notação

Fórmulas fundamentais:

$$A_{\text{retângulo}} = bh$$

$$A_{\text{quadrado}} = l^2$$

$$A_{\text{paralelogramo}} = bh$$

$$A_{\triangle} = \frac{bh}{2}$$

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b)h}{2}$$

$$A_{\text{losango}} = \frac{Dd}{2}$$

Figuras compostas:

$$A_{\text{total}} = A_1 + A_2 + \dots$$

ou:

$$A_{\text{restante}} = A_{\text{maior}} - A_{\text{retirada}}.$$

Mudança de escala:

$$\text{fator linear } k \Rightarrow \text{fator de área } k^2.$$

77 Exercícios

77.1 Parte A – Conceitos

Exercício

Responda:

- a) O que é área?
- b) Qual é a diferença entre área e perímetro?
- c) Por que a unidade de área é quadrada?
- d) O que significa:

$$1 \text{ m}^2?$$

77.2 Parte B – Conversões

Exercício

Converta.

- a) 2 m^2
para cm^2 ;
- b) $35\,000 \text{ cm}^2$
para m^2 ;
- c) $4,2 \text{ m}^2$
para dm^2 ;
- d) 900 dm^2
para m^2 .

77.3 Parte C – Retângulos e quadrados

Exercício

Calcule.

- a) Retângulo:
 $b = 15 \text{ cm}, \quad h = 8 \text{ cm}.$
- b) Retângulo:
 $b = 7,5 \text{ m}, \quad h = 4 \text{ m}.$
- c) Quadrado:
 $l = 13 \text{ cm}.$
- d) Quadrado com área:
 $225 \text{ cm}^2.$
Determine o lado.

77.4 Parte D – Paralelogramos

Exercício

Calcule a área.

a)

$$b = 18 \text{ cm}, \quad h = 7 \text{ cm};$$

b)

$$b = 12,5 \text{ m}, \quad h = 4 \text{ m}.$$

Exercício

Um paralelogramo possui:

$$A = 96 \text{ cm}^2$$

e:

$$b = 12 \text{ cm}.$$

Determine a altura.

77.5 Parte E – Triângulos

Exercício

Calcule a área.

a)

$$b = 16 \text{ cm}, \quad h = 9 \text{ cm};$$

b)

$$b = 7 \text{ m}, \quad h = 5 \text{ m};$$

c) triângulo retângulo com catetos:

$$9 \text{ cm}$$

e:

$$12 \text{ cm}.$$

Exercício

Um triângulo possui:

$$A = 48 \text{ cm}^2$$

e:

$$b = 12 \text{ cm}.$$

Determine sua altura.

77.6 Parte F – Trapézios

Exercício

Calcule a área.

a)

$$B = 18 \text{ cm}, \quad b = 10 \text{ cm}, \quad h = 6 \text{ cm};$$

b)

$$B = 12 \text{ m}, \quad b = 8 \text{ m}, \quad h = 5 \text{ m}.$$

Exercício

Um trapézio possui:

$$A = 90 \text{ cm}^2,$$

$$B = 16 \text{ cm},$$

$$b = 14 \text{ cm}.$$

Determine a altura.

77.7 Parte G – Losangos

Exercício

Calcule a área.

a)

$$D = 16 \text{ cm}, \quad d = 10 \text{ cm};$$

b)

$$D = 21 \text{ m}, \quad d = 8 \text{ m}.$$

Exercício

Um losango possui:

$$A = 84 \text{ cm}^2$$

e:

$$D = 14 \text{ cm}.$$

Determine d .

77.8 Parte H – Figuras compostas

Exercício

Um retângulo de:

$$12 \text{ m} \times 9 \text{ m}$$

possui um recorte retangular de:

$$4 \text{ m} \times 3 \text{ m}.$$

Determine a área restante.

Exercício

Uma figura é formada, sem sobreposição, por:

- um retângulo de:

$$8 \text{ cm} \times 5 \text{ cm};$$

- um triângulo de base:

$$8 \text{ cm}$$

e altura:

$$3 \text{ cm}.$$

Determine a área total.

77.9 Parte I – Aplicações

Exercício

Uma parede mede:

$$5 \text{ m}$$

de largura e:

$$2,8 \text{ m}$$

de altura.

Nela existe uma porta de:

$$0,9 \text{ m}$$

por:

$$2,1 \text{ m}.$$

Determine a área que deverá ser pintada.

Exercício

Um terreno retangular mede:

30 m

por:

18 m.

O metro quadrado custa:

R\$ 850,00.

Determine o valor do terreno.

77.10 Parte J – Escala

Exercício

Um quadrado possui área:

25 cm^2 .

Se seu lado for duplicado, qual será sua nova área?

Exercício

Uma figura possui área:

80 cm^2 .

Todas as suas dimensões são reduzidas à metade.

Qual será a nova área?

77.11 Parte K – Desafios

Exercício

Um retângulo possui perímetro:

30 cm.

Sua base mede:

9 cm.

Determine:

a) a altura;

b) a área.

Exercício

Um triângulo e um paralelogramo possuem a mesma base e a mesma altura.
Se a área do paralelogramo é:

$$72 \text{ cm}^2,$$

determine a área do triângulo.

Exercício

Um trapézio possui altura:

$$8 \text{ cm}$$

e área:

$$120 \text{ cm}^2.$$

Determine a soma das bases.

78 Gabarito comentado

78.1 Parte A

Resolução

- a) Área é a medida da extensão de uma superfície plana.
- b) Perímetro mede o contorno; área mede a superfície.
- c) Porque a unidade padrão é um quadrado de lado unitário.
- d) 1 m^2 é a área de um quadrado de lado 1 metro.

78.2 Parte B

Resolução

a)

$$2 \text{ m}^2 = 2 \cdot 10\,000 = \boxed{20\,000 \text{ cm}^2}.$$

b)

$$35\,000 \div 10\,000 = \boxed{3,5 \text{ m}^2}.$$

c)

Como:

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2,$$

temos:

$$4,2 \cdot 100 = \boxed{420 \text{ dm}^2}.$$

d)

$$900 \div 100 = \boxed{9 \text{ m}^2}.$$

78.3 Parte C

Resolução

a)

$$A = 15 \cdot 8 = \boxed{120 \text{ cm}^2}.$$

b)

$$A = 7,5 \cdot 4 = \boxed{30 \text{ m}^2}.$$

c)

$$A = 13^2 = \boxed{169 \text{ cm}^2}.$$

d)

$$l^2 = 225.$$

Logo:

$$\boxed{l = 15 \text{ cm.}}$$

78.4 Parte D

Resolução

a)

$$A = 18 \cdot 7 = \boxed{126 \text{ cm}^2}.$$

b)

$$A = 12,5 \cdot 4 = \boxed{50 \text{ m}^2}.$$

No problema inverso:

$$96 = 12h.$$

Logo:

$$\boxed{h = 8 \text{ cm.}}$$

78.5 Parte E

Resolução

a)

$$A = \frac{16 \cdot 9}{2} = \frac{144}{2} = \boxed{72 \text{ cm}^2}.$$

b)

$$A = \frac{7 \cdot 5}{2} = \boxed{17,5 \text{ m}^2}.$$

c)

$$A = \frac{9 \cdot 12}{2} = \boxed{54 \text{ cm}^2}.$$

Problema inverso:

$$48 = \frac{12h}{2}.$$

$$48 = 6h.$$

Logo:

$$\boxed{h = 8 \text{ cm.}}$$

78.6 Parte F

Resolução

a)

$$A = \frac{(18 + 10) \cdot 6}{2}.$$

$$A = \frac{28 \cdot 6}{2}.$$

$$\boxed{A = 84 \text{ cm}^2}.$$

b)

$$A = \frac{(12 + 8) \cdot 5}{2} = \frac{100}{2}.$$

$$\boxed{A = 50 \text{ m}^2}.$$

Problema inverso:

$$90 = \frac{(16 + 14)h}{2}.$$

Logo:

$$90 = 15h.$$

$$\boxed{h = 6 \text{ cm.}}$$

78.7 Parte G

Resolução

a)

$$A = \frac{16 \cdot 10}{2} = \boxed{80 \text{ cm}^2}.$$

b)

$$A = \frac{21 \cdot 8}{2} = \boxed{84 \text{ m}^2}.$$

Problema inverso:

$$84 = \frac{14d}{2}.$$

$$84 = 7d.$$

Logo:

$$\boxed{d = 12 \text{ cm.}}$$

78.8 Parte H

Resolução

Primeiro problema:

$$A_{\text{maior}} = 12 \cdot 9 = 108.$$

$$A_{\text{recorte}} = 4 \cdot 3 = 12.$$

Logo:

$$A_{\text{restante}} = 108 - 12.$$

$$\boxed{A = 96 \text{ m}^2}.$$

Segundo problema:

Retângulo:

$$A_1 = 8 \cdot 5 = 40.$$

Triângulo:

$$A_2 = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12.$$

Logo:

$$A_{\text{total}} = 40 + 12.$$

$$A_{\text{total}} = 52 \text{ cm}^2.$$

78.9 Parte I

Resolução

Parede

Área total:

$$5 \cdot 2,8 = 14 \text{ m}^2.$$

Área da porta:

$$0,9 \cdot 2,1 = 1,89 \text{ m}^2.$$

Logo:

$$A_{\text{pintada}} = 14 - 1,89.$$

$$A_{\text{pintada}} = 12,11 \text{ m}^2.$$

Terreno

$$A = 30 \cdot 18 = 540 \text{ m}^2.$$

Valor:

$$540 \cdot 850 = 459\,000.$$

Logo:

$$R\$ 459\,000,00.$$

78.10 Parte J

Resolução

1.

A área inicial é:

$$25 \text{ cm}^2.$$

Duplicando as dimensões, a área é multiplicada por:

$$2^2 = 4.$$

Logo:

$$25 \cdot 4 = 100.$$

$$\boxed{100 \text{ cm}^2}.$$

2.

Reduzindo as dimensões à metade:

$$k = \frac{1}{2}.$$

Logo, a área é multiplicada por:

$$\frac{1}{4}.$$

Então:

$$80 \cdot \frac{1}{4} = 20.$$

$$\boxed{20 \text{ cm}^2}.$$

78.11 Parte K

Resolução

1.

Para o retângulo:

$$P = 2(b + h).$$

Logo:

$$30 = 2(9 + h).$$

$$15 = 9 + h.$$

Assim:

$$h = 6 \text{ cm.}$$

A área é:

$$A = 9 \cdot 6.$$

Logo:

$$A = 54 \text{ cm}^2.$$

2.

O paralelogramo possui:

$$A_p = bh.$$

O triângulo com mesma base e altura possui:

$$A_t = \frac{bh}{2}.$$

Logo:

$$A_t = \frac{A_p}{2}.$$

Portanto:

$$A_t = \frac{72}{2}.$$

$$A_t = 36 \text{ cm}^2.$$

3.

$$A = \frac{(B + b)h}{2}.$$

Substituindo:

$$120 = \frac{(B + b) \cdot 8}{2}.$$

$$120 = 4(B + b).$$

Logo:

$$B + b = 30.$$

Portanto:

$$B + b = 30 \text{ cm.}$$

79 Avaliação final

Avaliação final – Área de figuras planas

Resolva as questões abaixo.

1. Explique a diferença entre área e perímetro.

2. Converta:

$$2,8 \text{ m}^2$$

para:

$$\text{cm}^2.$$

3. Um retângulo mede:

$$14 \text{ cm}$$

por:

$$9 \text{ cm}.$$

Determine sua área.

4. Um quadrado possui área:

$$196 \text{ cm}^2.$$

Determine seu lado.

5. Um triângulo possui:

$$b = 18 \text{ cm}$$

e:

$$h = 7 \text{ cm}.$$

Determine sua área.

6. Um trapézio possui:

$$B = 20 \text{ cm}, \quad b = 12 \text{ cm}, \quad h = 5 \text{ cm}.$$

Determine sua área.

7. Um losango possui diagonais:

$$D = 18 \text{ cm}$$

e:

$$d = 10 \text{ cm}.$$

Determine sua área.

8. Um retângulo de:

$$15 \text{ m} \times 10 \text{ m}$$

possui um recorte de:

$$4 \text{ m} \times 3 \text{ m}.$$

Determine a área restante.

9. Uma figura possui área:

$$50 \text{ cm}^2.$$

Todas as dimensões lineares são triplicadas. Qual será a nova área?

10. Um terreno em forma de trapézio possui:

$$B = 30 \text{ m},$$

$$b = 20 \text{ m},$$

$$h = 16 \text{ m}.$$

O terreno custa:

$$R\$ 600,00$$

por metro quadrado.

Determine:

a) a área;

b) o valor total do terreno.

79.1 Gabarito da avaliação final

Resolução

1. Perímetro mede o contorno da figura e utiliza unidades de comprimento. Área mede a superfície e utiliza unidades quadradas.

2. :

$$1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2.$$

Logo:

$$2,8 \cdot 10\,000 = 28\,000.$$

Portanto:

$$2,8 \text{ m}^2 = 28\,000 \text{ cm}^2.$$

3. :

$$A = 14 \cdot 9.$$

Logo:

$$A = 126 \text{ cm}^2.$$

4. :

$$l^2 = 196.$$

Como $l > 0$:

$$l = \sqrt{196}.$$

Portanto:

$$\boxed{l = 14 \text{ cm.}}$$

5. :

$$A = \frac{18 \cdot 7}{2}.$$

$$A = \frac{126}{2}.$$

Logo:

$$\boxed{A = 63 \text{ cm}^2.}$$

6. :

$$A = \frac{(20 + 12) \cdot 5}{2}.$$

$$A = \frac{160}{2}.$$

Logo:

$$\boxed{A = 80 \text{ cm}^2.}$$

7. :

$$A = \frac{18 \cdot 10}{2}.$$

Logo:

$$\boxed{A = 90 \text{ cm}^2.}$$

8. Área maior:

$$15 \cdot 10 = 150.$$

Recorte:

$$4 \cdot 3 = 12.$$

Logo:

$$150 - 12 = 138.$$

Portanto:

$$\boxed{A = 138 \text{ m}^2.}$$

9. O fator linear é:

$$k = 3.$$

Logo, o fator de área é:

$$k^2 = 9.$$

Então:

$$50 \cdot 9 = 450.$$

Portanto:

$$\boxed{450 \text{ cm}^2.}$$

10. :

a)

$$A = \frac{(30 + 20) \cdot 16}{2}.$$

$$A = \frac{50 \cdot 16}{2}.$$

$$A = 400.$$

Logo:

$$\boxed{A = 400 \text{ m}^2.}$$

b)

$$400 \cdot 600 = 240\,000.$$

Portanto:

$$\boxed{R\$ 240\,000,00.}$$

80 Conclusão

O cálculo de áreas permite medir e comparar superfícies de diferentes formas geométricas.

As principais ideias estudadas foram:

1) área mede uma superfície e é expressa em unidades quadradas;

2) área e perímetro representam grandezas diferentes;

3) a área de um retângulo é:

$$A = bh;$$

4) a área de um quadrado é:

$$A = l^2;$$

5) a área de um paralelogramo é:

$$A = bh;$$

6) a área de um triângulo é:

$$A = \frac{bh}{2};$$

7) a área de um trapézio é:

$$A = \frac{(B + b)h}{2};$$

8) a área de um losango pode ser calculada por:

$$A = \frac{Dd}{2};$$

9) figuras compostas podem ser resolvidas por decomposição, adição ou subtração de áreas;

10) medidas devem ser convertidas para unidades compatíveis antes do cálculo;

11) quando todas as dimensões lineares são multiplicadas por k , a área é multiplicada por:

$$k^2;$$

12) muitas fórmulas de área podem ser justificadas por decomposição e recomposição geométrica.

Notação

Resumo final:

$$A_R = bh$$

$$A_Q = l^2$$

$$A_P = bh$$

$$A_T = \frac{bh}{2}$$

$$A_{\text{trap}} = \frac{(B+b)h}{2}$$

$$A_L = \frac{Dd}{2}$$

e, para figuras compostas:

$$A_{\text{total}} = \sum A_i.$$

Para uma região vazada:

$$A_{\text{restante}} = A_{\text{externa}} - A_{\text{interna}}.$$

Finalmente:

$$\text{fator linear } k \Rightarrow \text{fator de área } k^2.$$

Fim do curso