

Sequências Recursivas e Não Recursivas

Matemática – 8º Ano

Padrões, leis de formação, termo geral, recorrência, algoritmos e fluxogramas

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste curso, o estudante deverá ser capaz de:

- 1) compreender o conceito matemático de sequência;
- 2) identificar termos e posições de uma sequência;
- 3) reconhecer padrões numéricos e geométricos;
- 4) distinguir sequências finitas e infinitas;
- 5) compreender a notação:
$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n;$$
- 6) identificar uma sequência não recursiva;
- 7) determinar termos usando uma fórmula explícita;
- 8) compreender o significado do termo geral a_n ;
- 9) identificar uma sequência recursiva;
- 10) calcular termos utilizando os anteriores;
- 11) construir leis de recorrência simples;
- 12) comparar descrições recursivas e não recursivas;
- 13) representar processos de geração de sequências por algoritmos;
- 14) interpretar e construir fluxogramas;
- 15) resolver problemas envolvendo crescimento, padrões e regularidades.

Sumário

1	Introdução	1
2	Definição de sequência	1

3	Notação dos termos	2
4	Posição e valor	3
5	Sequências finitas	4
6	Sequências infinitas	4
7	Padrões e regularidades	4
8	A importância de conhecer a regra	5
9	Lei de formação	5
10	Sequência não recursiva	6
11	Termo geral	6
12	Construção de termos a partir do termo geral	7
13	Sequências de múltiplos	8
14	Sequência dos números pares	9
15	Sequência dos números ímpares	9
16	Sequências com crescimento constante	10
17	Fórmula para crescimento constante	11
18	Exemplo de termo geral	12
19	Sequência decrescente	12
20	Sequências não lineares	13
21	Outra sequência não linear	13
22	Sequência recursiva	14
23	Por que é necessário um termo inicial?	14
24	Leitura da notação recursiva	15

25 Calculando termos recursivamente	15
26 Recorrência multiplicativa	16
27 Recorrência por divisão	17
28 Recorrência com mais de um termo anterior	17
29 Forma recursiva de uma sequência com diferença constante	18
30 Forma não recursiva da mesma sequência	18
31 Comparação entre forma recursiva e não recursiva	19
32 Exemplo comparativo	19
33 Da forma recursiva para a explícita	20
34 Da forma explícita para a recursiva	20
35 Tabela de uma sequência	21
36 Representação no plano cartesiano	21
37 Padrões geométricos	22
38 Padrão com pontos	23
39 Algoritmos	23
40 Algoritmo para uma sequência não recursiva	24
41 Fluxograma	24
42 Fluxograma de uma fórmula explícita	24
43 Fluxograma de uma sequência recursiva	25
44 Recursão e repetição	26
45 Problema de crescimento de uma população	27
46 Forma explícita do crescimento multiplicativo	27

47 Problema de economia	28
48 Problema com cadeiras	28
49 Problema com figuras	29
50 Encontrando a posição de um termo	30
51 Verificando se um número pertence à sequência	31
52 Sequências alternadas	31
53 Sequência constante	32
54 Erros comuns	32
55 Mapa conceitual	34
56 Resumo teórico	34
57 Exercícios	35
57.1 Parte A – Termos e posições	35
57.2 Parte B – Identificação de padrões	35
57.3 Parte C – Fórmula explícita	36
57.4 Parte D – Termos distantes	36
57.5 Parte E – Encontrando o termo geral	37
57.6 Parte F – Sequências recursivas	37
57.7 Parte G – Escrevendo recorrências	38
57.8 Parte H – Recursiva e explícita	38
57.9 Parte I – Pertinência	38
57.10 Parte J – Problemas	39
58 Gabarito comentado	40
58.1 Parte A	40
58.2 Parte B	40
58.3 Parte C	41
58.4 Parte D	42
58.5 Parte E	42
58.6 Parte F	43

58.7 Parte G	43
58.8 Parte H	44
58.9 Parte I	45
58.10Parte J	46
59 Avaliação final	48
59.1 Gabarito da avaliação final	50
60 Conclusão	52

1 Introdução

Observe a lista:

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad 10, \dots$$

Existe uma regularidade.

Cada número, a partir do primeiro, pode ser obtido adicionando 2 ao anterior:

$$2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 8 \longrightarrow 10.$$

Também podemos observar que o número da posição n é:

$$2n.$$

Assim, a mesma sequência pode ser descrita de duas maneiras.

Uma descrição utiliza o termo anterior:

$$a_n = a_{n-1} + 2.$$

Outra permite determinar diretamente qualquer termo:

$$a_n = 2n.$$

Essas duas formas dão origem às ideias de sequência **recursiva** e **não recursiva**.

2 Definição de sequência

Definição 2.1: Sequência

Uma **sequência** é uma coleção ordenada de elementos em que cada elemento ocupa uma posição determinada.

Exemplo

$$3, \quad 6, \quad 9, \quad 12, \quad 15.$$

Essa sequência possui cinco termos.

O primeiro termo é:

$$3.$$

O segundo termo é:

$$6.$$

O terceiro termo é:

9.

Atenção

A ordem dos termos é essencial.

As sequências:

1, 2, 3

e:

3, 2, 1

não são a mesma sequência.

3 Notação dos termos

Definição 3.1: Termo de uma sequência

Cada elemento de uma sequência é chamado de **termo**.

Usamos frequentemente a notação:

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \dots$$

em que o índice indica a posição do termo.

Notação

a_1 = primeiro termo,

a_2 = segundo termo,

a_3 = terceiro termo,

e, em geral:

a_n = termo de posição n .

Exemplo

Considere:

5, 8, 11, 14, ...

Então:

$a_1 = 5$,

$$a_2 = 8,$$

$$a_3 = 11,$$

$$a_4 = 14.$$

4 Posição e valor

É importante distinguir a **posição** do termo de seu **valor**.

Considere:

$$4, \quad 7, \quad 10, \quad 13, \quad 16, \dots$$

Temos:

$$a_1 = 4,$$

$$a_2 = 7,$$

$$a_3 = 10.$$

O número:

$$3$$

é a posição.

O número:

$$10$$

é o valor do terceiro termo.

Atenção

Não devemos confundir:

$$a_3$$

com:

$$3.$$

O símbolo a_3 representa o **valor do termo na terceira posição**.

5 Sequências finitas

Definição 5.1: Sequência finita

Uma sequência é **finita** quando possui uma quantidade limitada de termos.

Exemplo

2, 4, 6, 8, 10.

Essa sequência possui exatamente:

5

termos.

6 Sequências infinitas

Definição 6.1: Sequência infinita

Uma sequência é **infinita** quando continua indefinidamente.

Indicamos essa continuação utilizando reticências:

...

Exemplo

1, 2, 3, 4, 5, ...

é uma sequência infinita.

7 Padrões e regularidades

Definição 7.1: Padrão

Um **padrão** é uma regularidade que permite compreender como os elementos de uma sequência são formados.

Exemplo

Considere:

10, 20, 30, 40, 50, ...

Podemos observar que cada termo é obtido adicionando 10 ao anterior.

$10 \xrightarrow{+10} 20 \xrightarrow{+10} 30 \xrightarrow{+10} 40.$

Exemplo

Considere:

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 8, \quad 16, \dots$$

Cada termo é o dobro do anterior:

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8.$$

8 A importância de conhecer a regra

Observar alguns termos nem sempre determina uma única sequência.

Por exemplo:

$$1, \quad 2, \quad 3, \dots$$

poderia continuar como:

$$4, \quad 5, \quad 6, \dots$$

mas também poderíamos inventar outra regra que produza os três primeiros termos e continue de maneira diferente.

Observação

Uma sequência matemática fica bem definida quando sua lei de formação é especificada de maneira suficientemente clara.

9 Lei de formação

Definição 9.1: Lei de formação

A **lei de formação** de uma sequência é a regra matemática utilizada para determinar seus termos.

A lei pode ser dada:

- verbalmente;
- por uma expressão algébrica;
- por uma relação entre termos;
- por um algoritmo;
- por um fluxograma;
- por uma construção geométrica.

10 Sequência não recursiva

Definição 10.1: Sequência não recursiva

Uma sequência é descrita de forma **não recursiva**, ou **explícita**, quando cada termo pode ser determinado diretamente a partir de sua posição, sem ser necessário calcular os termos anteriores.

Uma fórmula típica é:

$$a_n = f(n).$$

Exemplo

Considere:

$$a_n = 2n.$$

Para:

$$n = 1,$$

temos:

$$a_1 = 2(1) = 2.$$

Para:

$$n = 2,$$

temos:

$$a_2 = 2(2) = 4.$$

Assim, a sequência é:

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad 10, \dots$$

11 Termo geral

Definição 11.1: Termo geral

O **termo geral** de uma sequência é uma expressão que permite calcular diretamente o termo de posição n .

Geralmente escrevemos:

$$a_n = f(n).$$

Exemplo

Considere:

$$a_n = 3n + 1.$$

Determine o décimo termo.

Resolução

Como queremos:

$$a_{10},$$

fazemos:

$$n = 10.$$

Então:

$$a_{10} = 3(10) + 1.$$

Logo:

$$a_{10} = 31.$$

Portanto:

$$\boxed{a_{10} = 31.}$$

12 Construção de termos a partir do termo geral

Exemplo

Considere:

$$a_n = 4n - 1.$$

Determine os cinco primeiros termos.

Resolução

Para:

$$n = 1,$$

$$a_1 = 4(1) - 1 = 3.$$

Para:

$$n = 2,$$

$$a_2 = 4(2) - 1 = 7.$$

Para:

$$n = 3,$$

$$a_3 = 11.$$

Para:

$$n = 4,$$

$$a_4 = 15.$$

Para:

$$n = 5,$$

$$a_5 = 19.$$

Portanto:

$$\boxed{3, 7, 11, 15, 19, \dots}$$

13 Sequências de múltiplos

Os múltiplos de um número podem ser representados por uma sequência não recursiva.

Exemplo

Os múltiplos positivos de 5 são:

$$5, \quad 10, \quad 15, \quad 20, \quad 25, \dots$$

O termo geral é:

$$a_n = 5n.$$

Teorema 13.1: Sequência dos múltiplos

A sequência dos múltiplos positivos de um número k pode ser representada por:

$$a_n = kn, \quad n \geq 1.$$

14 Sequência dos números pares

Os números pares positivos são:

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad 10, \dots$$

O termo geral é:

$$a_n = 2n.$$

Exemplo

Determine o 50º número par positivo.

Resolução

Logo:

$$a_{50} = 2(50).$$

$$a_{50} = 100.$$

15 Sequência dos números ímpares

Os números ímpares positivos são:

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 9, \dots$$

Teorema 15.1: Termo geral dos ímpares positivos

O n -ésimo número ímpar positivo é:

$$a_n = 2n - 1.$$

Exemplo

Para:

$$n = 4,$$

temos:

$$a_4 = 2(4) - 1.$$

Logo:

$$a_4 = 7.$$

16 Sequências com crescimento constante

Considere:

$$5, \quad 8, \quad 11, \quad 14, \quad 17, \dots$$

A diferença entre termos consecutivos é:

$$3.$$

Podemos construir uma fórmula explícita.

Começamos em 5.

Da primeira posição até a posição n , são realizados:

$$n - 1$$

acréscimos de 3.

Assim:

$$a_n = 5 + 3(n - 1).$$

Desenvolvendo:

$$a_n = 5 + 3n - 3.$$

Logo:

$$\boxed{a_n = 3n + 2.}$$

Observação

Essa estrutura é uma introdução ao estudo das progressões aritméticas, que será aprofundado posteriormente.

17 Fórmula para crescimento constante

Teorema 17.1: Sequência com diferença constante

Considere uma sequência cujo primeiro termo é a_1 e em que cada termo é obtido adicionando uma constante r ao anterior.

Então:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

Justificativa.

Temos:

$$a_1.$$

O segundo termo é:

$$a_2 = a_1 + r.$$

O terceiro:

$$a_3 = a_1 + 2r.$$

O quarto:

$$a_4 = a_1 + 3r.$$

Assim, na posição n , foram realizados:

$$n - 1$$

acrécimos de r .

Logo:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

18 Exemplo de termo geral

Exemplo

Determine o termo geral da sequência:

$$7, \quad 11, \quad 15, \quad 19, \dots$$

Resolução

O primeiro termo é:

$$a_1 = 7.$$

A diferença constante é:

$$r = 4.$$

Usamos:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

Então:

$$a_n = 7 + 4(n - 1).$$

Desenvolvendo:

$$a_n = 7 + 4n - 4.$$

Logo:

$$\boxed{a_n = 4n + 3.}$$

19 Sequência decrescente

Exemplo

Considere:

$$20, \quad 17, \quad 14, \quad 11, \quad 8, \dots$$

A diferença é:

$$-3.$$

Então:

$$a_n = 20 - 3(n - 1).$$

Logo:

$$a_n = 20 - 3n + 3.$$

Portanto:

$$a_n = 23 - 3n.$$

20 Sequências não lineares

Nem toda sequência possui uma fórmula da forma:

$$an + b.$$

Considere:

$$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \dots$$

Esses valores são quadrados perfeitos:

$$1^2, \quad 2^2, \quad 3^2, \quad 4^2, \quad 5^2, \dots$$

Logo:

$$a_n = n^2.$$

Exemplo

O décimo termo é:

$$a_{10} = 10^2 = 100.$$

21 Outra sequência não linear

Considere:

$$1, \quad 8, \quad 27, \quad 64, \quad 125, \dots$$

Temos:

$$1^3, \quad 2^3, \quad 3^3, \quad 4^3, \quad 5^3, \dots$$

Logo:

$$a_n = n^3.$$

22 Sequência recursiva

Definição 22.1: Sequência recursiva

Uma sequência é descrita de forma **recursiva** quando seus termos são determinados a partir de um ou mais termos anteriores.

Para que a regra recursiva determine a sequência, precisamos fornecer também um ou mais termos iniciais.

Notação

Um exemplo típico é:

$$\begin{cases} a_1 = 3, \\ a_n = a_{n-1} + 4, & n \geq 2. \end{cases}$$

Isso significa:

$$a_1 = 3.$$

Depois:

$$a_2 = a_1 + 4.$$

Então:

$$a_2 = 7.$$

Depois:

$$a_3 = a_2 + 4 = 11.$$

Logo:

$$3, \quad 7, \quad 11, \quad 15, \dots$$

23 Por que é necessário um termo inicial?

Considere apenas a regra:

$$a_n = a_{n-1} + 2.$$

Ela diz apenas que cada termo é 2 unidades maior que o anterior.

Porém, várias sequências satisfazem essa regra:

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \dots$$

$$10, \quad 12, \quad 14, \quad 16, \dots$$

$$-5, \quad -3, \quad -1, \quad 1, \dots$$

Teorema 23.1: Necessidade da condição inicial

Uma relação recursiva só determina unicamente uma sequência quando é acompanhada das condições iniciais necessárias.

24 Leitura da notação recursiva

Considere:

$$\begin{cases} a_1 = 5, \\ a_n = a_{n-1} + 3, \end{cases} \quad n \geq 2.$$

A expressão:

$$a_{n-1}$$

representa o termo imediatamente anterior a:

$$a_n.$$

Por exemplo, para:

$$n = 4,$$

temos:

$$a_4 = a_3 + 3.$$

25 Calculando termos recursivamente

Exemplo

Considere:

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_n = a_{n-1} + 5. \end{cases}$$

Determine os cinco primeiros termos.

Resolução

Primeiro:

$$a_1 = 2.$$

Depois:

$$a_2 = a_1 + 5 = 7.$$

$$a_3 = a_2 + 5 = 12.$$

$$a_4 = a_3 + 5 = 17.$$

$$a_5 = a_4 + 5 = 22.$$

Logo:

$$\boxed{2, 7, 12, 17, 22.}$$

26 Recorrência multiplicativa

Uma sequência recursiva não precisa ser formada por adição.

Exemplo

Considere:

$$\begin{cases} a_1 = 3, \\ a_n = 2a_{n-1}. \end{cases}$$

Temos:

$$a_1 = 3.$$

$$a_2 = 2(3) = 6.$$

$$a_3 = 2(6) = 12.$$

$$a_4 = 2(12) = 24.$$

Logo:

$$\boxed{3, 6, 12, 24, 48, \dots}$$

27 Recorrência por divisão

Exemplo

Considere:

$$\begin{cases} a_1 = 64, \\ a_n = \frac{a_{n-1}}{2}. \end{cases}$$

Temos:

$$64, \quad 32, \quad 16, \quad 8, \quad 4, \quad 2, \dots$$

28 Recorrência com mais de um termo anterior

Algumas sequências dependem de mais de um termo anterior.

Exemplo

Considere:

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_2 = 1, \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 3. \end{cases}$$

Então:

$$a_3 = a_2 + a_1 = 2.$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 3.$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 5.$$

$$a_6 = a_5 + a_4 = 8.$$

Logo:

$$\boxed{1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \dots}$$

Essa é a conhecida sequência de Fibonacci.

Observação

Neste nível, o objetivo é compreender a ideia de recorrência. Não é necessário desenvolver a teoria avançada da sequência de Fibonacci.

29 Forma recursiva de uma sequência com diferença constante

Considere:

$$4, \quad 9, \quad 14, \quad 19, \dots$$

Cada termo é obtido somando:

$$5$$

ao anterior.

Logo:

$$\begin{cases} a_1 = 4, \\ a_n = a_{n-1} + 5, & n \geq 2. \end{cases}$$

30 Forma não recursiva da mesma sequência

Para a sequência:

$$4, \quad 9, \quad 14, \quad 19, \dots$$

temos:

$$a_1 = 4$$

e:

$$r = 5.$$

Logo:

$$a_n = 4 + 5(n - 1).$$

Desenvolvendo:

$$a_n = 5n - 1.$$

Portanto, a mesma sequência pode ser escrita como:

$$a_n = 5n - 1.$$

31 Comparação entre forma recursiva e não recursiva

Característica	Recursiva	Não recursiva
Usa termos anteriores	sim	não
Necessita termo inicial	geralmente sim	não necessariamente
Calcula termo distante diretamente	não	sim
Exemplo	$a_n = a_{n-1} + 3$	$a_n = 3n + 2$

Observação

Uma mesma sequência pode admitir tanto uma descrição recursiva quanto uma descrição explícita.

32 Exemplo comparativo

Considere:

5, 8, 11, 14, ...

Forma recursiva:

$$\begin{cases} a_1 = 5, \\ a_n = a_{n-1} + 3. \end{cases}$$

Forma não recursiva:

$$a_n = 3n + 2.$$

Para calcular:

$$a_{100},$$

a forma não recursiva é muito mais eficiente:

$$a_{100} = 3(100) + 2.$$

Logo:

$$a_{100} = 302.$$

33 Da forma recursiva para a explícita

Considere:

$$\begin{cases} a_1 = 6, \\ a_n = a_{n-1} + 4. \end{cases}$$

Como o acréscimo constante é 4:

$$a_n = 6 + 4(n - 1).$$

Logo:

$$a_n = 6 + 4n - 4.$$

Portanto:

$$\boxed{a_n = 4n + 2.}$$

34 Da forma explícita para a recursiva

Considere:

$$a_n = 7n - 3.$$

Os primeiros termos são:

$$4, \quad 11, \quad 18, \quad 25, \dots$$

A diferença entre termos consecutivos é:

$$7.$$

Logo, uma forma recursiva é:

$$\boxed{\begin{cases} a_1 = 4, \\ a_n = a_{n-1} + 7. \end{cases}}$$

35 Tabela de uma sequência

Exemplo

Considere:

$$a_n = 2n + 3.$$

Podemos organizar:

Posição n	Termo a_n
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13

36 Representação no plano cartesiano

Uma sequência numérica pode ser representada pelos pontos:

$$(n, a_n).$$

Considere:

$$a_n = 2n + 1.$$

Temos:

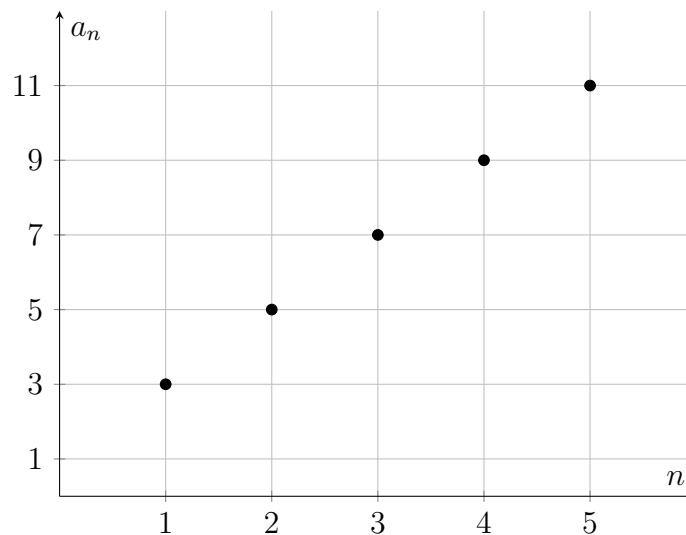
$$(1, 3),$$

$$(2, 5),$$

$$(3, 7),$$

$$(4, 9),$$

$$(5, 11).$$



Atenção

Uma sequência é definida apenas para posições inteiras adequadas, como:

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Por isso, em sua representação gráfica, normalmente marcamos pontos isolados e não uma reta contínua.

37 Padrões geométricos

As sequências também podem surgir em figuras.

Exemplo

Considere uma sequência de figuras construídas com palitos.

A figura 1 usa:

$$4$$

palitos.

A cada nova figura acrescentamos 3 palitos.

Assim:

$$4, \quad 7, \quad 10, \quad 13, \dots$$

A forma recursiva é:

$$\begin{cases} a_1 = 4, \\ a_n = a_{n-1} + 3. \end{cases}$$

A forma explícita é:

$$a_n = 4 + 3(n - 1).$$

Logo:

$$a_n = 3n + 1.$$

38 Padrão com pontos

Considere uma figura formada por quadrados de pontos.

Na posição n , temos:

$$n^2$$

pontos.

A sequência é:

$$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \dots$$

Logo:

$$a_n = n^2.$$

39 Algoritmos

Definição 39.1: Algoritmo

Um **algoritmo** é uma sequência finita e ordenada de instruções utilizadas para executar uma tarefa ou resolver um problema.

Podemos utilizar um algoritmo para gerar termos de uma sequência.

Exemplo

Considere a sequência:

$$5, \quad 8, \quad 11, \quad 14, \dots$$

Um algoritmo possível é:

- 1) começar com o número 5;
- 2) registrar o número atual;
- 3) adicionar 3;
- 4) registrar o novo número;
- 5) repetir o processo.

40 Algoritmo para uma sequência não recursiva

Considere:

$$a_n = 4n + 1.$$

Para determinar a_n :

- 1) receber o valor de n ;
- 2) multiplicar n por 4;
- 3) adicionar 1;
- 4) apresentar o resultado.

Notação

Em forma simbólica:

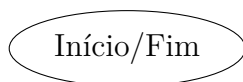
$$n \longrightarrow 4n \longrightarrow 4n + 1.$$

41 Fluxograma

Definição 41.1: Fluxograma

Um **fluxograma** é uma representação gráfica de um algoritmo por meio de símbolos conectados por setas.

Alguns símbolos comuns são:

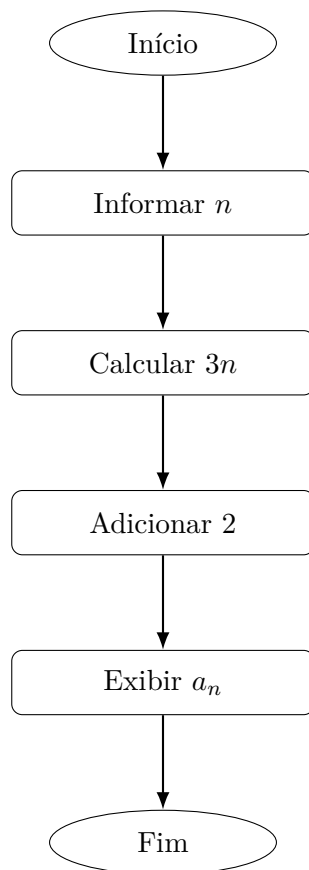


42 Fluxograma de uma fórmula explícita

Considere:

$$a_n = 3n + 2.$$

O algoritmo pode ser representado por:

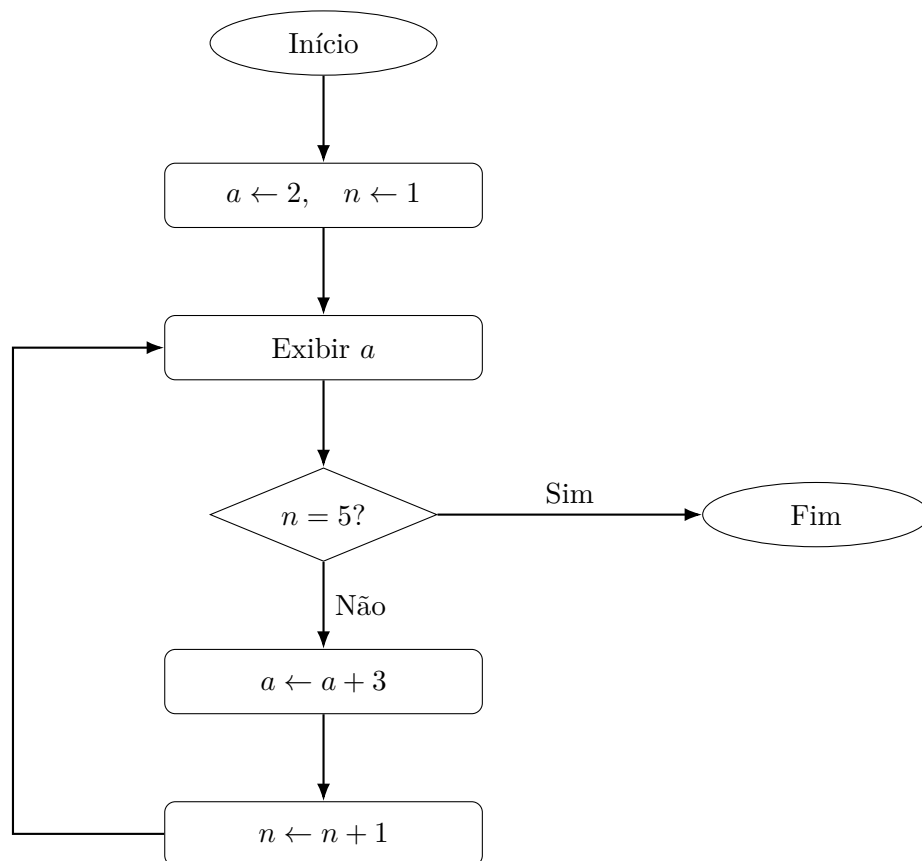


43 Fluxograma de uma sequência recursiva

Considere:

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_n = a_{n-1} + 3. \end{cases}$$

Queremos gerar os cinco primeiros termos.



44 Recursão e repetição

A ideia de uma sequência recursiva está fortemente relacionada à repetição de procedimentos. Por exemplo:

$$a_n = a_{n-1} + 4$$

significa aplicar repetidamente a operação:

$$+4.$$

Notação

$$a_1 \xrightarrow{+4} a_2 \xrightarrow{+4} a_3 \xrightarrow{+4} a_4 \xrightarrow{+4} \dots$$

45 Problema de crescimento de uma população

Exemplo

Uma colônia possui inicialmente:

$$100$$

bactérias.

A cada etapa, a população dobra.

Determine os quatro primeiros valores.

Resolução

Temos:

$$a_1 = 100.$$

A regra recursiva é:

$$a_n = 2a_{n-1}.$$

Então:

$$a_2 = 200,$$

$$a_3 = 400,$$

$$a_4 = 800.$$

Logo:

$$\boxed{100, 200, 400, 800.}$$

46 Forma explícita do crescimento multiplicativo

Para a sequência:

$$100, \quad 200, \quad 400, \quad 800, \dots$$

temos:

$$a_1 = 100.$$

Para chegar ao termo a_n , multiplicamos por 2:

$$n - 1$$

vezes.

Logo:

$$a_n = 100 \cdot 2^{n-1}.$$

Observação

Essa estrutura antecipa o estudo das progressões geométricas.

47 Problema de economia

Exemplo

Uma pessoa guarda R\$ 50,00 no primeiro mês e aumenta sua economia mensal em R\$ 20,00 a cada mês.

A quantidade guardada em cada mês forma:

$$50, \quad 70, \quad 90, \quad 110, \dots$$

Forma recursiva:

$$\begin{cases} a_1 = 50, \\ a_n = a_{n-1} + 20. \end{cases}$$

Forma explícita:

$$a_n = 50 + 20(n - 1).$$

Logo:

$$a_n = 20n + 30.$$

48 Problema com cadeiras

Exemplo

Em um auditório, a primeira fileira possui 12 cadeiras e cada fileira seguinte possui 2 cadeiras a mais que a anterior.

Quantas cadeiras possui a décima fileira?

Resolução

Temos:

$$a_1 = 12$$

e:

$$r = 2.$$

A forma explícita é:

$$a_n = 12 + 2(n - 1).$$

Para:

$$n = 10,$$

temos:

$$a_{10} = 12 + 2(9).$$

Logo:

$$a_{10} = 30.$$

Portanto:

30 cadeiras.

49 Problema com figuras

Exemplo

Uma sequência de figuras possui:

$$5, \quad 9, \quad 13, \quad 17, \dots$$

quadrados.

Determine uma fórmula para a figura de posição n .

Resolução

A diferença é:

$$4.$$

Logo:

$$a_n = 5 + 4(n - 1).$$

Então:

$$a_n = 5 + 4n - 4.$$

Portanto:

$$a_n = 4n + 1.$$

50 Encontrando a posição de um termo

Às vezes conhecemos o valor e queremos descobrir sua posição.

Exemplo

Na sequência:

$$a_n = 3n + 2,$$

em qual posição aparece o número 50?

Resolução

Fazemos:

$$a_n = 50.$$

Então:

$$3n + 2 = 50.$$

Subtraindo 2:

$$3n = 48.$$

Logo:

$$n = 16.$$

Portanto:

$$50 \text{ é o } 16^\circ \text{ termo.}$$

51 Verificando se um número pertence à sequência

Exemplo

O número 100 pertence à sequência:

$$a_n = 4n + 1?$$

Resolução

Se pertencesse, existiria:

$$n \in \mathbb{N}$$

tal que:

$$4n + 1 = 100.$$

Então:

$$4n = 99.$$

Logo:

$$n = \frac{99}{4} = 24,75.$$

Como uma posição deve ser um número natural:

$$24,75 \notin \mathbb{N}.$$

Portanto:

100 não pertence à sequência.

52 Sequências alternadas

Nem toda sequência é crescente ou decrescente.

Exemplo

Considere:

$$1, \quad -1, \quad 1, \quad -1, \quad 1, \dots$$

Uma forma recursiva é:

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_n = -a_{n-1}. \end{cases}$$

Uma forma explícita é:

$$a_n = (-1)^{n-1}.$$

53 Sequência constante

Definição 53.1: Sequência constante

Uma sequência é constante quando todos os seus termos possuem o mesmo valor.

Por exemplo:

$$7, \quad 7, \quad 7, \quad 7, \dots$$

Forma explícita:

$$a_n = 7.$$

Forma recursiva:

$$\begin{cases} a_1 = 7, \\ a_n = a_{n-1}. \end{cases}$$

54 Erros comuns

Atenção

Erro 1: confundir posição com valor.

Se:

$$a_n = 3n + 1,$$

então:

$$a_4 = 3(4) + 1 = 13.$$

O número 4 é a posição e 13 é o valor.

Atenção

Erro 2: substituir n incorretamente.

Para encontrar:

$$a_{20},$$

devemos substituir:

$$n = 20.$$

Não:

$$n = 19.$$

Atenção

Erro 3: esquecer o termo inicial em uma recorrência.

A regra:

$$a_n = a_{n-1} + 4$$

não determina uma única sequência sem uma condição como:

$$a_1 = 2.$$

Atenção

Erro 4: aplicar a regra recursiva sempre ao primeiro termo.

Se:

$$a_n = a_{n-1} + 3,$$

para calcular:

$$a_4,$$

devemos usar:

$$a_3,$$

e não diretamente a_1 .

Atenção

Erro 5: ligar os pontos de uma sequência como se todos os valores intermediários pertencessem a ela.

Uma sequência usualmente possui domínio:

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

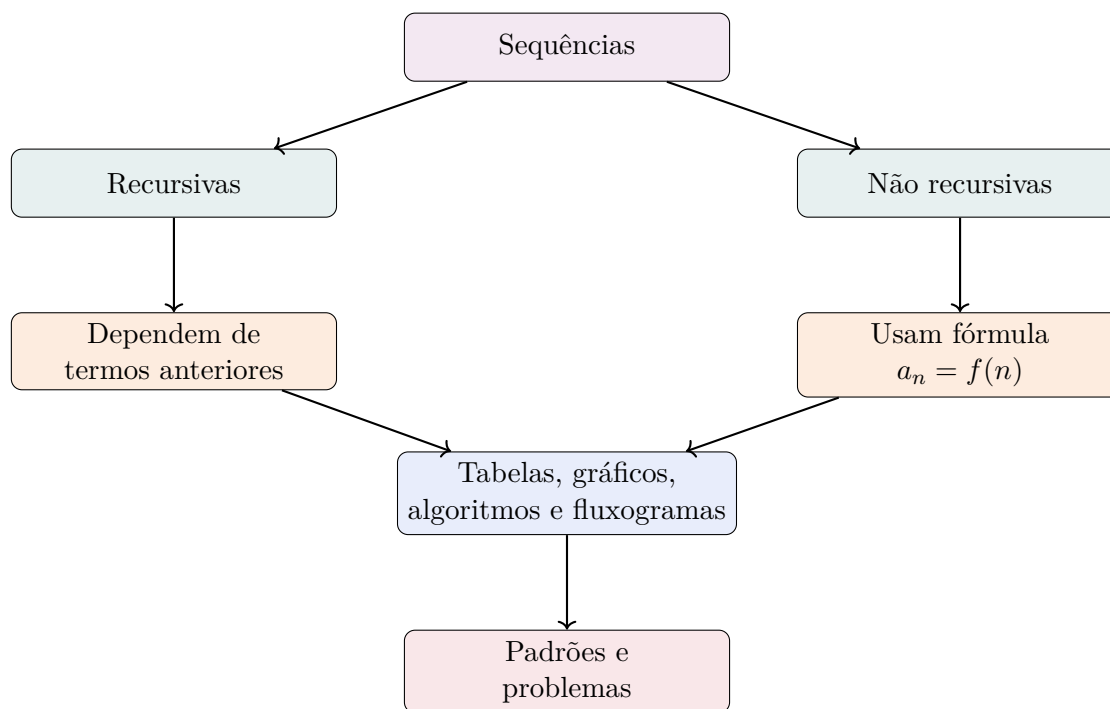
Por isso, sua representação é formada por pontos discretos.

Atenção

Erro 6: supor que qualquer padrão observado é necessariamente a única regra possível.

Para definir rigorosamente uma sequência, devemos especificar uma lei de formação.

55 Mapa conceitual



56 Resumo teórico

Conceito	Descrição
Sequência	coleção ordenada de termos
a_n	termo de posição n
Lei de formação	regra que determina os termos
Não recursiva	determina a_n diretamente
Recursiva	depende de termos anteriores
Condição inicial	termo necessário para iniciar recorrência
Termo geral	fórmula em função de n
Algoritmo	sequência ordenada de instruções
Fluxograma	representação gráfica do algoritmo

Notação

Forma explícita:

$$a_n = f(n)$$

Exemplo:

$$a_n = 3n + 2$$

Forma recursiva:

$$\begin{cases} a_1 = c, \\ a_n = F(a_{n-1}). \end{cases}$$

Para uma sequência com diferença constante r :

$$a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

57 Exercícios

57.1 Parte A – Termos e posições

Exercício

Considere:

$$4, \quad 9, \quad 14, \quad 19, \quad 24, \dots$$

Responda:

- a) Qual é a_1 ?
- b) Qual é a_3 ?
- c) Qual é a_5 ?
- d) Qual termo ocupa a quarta posição?

57.2 Parte B – Identificação de padrões

Exercício

Determine os três termos seguintes.

- a)
 $2, 5, 8, 11, \dots$
- b)
 $20, 16, 12, 8, \dots$
- c)
 $3, 6, 12, 24, \dots$
- d)
 $81, 27, 9, 3, \dots$

e)

1, 4, 9, 16, ...

57.3 Parte C – Fórmula explícita

Exercício

Calcule os quatro primeiros termos.

a)

$$a_n = 2n$$

b)

$$a_n = 3n + 1$$

c)

$$a_n = 5n - 2$$

d)

$$a_n = n^2$$

e)

$$a_n = 2^n$$

57.4 Parte D – Termos distantes

Exercício

Determine:

a) a_{20} , se:

$$a_n = 3n + 2;$$

b) a_{50} , se:

$$a_n = 2n - 1;$$

c) a_{12} , se:

$$a_n = n^2;$$

d) a_{10} , se:

$$a_n = 5n - 4.$$

57.5 Parte E – Encontrando o termo geral

Exercício

Determine uma fórmula explícita para cada sequência.

- a)
 $3, 6, 9, 12, \dots$
- b)
 $5, 8, 11, 14, \dots$
- c)
 $7, 11, 15, 19, \dots$
- d)
 $10, 8, 6, 4, \dots$
- e)
 $1, 3, 5, 7, \dots$

57.6 Parte F – Sequências recursivas

Exercício

Determine os cinco primeiros termos.

- a)
$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_n = a_{n-1} + 4 \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} a_1 = 10, \\ a_n = a_{n-1} - 2 \end{cases}$$
- c)
$$\begin{cases} a_1 = 3, \\ a_n = 2a_{n-1} \end{cases}$$
- d)
$$\begin{cases} a_1 = 64, \\ a_n = \frac{a_{n-1}}{2} \end{cases}$$

57.7 Parte G – Escrevendo recorrências

Exercício

Escreva uma lei recursiva para:

- a) $5, 9, 13, 17, \dots$
- b) $20, 17, 14, 11, \dots$
- c) $2, 4, 8, 16, \dots$
- d) $81, 27, 9, 3, \dots$

57.8 Parte H – Recursiva e explícita

Exercício

Para cada sequência de diferença constante, escreva:

- i) uma lei recursiva;
 - ii) uma lei não recursiva.
- a) $4, 7, 10, 13, \dots$
 - b) $10, 15, 20, 25, \dots$
 - c) $30, 26, 22, 18, \dots$

57.9 Parte I – Pertinência

Exercício

Determine se o número indicado pertence à sequência.

- a) 50 em: $a_n = 3n + 2;$
- b) 100 em: $a_n = 4n + 1;$
- c) 81 em: $a_n = n^2;$

d) 40 em:

$$a_n = 6n - 2.$$

57.10 Parte J – Problemas

Exercício

A primeira fileira de um teatro possui 18 cadeiras. Cada fileira seguinte possui 2 cadeiras a mais que a anterior.

- a) Escreva uma regra recursiva.
- b) Escreva uma fórmula explícita.
- c) Quantas cadeiras possui a 20ª fileira?

Exercício

Uma população começa com 50 indivíduos e dobra a cada etapa.

- a) Escreva uma regra recursiva.
- b) Determine os cinco primeiros termos.
- c) Escreva uma fórmula explícita.

Exercício

Uma sequência de figuras utiliza:

$$6, \quad 10, \quad 14, \quad 18, \dots$$

palitos.

- a) Qual é o padrão?
- b) Escreva a regra recursiva.
- c) Encontre o termo geral.
- d) Quantos palitos terá a figura 30?

58 Gabarito comentado

58.1 Parte A

Resolução

Para:

4, 9, 14, 19, 24, ...

temos:

$$a_1 = 4$$

$$a_3 = 14$$

$$a_5 = 24$$

e o quarto termo é:

$$19.$$

58.2 Parte B

Resolução

a) Soma-se 3:

$$14, 17, 20.$$

b) Subtrai-se 4:

$$4, 0, -4.$$

c) Multiplica-se por 2:

$$48, 96, 192.$$

d) Divide-se por 3:

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}.$$

e) Quadrados perfeitos:

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2.$$

Logo:

$$25, 36, 49.$$

58.3 Parte C

Resolução

a)

$$a_n = 2n$$

produz:

$$2, 4, 6, 8.$$

b)

$$a_n = 3n + 1$$

produz:

$$4, 7, 10, 13.$$

c)

$$a_n = 5n - 2$$

produz:

$$3, 8, 13, 18.$$

d)

$$a_n = n^2$$

produz:

$$1, 4, 9, 16.$$

e)

$$a_n = 2^n$$

produz:

$$2, 4, 8, 16.$$

58.4 Parte D

Resolução

a)

$$a_{20} = 3(20) + 2 = 62.$$

$$\boxed{62}.$$

b)

$$a_{50} = 2(50) - 1 = 99.$$

$$\boxed{99}.$$

c)

$$a_{12} = 12^2 = 144.$$

$$\boxed{144}.$$

d)

$$a_{10} = 5(10) - 4 = 46.$$

$$\boxed{46}.$$

58.5 Parte E

Resolução

a)

$$3, 6, 9, \dots$$

Logo:

$$\boxed{a_n = 3n}.$$

b)

$$a_n = 5 + 3(n - 1).$$

Portanto:

$$\boxed{a_n = 3n + 2}.$$

c)

$$a_n = 7 + 4(n - 1).$$

Logo:

$$a_n = 4n + 3.$$

d)

$$a_n = 10 - 2(n - 1).$$

Logo:

$$a_n = 12 - 2n.$$

e)

$$a_n = 2n - 1.$$

58.6 Parte F

Resolução

a)

$$2, 6, 10, 14, 18.$$

b)

$$10, 8, 6, 4, 2.$$

c)

$$3, 6, 12, 24, 48.$$

d)

$$64, 32, 16, 8, 4.$$

58.7 Parte G

Resolução

a)

$$\begin{cases} a_1 = 5, \\ a_n = a_{n-1} + 4 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} a_1 = 20, \\ a_n = a_{n-1} - 3 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_n = 2a_{n-1} \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} a_1 = 81, \\ a_n = \frac{a_{n-1}}{3} \end{cases}$$

58.8 Parte H

Resolução

a)

4, 7, 10, 13, ...

Recursiva:

$$\begin{cases} a_1 = 4, \\ a_n = a_{n-1} + 3. \end{cases}$$

Explícita:

$$a_n = 4 + 3(n - 1).$$

Logo:

$$a_n = 3n + 1.$$

b)

10, 15, 20, 25, ...

Recursiva:

$$\begin{cases} a_1 = 10, \\ a_n = a_{n-1} + 5. \end{cases}$$

Explícita:

$$a_n = 10 + 5(n - 1).$$

Logo:

$$a_n = 5n + 5.$$

c)

30, 26, 22, 18, ...

Recursiva:

$$\begin{cases} a_1 = 30, \\ a_n = a_{n-1} - 4. \end{cases}$$

Explícita:

$$a_n = 30 - 4(n - 1).$$

Logo:

$$a_n = 34 - 4n.$$

58.9 Parte I

Resolução

a)

$$3n + 2 = 50.$$

Logo:

$$n = 16.$$

Portanto:

50 pertence à sequência.

b)

$$4n + 1 = 100.$$

Então:

$$n = \frac{99}{4}.$$

Como:

$$\frac{99}{4} \notin \mathbb{N},$$

temos:

100 não pertence.

c)

$$n^2 = 81.$$

Como a posição é natural:

$$n = 9.$$

Logo:

$$\boxed{81 \text{ pertence.}}$$

d)

$$6n - 2 = 40.$$

$$6n = 42.$$

$$n = 7.$$

Logo:

$$\boxed{40 \text{ pertence.}}$$

58.10 Parte J

Resolução

1. Teatro

Primeiro termo:

$$a_1 = 18.$$

Acréscimo:

$$2.$$

Recursiva:

$$\begin{cases} a_1 = 18, \\ a_n = a_{n-1} + 2. \end{cases}$$

Explícita:

$$a_n = 18 + 2(n - 1).$$

Logo:

$$\boxed{a_n = 2n + 16.}$$

Na vigésima fileira:

$$a_{20} = 2(20) + 16.$$

Logo:

$$\boxed{56 \text{ cadeiras.}}$$

2. População

Recursiva:

$$\begin{cases} a_1 = 50, \\ a_n = 2a_{n-1}. \end{cases}$$

Primeiros termos:

$$50, 100, 200, 400, 800.$$

Forma explícita:

$$a_n = 50 \cdot 2^{n-1}.$$

3. Palitos

A sequência é:

$$6, 10, 14, 18, \dots$$

O padrão é adicionar:

$$4.$$

Recursiva:

$$\begin{cases} a_1 = 6, \\ a_n = a_{n-1} + 4. \end{cases}$$

Explícita:

$$a_n = 6 + 4(n - 1).$$

Logo:

$$a_n = 4n + 2.$$

Para:

$$n = 30,$$

temos:

$$a_{30} = 4(30) + 2.$$

Logo:

$$122 \text{ palitos.}$$

59 Avaliação final

Avaliação final – Sequências recursivas e não recursivas

Resolva as questões abaixo.

1. Defina uma sequência matemática.

2. Explique o significado de:

$$a_n.$$

3. Determine os três termos seguintes:

$$7, 12, 17, 22, \dots$$

4. Considere:

$$a_n = 4n - 2.$$

Determine:

$$a_{15}.$$

5. Determine o termo geral de:

$$3, 7, 11, 15, \dots$$

6. Escreva uma regra recursiva para:

$$10, 16, 22, 28, \dots$$

7. Determine os cinco primeiros termos de:

$$\begin{cases} a_1 = 4, \\ a_n = 3a_{n-1}. \end{cases}$$

8. Explique a diferença entre uma sequência recursiva e uma não recursiva.

9. O número 95 pertence à sequência:

$$a_n = 5n?$$

Se sim, determine sua posição.

10. Uma sequência de figuras contém:

$$8, 13, 18, 23, \dots$$

objetos.

a) escreva a forma recursiva;

b) determine o termo geral;

c) calcule o número de objetos da figura 40.

59.1 Gabarito da avaliação final

Resolução

1. Uma sequência matemática é uma coleção ordenada de elementos, em que cada termo ocupa uma posição determinada.

2. O símbolo:

$$a_n$$

representa o termo localizado na posição:

$$n.$$

3. O padrão é adicionar:

$$5.$$

Logo:

$$\boxed{27, 32, 37}.$$

- 4.

$$a_{15} = 4(15) - 2.$$

$$a_{15} = 60 - 2.$$

Portanto:

$$\boxed{a_{15} = 58.}$$

5. Temos:

$$a_1 = 3$$

e diferença:

$$4.$$

Logo:

$$a_n = 3 + 4(n - 1).$$

Portanto:

$$\boxed{a_n = 4n - 1.}$$

6. A diferença é:

$$6.$$

Logo:

$$\begin{cases} a_1 = 10, \\ a_n = a_{n-1} + 6. \end{cases}$$

7.

$$a_1 = 4.$$

$$a_2 = 3(4) = 12.$$

$$a_3 = 3(12) = 36.$$

$$a_4 = 108.$$

$$a_5 = 324.$$

Logo:

$$[4, 12, 36, 108, 324].$$

8. Uma sequência recursiva determina cada novo termo a partir de termos anteriores. Uma sequência não recursiva utiliza uma fórmula que permite calcular diretamente a_n a partir da posição n .

9.

$$5n = 95.$$

Logo:

$$n = 19.$$

Como:

$$19 \in \mathbb{N},$$

temos:

$$[95 \text{ pertence à sequência e ocupa a posição } 19.]$$

10. A sequência é:

$$8, 13, 18, 23, \dots$$

A diferença é:

$$5.$$

a)

Forma recursiva:

$$\begin{cases} a_1 = 8, \\ a_n = a_{n-1} + 5. \end{cases}$$

b)

Forma explícita:

$$a_n = 8 + 5(n - 1).$$

Logo:

$$a_n = 5n + 3.$$

c)

$$a_{40} = 5(40) + 3.$$

Portanto:

$$a_{40} = 203.$$

60 Conclusão

As sequências permitem representar e estudar regularidades numéricas, geométricas e presentes em situações reais.

Uma sequência pode ser descrita por diferentes formas de representação, sendo especialmente importantes as formas recursiva e não recursiva.

As principais ideias deste curso são:

- 1) uma sequência é uma coleção ordenada de termos;
- 2) cada termo possui uma posição determinada;

3) o símbolo:

$$a_n$$

representa o termo da posição n ;

4) uma sequência não recursiva permite calcular diretamente um termo a partir de sua posição;

5) sua forma típica é:

$$a_n = f(n);$$

6) uma sequência recursiva determina novos termos a partir de termos anteriores;

7) uma regra recursiva precisa das condições iniciais necessárias;

8) sequências com diferença constante podem ser escritas como:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r;$$

9) sequências também podem ser representadas por tabelas e pontos no plano cartesiano;

10) algoritmos e fluxogramas permitem representar procedimentos para gerar seus termos;

11) identificar padrões permite construir leis de formação e resolver problemas.

Notação

Resumo final:

$$a_n = \text{termo de posição } n$$

Forma não recursiva:

$$a_n = f(n)$$

Forma recursiva:

$$\begin{cases} a_1 = c, \\ a_n = F(a_{n-1}) \end{cases}$$

Para diferença constante:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

e:

$$\text{sequência} \longleftrightarrow \text{padrão} \longleftrightarrow \text{lei de formação.}$$

Fim do curso