

Sistemas de Equações do 1º Grau

Matemática – 8º Ano

Sistemas com duas incógnitas: resolução algébrica e interpretação geométrica

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste curso, o estudante deverá ser capaz de:

- 1) compreender o conceito de sistema de equações;
- 2) interpretar a solução de um sistema como um par ordenado;
- 3) verificar se um par ordenado satisfaz simultaneamente duas equações;
- 4) resolver sistemas pelo método da substituição;
- 5) resolver sistemas pelo método da adição ou eliminação;
- 6) escolher estratégias adequadas de resolução;
- 7) interpretar geometricamente um sistema no plano cartesiano;
- 8) relacionar a solução de um sistema ao ponto de interseção de duas retas;
- 9) reconhecer sistemas com uma, nenhuma ou infinitas soluções;
- 10) classificar sistemas como possível determinado, possível indeterminado ou impossível;
- 11) construir sistemas a partir de problemas;
- 12) interpretar soluções de acordo com o contexto.

Sumário

1	Introdução	1
2	Definição de sistema de equações	2
3	Solução de um sistema	2
4	Conjunto solução	3
5	Interpretação geométrica	3

6	Exemplo gráfico	4
7	Métodos algébricos de resolução	5
8	Método da substituição	5
9	Substituição: exemplo básico	6
10	Substituição quando uma incógnita já está isolada	7
11	Substituição com coeficientes	8
12	Método da adição ou eliminação	9
13	Adição: coeficientes opostos	10
14	Adição eliminando x	11
15	Multiplicando uma equação antes de eliminar	12
16	Princípio de equivalência	13
17	Escolhendo qual equação multiplicar	14
18	Verificação da solução	15
19	Qual método escolher?	16
20	Classificação dos sistemas	17
21	Sistema possível e determinado	17
22	Sistema impossível	17
23	Sistema possível e indeterminado	18
24	Resumo da classificação	19
25	Representação gráfica de um SPD	19
26	Representação gráfica de um SI	20
27	Representação gráfica de um SPI	21

28 Modelagem de problemas	21
29 Problema de soma e diferença	21
30 Problema com idades	22
31 Problema com preços	23
32 Problema com ingressos	25
33 Problema com quantidade de animais	26
34 Problema de geometria	27
35 Problema de movimento	28
36 Problemas com restrições de contexto	28
37 Erros comuns	29
38 Resumo teórico	30
39 Exercícios	31
39.1 Parte A – Verificação	31
39.2 Parte B – Método da substituição	32
39.3 Parte C – Método da adição	32
39.4 Parte D – Multiplicação antes da eliminação	33
39.5 Parte E – Classificação	33
39.6 Parte F – Problemas	34
40 Gabarito comentado	34
40.1 Parte A	34
40.2 Parte B	35
40.3 Parte C	37
40.4 Parte D	39
40.5 Parte E	40
40.6 Parte F	41
41 Avaliação final	43
41.1 Gabarito da avaliação final	44

1 Introdução

Considere as duas equações:

$$x + y = 7$$

e:

$$x - y = 1.$$

Cada equação, isoladamente, possui infinitas soluções.

Por exemplo, para:

$$x + y = 7,$$

temos:

$$(0, 7), \quad (1, 6), \quad (2, 5), \quad (3, 4), \dots$$

Já para:

$$x - y = 1,$$

temos:

$$(1, 0), \quad (2, 1), \quad (3, 2), \quad (4, 3), \dots$$

Porém, quando exigimos que um mesmo par ordenado satisfaça as duas equações simultaneamente, procuramos a solução de um **sistema de equações**.

Neste caso:

$$(4, 3)$$

satisfaz ambas:

$$4 + 3 = 7$$

e:

$$4 - 3 = 1.$$

Logo:

$$\boxed{(4, 3)}$$

é a solução do sistema.

2 Definição de sistema de equações

Definição 2.1: Sistema de equações

Um **sistema de equações** é um conjunto de duas ou mais equações que devem ser satisfeitas simultaneamente pelas mesmas incógnitas.

Um sistema de duas equações do primeiro grau com duas incógnitas pode ser escrito como:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Notação

A chave:

$$\begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$$

indica que as equações devem ser consideradas simultaneamente.

Exemplo

$$\begin{cases} x + y = 10, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

é um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas:

x

e:

y .

3 Solução de um sistema

Definição 3.1: Solução de um sistema

Uma **solução de um sistema** é um par ordenado:

$$(x, y)$$

que satisfaz simultaneamente todas as equações do sistema.

Exemplo

Verifique se:

$$(3, 2)$$

é solução de:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ 2x - y = 4. \end{cases}$$

Resolução

Na primeira equação:

$$3 + 2 = 5.$$

Verdadeiro.

Na segunda:

$$2(3) - 2 = 6 - 2 = 4.$$

Também verdadeiro.

Portanto:

$(3, 2)$ é solução do sistema.

Atenção

Para ser solução de um sistema, o par deve satisfazer **todas** as equações. Satisfazer apenas uma delas não é suficiente.

4 Conjunto solução

Definição 4.1: Conjunto solução

O **conjunto solução** de um sistema é o conjunto formado por todos os pares ordenados que satisfazem simultaneamente suas equações.

Se um sistema possui apenas a solução:

$$(4, 3),$$

podemos escrever:

$$S = \{(4, 3)\}.$$

5 Interpretação geométrica

Cada equação linear com duas incógnitas representa uma reta no plano cartesiano.

Assim, em um sistema como:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1, \end{cases}$$

temos duas retas.

A solução do sistema corresponde aos pontos que pertencem **simultaneamente** às duas retas.

Teorema 5.1: Interpretação geométrica de um sistema

A solução de um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas corresponde geometricamente aos pontos de interseção das retas representadas pelas duas equações.

Notação

solução do sistema $\iff$ interseção das retas

6 Exemplo gráfico

Considere:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Isolamos y :

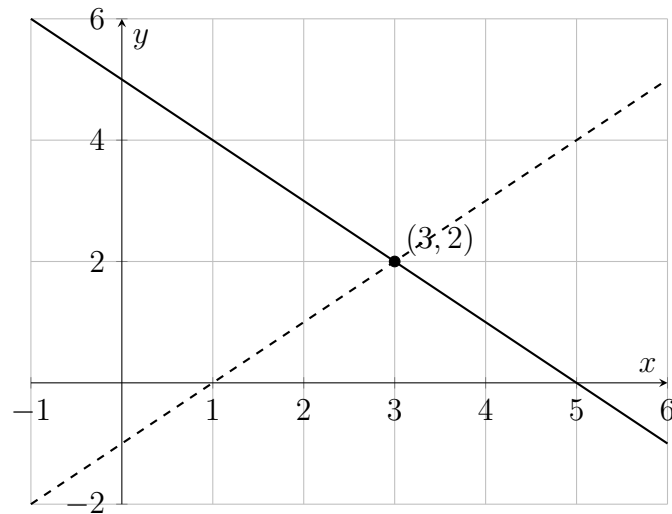
$$y = -x + 5$$

e:

$$y = x - 1.$$

As duas retas se intersectam em:

$$(3, 2).$$



Logo:

$$S = \{(3, 2)\}.$$

7 Métodos algébricos de resolução

Existem diferentes maneiras de resolver um sistema.

Neste curso estudaremos principalmente:

- 1) método da substituição;
- 2) método da adição, também chamado de eliminação.

Observação

Os dois métodos conduzem à mesma solução quando aplicados corretamente. A escolha depende da estrutura das equações.

8 Método da substituição

Definição 8.1: Método da substituição

No **método da substituição**, isolamos uma incógnita em uma das equações e substituímos a expressão obtida na outra equação.

Notação

Procedimento:

- 1) escolha uma das equações;
- 2) isole uma das incógnitas;

- 3) substitua essa expressão na outra equação;
- 4) resolva a equação com uma incógnita;
- 5) substitua o valor encontrado em uma das equações;
- 6) determine a segunda incógnita;
- 7) escreva a solução como par ordenado;
- 8) verifique o resultado.

9 Substituição: exemplo básico

Exemplo

Resolva:

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Resolução

Da primeira equação:

$$x + y = 7.$$

Isolamos y :

$$y = 7 - x.$$

Substituímos na segunda equação:

$$x - (7 - x) = 1.$$

Eliminando os parênteses:

$$x - 7 + x = 1.$$

Logo:

$$2x - 7 = 1.$$

Somando 7:

$$2x = 8.$$

Portanto:

$$x = 4.$$

Agora substituímos em:

$$y = 7 - x.$$

Assim:

$$y = 7 - 4 = 3.$$

Logo:

$$S = \{(4, 3)\}.$$

10 Substituição quando uma incógnita já está isolada

Exemplo

Resolva:

$$\begin{cases} y = 2x + 1, \\ x + y = 7. \end{cases}$$

Resolução

Como y já está isolado:

$$y = 2x + 1,$$

substituímos diretamente na segunda equação:

$$x + (2x + 1) = 7.$$

Logo:

$$3x + 1 = 7.$$

Subtraindo 1:

$$3x = 6.$$

Portanto:

$$x = 2.$$

Agora:

$$y = 2(2) + 1 = 5.$$

Logo:

$$S = \{(2, 5)\}.$$

11 Substituição com coeficientes

Exemplo

Resolva:

$$\begin{cases} 2x + y = 8, \\ 3x - 2y = 5. \end{cases}$$

Resolução

Da primeira equação:

$$2x + y = 8.$$

Isolamos y :

$$y = 8 - 2x.$$

Substituímos na segunda:

$$3x - 2(8 - 2x) = 5.$$

Aplicando a distributiva:

$$3x - 16 + 4x = 5.$$

Logo:

$$7x - 16 = 5.$$

Somando 16:

$$7x = 21.$$

Portanto:

$$x = 3.$$

Agora:

$$y = 8 - 2(3).$$

Logo:

$$y = 2.$$

Portanto:

$$S = \{(3, 2)\}.$$

12 Método da adição ou eliminação

Definição 12.1: Método da adição

No **método da adição**, somamos ou subtraímos as equações de modo que uma das incógnitas seja eliminada.

A ideia consiste em obter:

$$+x$$

e:

$$-x,$$

ou:

$$+2y$$

e:

$$-2y,$$

por exemplo.

Ao somar as equações, esses termos se anulam.

13 Adição: coeficientes opostos

Exemplo

Resolva:

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Resolução

Somamos as equações:

$$x + y = 7$$

$$\frac{x - y = 1}{2x = 8}$$

Logo:

$$x = 4.$$

Substituímos em:

$$x + y = 7.$$

$$4 + y = 7.$$

Então:

$$y = 3.$$

Portanto:

$$S = \{(4, 3)\}.$$

14 Adição eliminando x

Exemplo

Resolva:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ -2x + y = 4. \end{cases}$$

Resolução

Somamos:

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 12 \\ -2x + y = 4 \\ \hline 4y = 16 \end{array}$$

Logo:

$$y = 4.$$

Substituindo na segunda equação:

$$-2x + 4 = 4.$$

Então:

$$-2x = 0.$$

Logo:

$$x = 0.$$

Portanto:

$$S = \{(0, 4)\}.$$

15 Multiplicando uma equação antes de eliminar

Às vezes os coeficientes não são imediatamente opostos.

Considere:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ 2x + 3y = 12. \end{cases}$$

Podemos multiplicar a primeira equação por -2 :

$$-2(x + y) = -2(5).$$

Logo:

$$-2x - 2y = -10.$$

O sistema equivalente é:

$$\begin{cases} -2x - 2y = -10, \\ 2x + 3y = 12. \end{cases}$$

Somando:

$$y = 2.$$

Depois:

$$x + 2 = 5.$$

Logo:

$$x = 3.$$

Portanto:

$$S = \{(3, 2)\}.$$

16 Princípio de equivalência

Teorema 16.1: Multiplicação de uma equação

Multiplicar todos os termos de uma equação por um mesmo número real diferente de zero produz uma equação equivalente, isto é, com o mesmo conjunto de soluções.

Por exemplo:

$$x + y = 5$$

é equivalente a:

$$2x + 2y = 10.$$

Atenção

Devemos multiplicar **todos** os termos da equação.

Errado:

$$x + y = 5$$

multiplicado por 2:

$$2x + y = 10.$$

Correto:

$$2x + 2y = 10.$$

17 Escolhendo qual equação multiplicar

Exemplo

Resolva:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ 3x + 2y = 12. \end{cases}$$

Resolução

Queremos eliminar uma incógnita.

Para eliminar x , podemos multiplicar:

$$2x + 3y = 13$$

por 3:

$$6x + 9y = 39.$$

E:

$$3x + 2y = 12$$

por -2 :

$$-6x - 4y = -24.$$

Somamos:

$$5y = 15.$$

Logo:

$$y = 3.$$

Substituímos em:

$$3x + 2y = 12.$$

$$3x + 6 = 12.$$

Logo:

$$3x = 6.$$

Portanto:

$$x = 2.$$

Assim:

$$S = \{(2, 3)\}.$$

18 Verificação da solução

Após resolver um sistema, é recomendável verificar o resultado.

Exemplo

Verifique:

$$(x, y) = (2, 3)$$

no sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ 3x + 2y = 12. \end{cases}$$

Resolução

Primeira equação:

$$2(2) + 3(3) = 4 + 9 = 13.$$

Segunda:

$$3(2) + 2(3) = 6 + 6 = 12.$$

As duas são verdadeiras.

Logo:

$(2, 3)$ é solução do sistema.

19 Qual método escolher?

Observação

Não existe um único método obrigatório.

O método da substituição costuma ser conveniente quando uma variável já está isolada ou possui coeficiente 1 ou -1 .

O método da adição costuma ser conveniente quando existem coeficientes iguais ou opostos, ou quando eles podem se tornar opostos facilmente.

Situação	Método conveniente
$y = 2x + 3$ já aparece	Substituição
Coeficientes $+y$ e $-y$	Adição
Coeficientes $2x$ e $-2x$	Adição
Coeficiente 1 para uma variável	Substituição
Coeficientes facilmente ajustáveis	Adição

20 Classificação dos sistemas

Geometricamente, duas retas no plano podem:

- 1) se cruzar em um único ponto;
- 2) ser paralelas distintas;
- 3) coincidir.

Esses três casos correspondem às três classificações fundamentais dos sistemas lineares.

21 Sistema possível e determinado

Definição 21.1: Sistema possível e determinado

Um sistema é **possível e determinado** quando possui exatamente uma solução.

Abreviamos:

SPD.

Geometricamente, as duas retas são concorrentes, isto é, intersectam-se em um único ponto.

Exemplo

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

possui solução:

$$(3, 2).$$

Logo, é SPD.

22 Sistema impossível

Definição 22.1: Sistema impossível

Um sistema é **impossível** quando não possui solução.

Abreviamos:

SI.

Geometricamente, as retas são paralelas distintas.

Exemplo

Considere:

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ x + y = 7. \end{cases}$$

Não existe um mesmo par (x, y) cuja soma seja simultaneamente 4 e 7.

Portanto:

$$S = \emptyset.$$

O sistema é impossível.

Exemplo

Pelo método da adição:

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ -x - y = -7. \end{cases}$$

Somando:

$$0 = -3.$$

Essa igualdade é falsa.

Logo:

o sistema não possui solução.

23 Sistema possível e indeterminado

Definição 23.1: Sistema possível e indeterminado

Um sistema é **possível e indeterminado** quando possui infinitas soluções.

Abreviamos:

$$\boxed{\text{SPI.}}$$

Geometricamente, as duas equações representam a mesma reta.

Exemplo

Considere:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ 2x + 2y = 10. \end{cases}$$

A segunda equação é exatamente o dobro da primeira.

Portanto, ambas representam a mesma reta.

Todo par que satisfaz uma equação também satisfaz a outra.
Logo, o sistema possui infinitas soluções:

$$\boxed{\text{SPI.}}$$

Exemplo

Pelo método algébrico, multiplicando a primeira equação por -2 :

$$-2x - 2y = -10.$$

Somando à segunda:

$$0 = 0.$$

Essa igualdade é sempre verdadeira.

Isso indica que as equações são equivalentes e há infinitas soluções.

24 Resumo da classificação

Classificação	Soluções	Retas
SPD	uma solução	concorrentes
SI	nenhuma solução	paralelas distintas
SPI	infinitas soluções	coincidentes

Notação

$$\boxed{\text{SPD} \iff \text{uma interseção}}$$

$$\boxed{\text{SI} \iff \text{nenhuma interseção}}$$

$$\boxed{\text{SPI} \iff \text{retas coincidentes}}$$

25 Representação gráfica de um SPD

Considere:

$$\begin{cases} y = x + 1, \\ y = -x + 5. \end{cases}$$

Igualando:

$$x + 1 = -x + 5.$$

Logo:

$$2x = 4,$$

então:

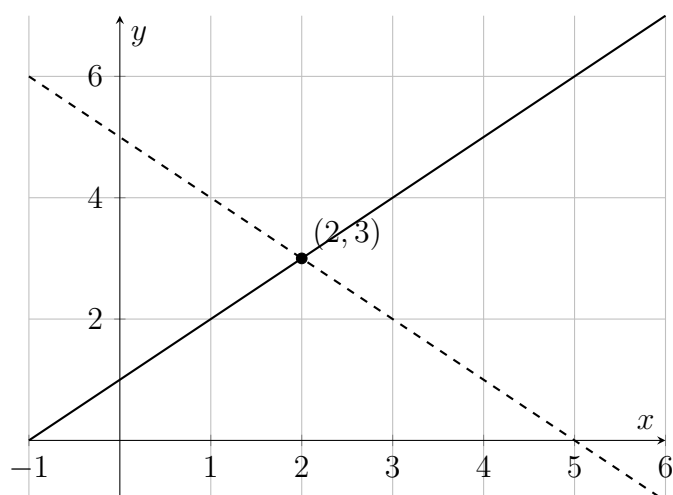
$$x = 2.$$

E:

$$y = 3.$$

As retas se cruzam em:

$$(2, 3).$$



26 Representação gráfica de um SI

Considere:

$$\begin{cases} y = 2x + 1, \\ y = 2x - 3. \end{cases}$$

As duas retas possuem a mesma inclinação, mas interceptos diferentes.

Logo, são paralelas e não se cruzam.

Portanto:

$$\boxed{S = \emptyset}.$$

27 Representação gráfica de um SPI

Considere:

$$\begin{cases} y = 2x + 1, \\ 2y = 4x + 2. \end{cases}$$

Dividindo a segunda equação por 2:

$$y = 2x + 1.$$

As equações são equivalentes.

Logo, representam exatamente a mesma reta.

Portanto, existem infinitas soluções.

28 Modelagem de problemas

Um dos usos mais importantes de sistemas é modelar problemas que envolvem duas quantidades desconhecidas.

Notação

Estratégia:

- 1) escolha as incógnitas;
- 2) traduza cada informação em uma equação;
- 3) forme o sistema;
- 4) resolva;
- 5) interprete a solução;
- 6) verifique se ela faz sentido no contexto.

29 Problema de soma e diferença

Exemplo

A soma de dois números é 20, e a diferença entre eles é 4. Quais são os números?

Resolução

Sejam:

x = primeiro número,

y = segundo número.

Temos:

$$x + y = 20$$

e:

$$x - y = 4.$$

Logo:

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ x - y = 4. \end{cases}$$

Somando as equações:

$$2x = 24.$$

Assim:

$$x = 12.$$

Substituindo:

$$12 + y = 20.$$

Logo:

$$y = 8.$$

Portanto:

$$\boxed{12 \text{ e } 8.}$$

30 Problema com idades

Exemplo

A soma das idades de duas pessoas é 42 anos. A pessoa mais velha tem 8 anos a mais que a mais nova.

Determine as idades.

Resolução

Se:

$$x = \text{idade da pessoa mais velha}$$

e:

$$y = \text{idade da pessoa mais nova,}$$

temos:

$$x + y = 42$$

e:

$$x - y = 8.$$

Logo:

$$\begin{cases} x + y = 42, \\ x - y = 8. \end{cases}$$

Somando:

$$2x = 50.$$

Assim:

$$x = 25.$$

Logo:

$$y = 42 - 25 = 17.$$

Portanto:

$25 \text{ anos e } 17 \text{ anos.}$

31 Problema com preços

Exemplo

Dois cadernos e três canetas custam R\$ 21,00. Três cadernos e uma caneta custam R\$ 23,00.

Determine o preço de cada produto.

Resolução

Se:

$$x = \text{preço de um caderno}$$

e:

$$y = \text{preço de uma caneta,}$$

temos:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 21, \\ 3x + y = 23. \end{cases}$$

Multiplicamos a segunda equação por -3 :

$$-9x - 3y = -69.$$

Somando com a primeira:

$$2x + 3y - 9x - 3y = 21 - 69.$$

Logo:

$$-7x = -48.$$

Então:

$$x = \frac{48}{7}.$$

Nesse caso, o resultado não é inteiro.

Observação

Nem todos os problemas produzem valores inteiros. Em situações de preços, valores racionais também podem ser perfeitamente válidos.

Para obter um exemplo mais simples, considere o problema:

Dois cadernos e três canetas custam R\$ 16,00, enquanto três cadernos e uma caneta custam R\$ 17,00.

Então:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16, \\ 3x + y = 17. \end{cases}$$

Multiplicamos a segunda por -3 :

$$-9x - 3y = -51.$$

Somando:

$$-7x = -35.$$

Logo:

$$x = 5.$$

Substituindo:

32 Problema com ingressos

Exemplo

Em um evento foram vendidos 100 ingressos. O ingresso adulto custa R\$ 30,00 e o infantil custa R\$ 20,00. A arrecadação total foi de R\$ 2 600,00.

Quantos ingressos de cada tipo foram vendidos?

Resolução

Se:

x = ingressos adultos,

y = ingressos infantis,

então:

$$x + y = 100.$$

Pela arrecadação:

$$30x + 20y = 2600.$$

Temos:

$$\begin{cases} x + y = 100, \\ 30x + 20y = 2600. \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por -20 :

$$-20x - 20y = -2000.$$

Somando:

$$10x = 600.$$

Logo:

$$x = 60.$$

Então:

$$y = 40.$$

Portanto:

60 ingressos adultos

e:

40 ingressos infantis.

33 Problema com quantidade de animais

Exemplo

Em uma fazenda há galinhas e coelhos. Ao todo, são 20 animais e 56 patas. Quantas galinhas e quantos coelhos existem?

Resolução

Se:

x = número de galinhas,

y = número de coelhos,

então:

$$x + y = 20.$$

Cada galinha possui 2 patas e cada coelho 4. Logo:

$$2x + 4y = 56.$$

Temos:

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ 2x + 4y = 56. \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira por -2 :

$$-2x - 2y = -40.$$

Somando:

$$2y = 16.$$

Logo:

$$y = 8.$$

Então:

$$x = 12.$$

Portanto:

12 galinhas e 8 coelhos.

34 Problema de geometria

Exemplo

O perímetro de um retângulo é 44 cm. O comprimento é 4 cm maior que a largura. Determine as dimensões.

Resolução

Se:

$$x = \text{comprimento}$$

e:

$$y = \text{largura},$$

do perímetro:

$$2x + 2y = 44.$$

Simplificando:

$$x + y = 22.$$

Também sabemos que:

$$x - y = 4.$$

Logo:

$$\begin{cases} x + y = 22, \\ x - y = 4. \end{cases}$$

Somando:

$$2x = 26.$$

Então:

$$x = 13.$$

Logo:

$$y = 9.$$

Portanto:

$$\boxed{13 \text{ cm} \times 9 \text{ cm.}}$$

35 Problema de movimento

Exemplo

Dois veículos percorrem juntos 250 km em determinado intervalo considerado. Um deles percorreu 40 km a mais que o outro. Determine as distâncias percorridas.

Resolução

Se:

x = distância do primeiro veículo

e:

y = distância do segundo veículo,

temos:

$$x + y = 250$$

e:

$$x - y = 40.$$

Somando:

$$2x = 290.$$

Logo:

$$x = 145.$$

Então:

$$y = 105.$$

Portanto:

145 km e 105 km.

36 Problemas com restrições de contexto

Atenção

Uma solução algébrica deve sempre ser interpretada no contexto. Por exemplo, em um problema sobre número de pessoas, não são admissíveis soluções como:

$$x = -3$$

ou:

$$x = 4,5.$$

Em geral, quantidades de objetos exigem números inteiros não negativos.

37 Erros comuns

Atenção

Erro 1: encontrar x e esquecer de calcular y .

A solução de um sistema com duas incógnitas deve ser um par:

$$(x, y).$$

Atenção

Erro 2: substituir em uma equação incorretamente.

Se:

$$y = 5 - x,$$

em:

$$2x + 3y = 10,$$

devemos escrever:

$$2x + 3(5 - x) = 10.$$

Atenção

Erro 3: esquecer a propriedade distributiva.

$$3(5 - x) = 15 - 3x,$$

e não:

$$15 - x.$$

Atenção

Erro 4: somar equações sem respeitar sinais.

Em:

$$2x + 3y = 10$$

$$-2x + y = 6,$$

temos:

$$3y + y = 4y.$$

Atenção

Erro 5: multiplicar apenas parte de uma equação.

De:

$$x + 2y = 5,$$

multiplicando por 3, obtemos:

$$3x + 6y = 15.$$

Atenção

Erro 6: interpretar $0 = 0$ como ausência de solução.

Em um sistema, uma identidade como:

$$0 = 0$$

após a eliminação indica, em geral, equações equivalentes e infinitas soluções.

Atenção

Erro 7: interpretar uma contradição como solução.

Uma igualdade falsa como:

$$0 = 5$$

indica que não existe solução.

38 Resumo teórico

Conceito	Descrição
Sistema	conjunto de equações simultâneas
Solução	par (x, y) que satisfaz todas as equações
Substituição	isolar e substituir uma variável
Adição	eliminar uma variável somando equações
SPD	uma solução
SI	nenhuma solução
SPI	infinitas soluções
Interpretação gráfica	interseção das retas

Notação

Sistema geral:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Classificação:

uma solução $\Rightarrow$ SPD

nenhuma solução $\Rightarrow$ SI

infinitas soluções $\Rightarrow$ SPI

Geometricamente:

solução = ponto comum às duas retas.

39 Exercícios

39.1 Parte A – Verificação

Exercício

Verifique se o par indicado é solução do sistema.

a)

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 1 \end{cases} \quad (4, 3)$$

b)

$$\begin{cases} 2x + y = 8, \\ x - y = 1 \end{cases} \quad (3, 2)$$

c)

$$\begin{cases} 3x + y = 11, \\ x + 2y = 7 \end{cases} \quad (3, 2)$$

39.2 Parte B – Método da substituição

Exercício

Resolva pelo método da substituição.

a)

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ x - y = 2 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} y = 2x + 1, \\ x + y = 10 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 2x + y = 9, \\ x + 2y = 12 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} x = 3y - 1, \\ x + y = 11 \end{cases}$$

39.3 Parte C – Método da adição

Exercício

Resolva pelo método da adição.

a)

$$\begin{cases} x + y = 9, \\ x - y = 3 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ -2x + y = 3 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 3x + 2y = 16, \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

39.4 Parte D – Multiplicação antes da eliminação

Exercício

Resolva.

a)

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 3x + 4y = 18, \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

39.5 Parte E – Classificação

Exercício

Classifique cada sistema como SPD, SI ou SPI.

a)

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x + y = 8 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 2x + 4y = 12 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} 2x - y = 4, \\ 4x - 2y = 10 \end{cases}$$

39.6 Parte F – Problemas

Exercício

A soma de dois números é 34, e a diferença entre eles é 10. Determine os números.

Exercício

Em uma papelaria, 2 cadernos e 3 canetas custam R\$ 16,00, enquanto 3 cadernos e 1 caneta custam R\$ 17,00. Determine os preços.

Exercício

Uma apresentação vendeu 80 ingressos. O ingresso inteiro custava R\$ 40,00, e a meia-entrada custava R\$ 20,00. A arrecadação foi de R\$ 2 400,00. Quantos ingressos de cada tipo foram vendidos?

Exercício

Em um estacionamento há carros e motocicletas. Ao todo, são 30 veículos e 100 rodas. Quantos carros e quantas motocicletas existem?

Exercício

O perímetro de um retângulo é 50 cm. O comprimento mede 5 cm a mais que a largura. Determine as dimensões.

40 Gabarito comentado

40.1 Parte A

Resolução

a) Para $(4, 3)$:

$$4 + 3 = 7$$

e:

$$4 - 3 = 1.$$

Logo:

é solução.

b) Para $(3, 2)$:

$$2(3) + 2 = 8,$$

mas:

$$3 - 2 = 1.$$

As duas são verdadeiras.

Logo:

é solução.

c) :

$$3(3) + 2 = 11,$$

mas:

$$3 + 2(2) = 7.$$

Também satisfaz ambas.

Logo:

é solução.

40.2 Parte B

Resolução

a)

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Da primeira:

$$y = 8 - x.$$

Na segunda:

$$x - (8 - x) = 2.$$

$$2x = 10.$$

$$x = 5.$$

Logo:

$$y = 3.$$

Portanto:

$$\boxed{(5, 3)}.$$

b)

$$x + (2x + 1) = 10.$$

$$3x = 9.$$

$$x = 3.$$

$$y = 7.$$

Logo:

$$\boxed{(3, 7)}.$$

c)

$$y = 9 - 2x.$$

Substituindo:

$$x + 2(9 - 2x) = 12.$$

$$x + 18 - 4x = 12.$$

$$-3x = -6.$$

$$x = 2.$$

Logo:

$$y = 5.$$

$$\boxed{(2, 5)}.$$

d)

$$(3y - 1) + y = 11.$$

$$4y = 12.$$

$$y = 3.$$

Então:

$$x = 3(3) - 1 = 8.$$

Logo:

$$\boxed{(8, 3)}.$$

40.3 Parte C

Resolução

a)

$$x + y = 9$$

$$\frac{x - y = 3}{2x = 12}$$

Logo:

$$x = 6, \quad y = 3.$$

$$\boxed{(6, 3)}.$$

b)

$$2x + 3y = 13$$

$$\frac{-2x + y = 3}{4y = 16}$$

Logo:

$$y = 4.$$

Então:

$$-2x + 4 = 3.$$

$$-2x = -1.$$

$$x = \frac{1}{2}.$$

Portanto:

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}, 4\right)}.$$

c)

$$\begin{array}{r} 3x + 2y = 16 \\ x - 2y = 0 \\ \hline 4x = 16 \end{array}$$

Logo:

$$x = 4.$$

Então:

$$4 - 2y = 0.$$

$$y = 2.$$

Portanto:

$$\boxed{(4, 2)}.$$

d) Multiplicamos a primeira equação por 2:

$$4x + 2y = 14.$$

Somamos com:

$$3x - 2y = 0.$$

Logo:

$$7x = 14.$$

$$x = 2.$$

Então:

$$2(2) + y = 7.$$

$$y = 3.$$

Portanto:

$$\boxed{(2, 3)}.$$

40.4 Parte D

Resolução

a)

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ 2x + 3y = 12. \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira por -2 :

$$-2x - 2y = -10.$$

Somando:

$$y = 2.$$

Logo:

$$x = 3.$$

$$\boxed{(3, 2)}.$$

b) Já resolvido anteriormente:

$$\boxed{(2, 3)}.$$

c)

$$\begin{cases} 3x + 4y = 18, \\ 2x - y = 1. \end{cases}$$

Multiplicamos a segunda por 4:

$$8x - 4y = 4.$$

Somando:

$$11x = 22.$$

$$x = 2.$$

Então:

$$2(2) - y = 1.$$

$$y = 3.$$

Logo:

$$(2, 3).$$

40.5 Parte E

Resolução

a) As retas se cruzam em um ponto.

$$\boxed{\text{SPD.}}$$

b) As equações exigem:

$$x + y = 3$$

e:

$$x + y = 8.$$

Impossível simultaneamente.

$$\boxed{\text{SI.}}$$

c) A segunda equação é o dobro da primeira.

$$\boxed{\text{SPI.}}$$

d) Multiplicando a primeira por 2:

$$4x - 2y = 8.$$

Mas a segunda afirma:

$$4x - 2y = 10.$$

Logo:

$$\boxed{\text{SI.}}$$

40.6 Parte F

Resolução

1. Soma e diferença

$$\begin{cases} x + y = 34, \\ x - y = 10. \end{cases}$$

Somando:

$$2x = 44.$$

$$x = 22.$$

Logo:

$$y = 12.$$

$$\boxed{22 \text{ e } 12.}$$

2. Papelaria

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16, \\ 3x + y = 17. \end{cases}$$

Multiplicamos a segunda por -3 :

$$-9x - 3y = -51.$$

Somando:

$$-7x = -35.$$

$$x = 5.$$

Então:

$$y = 2.$$

Logo:

$$\boxed{\text{caderno} = R\$ 5,00}$$

e:

$$\boxed{\text{caneta} = R\$ 2,00}.$$

3. Ingressos

$$\begin{cases} x + y = 80, \\ 40x + 20y = 2400. \end{cases}$$

Dividindo a segunda por 20:

$$2x + y = 120.$$

Subtraindo:

$$(2x + y) - (x + y) = 120 - 80.$$

Logo:

$$x = 40.$$

Então:

$$y = 40.$$

Portanto:

40 inteiras e 40 meias.

4. Carros e motocicletas

Se:

$$x = \text{carros}, \quad y = \text{motocicletas},$$

temos:

$$x + y = 30$$

e:

$$4x + 2y = 100.$$

Dividindo a segunda por 2:

$$2x + y = 50.$$

Subtraindo a primeira:

$$x = 20.$$

Logo:

$$y = 10.$$

Portanto:

20 carros e 10 motocicletas.

5. Retângulo

Perímetro:

$$2x + 2y = 50.$$

Logo:

$$x + y = 25.$$

Também:

$$x - y = 5.$$

Temos:

$$\begin{cases} x + y = 25, \\ x - y = 5. \end{cases}$$

Somando:

$$2x = 30.$$

$$x = 15.$$

Logo:

$$y = 10.$$

Portanto:

$$15 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}.$$

41 Avaliação final

Avaliação final – Sistemas de equações do 1º grau

Resolva as questões abaixo.

1. Defina sistema de equações.
2. Explique o que significa um par (x, y) ser solução de um sistema.
3. Verifique se:

$$(3, 2)$$

é solução de:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ 2x - y = 4. \end{cases}$$

4. Resolva por substituição:

$$\begin{cases} y = x + 1, \\ x + y = 9. \end{cases}$$

5. Resolva por adição:

$$\begin{cases} x + y = 11, \\ x - y = 3. \end{cases}$$

6. Resolva:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ 3x - 2y = 5. \end{cases}$$

7. Classifique:

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ 2x + 2y = 8. \end{cases}$$

8. Classifique:

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ x + y = 9. \end{cases}$$

9. A soma de dois números é 50, e a diferença é 14. Determine os números.

10. Em um cinema, foram vendidos 120 ingressos. O ingresso inteiro custa R\$ 25,00, e a meia-entrada custa R\$ 15,00. A arrecadação total foi de R\$ 2 400,00. Determine a quantidade de ingressos de cada tipo.

41.1 Gabarito da avaliação final

Resolução

1. Um sistema de equações é um conjunto de equações que devem ser satisfeitas simultaneamente pelas mesmas incógnitas.

2. Significa que, ao substituir x e y pelos valores do par, todas as equações do sistema tornam-se verdadeiras.

3. :

$$3 + 2 = 5$$

e:

$$2(3) - 2 = 4.$$

Logo:

$$(3, 2) \text{ é solução.}$$

4.

$$\begin{cases} y = x + 1, \\ x + y = 9. \end{cases}$$

Substituindo:

$$x + (x + 1) = 9.$$

$$2x = 8.$$

$$x = 4.$$

Logo:

$$y = 5.$$

$$\boxed{S = \{(4, 5)\}}.$$

5.

$$x + y = 11$$

$$\frac{x - y = 3}{2x = 14}$$

Logo:

$$x = 7.$$

Então:

$$y = 4.$$

$$\boxed{S = \{(7, 4)\}}.$$

6.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ 3x - 2y = 5. \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira por 2:

$$4x + 6y = 24.$$

Multiplicamos a segunda por 3:

$$9x - 6y = 15.$$

Somando:

$$13x = 39.$$

Logo:

$$x = 3.$$

Substituindo:

$$6 + 3y = 12.$$

$$y = 2.$$

Portanto:

$$S = \{(3, 2)\}.$$

7. A segunda equação é o dobro da primeira:

$$\boxed{\text{SPI.}}$$

8. As duas equações possuem o mesmo lado esquerdo e resultados diferentes:

$$\boxed{\text{SI.}}$$

9.

$$\begin{cases} x + y = 50, \\ x - y = 14. \end{cases}$$

Somando:

$$2x = 64.$$

$$x = 32.$$

Logo:

$$y = 18.$$

$$\boxed{32 \text{ e } 18.}$$

10. Se:

$$x = \text{inteiras},$$

$$y = \text{meias},$$

temos:

$$\begin{cases} x + y = 120, \\ 25x + 15y = 2400. \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira por -15 :

$$-15x - 15y = -1800.$$

Somando:

$$10x = 600.$$

Logo:

$$x = 60.$$

Então:

$$y = 60.$$

Portanto:

60 inteiras e 60 meias.

42 Conclusão

Os sistemas de equações permitem determinar valores que devem satisfazer simultaneamente duas ou mais condições.

As ideias fundamentais deste curso são:

- 1) um sistema reúne equações que devem ser satisfeitas simultaneamente;
- 2) a solução de um sistema com duas incógnitas é um par ordenado:

$$(x, y);$$

- 3) o método da substituição consiste em isolar uma incógnita e substituí-la na outra equação;
- 4) o método da adição consiste em eliminar uma incógnita somando ou subtraindo equações;
- 5) podemos multiplicar uma equação inteira por um número diferente de zero para facilitar a eliminação;
- 6) geometricamente, cada equação linear representa uma reta;
- 7) a solução corresponde à interseção das retas;

- 8) retas concorrentes produzem uma única solução;
- 9) retas paralelas distintas produzem nenhuma solução;
- 10) retas coincidentes produzem infinitas soluções;
- 11) sistemas são ferramentas fundamentais para modelar problemas envolvendo duas quantidades desconhecidas.

Notação

Resumo final:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

(x_0, y_0) é solução $\iff$ satisfaz as duas equações

SPD $\iff$ 1 solução

SI $\iff$ 0 soluções

SPI $\iff$ infinitas soluções

e geometricamente:

resolver o sistema = determinar a interseção das retas.

Fim do curso