

Equações do 2º Grau do Tipo $ax^2 = b$

Matemática – 8º Ano

Quadrados, raízes, soluções reais e resolução de problemas

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste curso, o estudante deverá ser capaz de:

1) reconhecer uma equação do segundo grau;

2) distinguir equações do primeiro e do segundo grau;

3) reconhecer equações do tipo

$$ax^2 = b;$$

4) compreender a condição

$$a \neq 0;$$

5) isolar corretamente o termo x^2 ;

6) aplicar a radiciação para resolver equações quadráticas simples;

7) compreender por que

$$x^2 = k$$

pode apresentar duas soluções reais;

8) diferenciar

$$\sqrt{k}$$

das soluções de

$$x^2 = k;$$

9) utilizar corretamente o símbolo

$$\pm;$$

10) determinar quando uma equação possui duas, uma ou nenhuma solução real;

11) verificar soluções por substituição;

12) interpretar geometricamente as soluções;

13) resolver problemas envolvendo áreas de quadrados e outras situações modeladas por equações quadráticas.

Sumário

1	Introdução	1
2	Revisão de potência de expoente 2	2
3	Quadrados perfeitos	3
4	Revisão de raiz quadrada	4
5	O símbolo $\pm$	4
6	Equação do segundo grau	5
7	Equações do tipo $ax^2 = b$	6
8	Por que $a \neq 0$?	6
9	Princípio fundamental da resolução	7
10	Equações do tipo $x^2 = b$	8
11	Aplicação direta da raiz quadrada	9
12	Equações com coeficiente diferente de 1	10
13	Outro exemplo	11
14	Exemplo com resultado não inteiro	11
15	Soluções irracionais	12
16	Quando o segundo membro é zero	13
17	Quando aparece um número negativo	13
18	Coeficientes negativos	14
19	Classificação pelo sinal de $\frac{b}{a}$	15
20	Por que aparecem duas soluções?	15
21	Raiz quadrada versus solução da equação	16

22 Verificação das soluções	17
23 Algoritmo geral de resolução	18
24 Exemplo completo	19
25 Equações que precisam ser reorganizadas	19
26 Outro exemplo com reorganização	20
27 Equações equivalentes	21
28 Solução exata e solução aproximada	21
29 Estimativa das soluções	22
30 Interpretação gráfica	22
31 Interpretação do número de soluções	23
31.1 Duas soluções	23
31.2 Uma solução	24
31.3 Nenhuma solução real	24
32 Aplicação: área de um quadrado	24
33 Aplicação: área desconhecida	25
34 Aplicação: área do círculo	26
35 Aplicação: problema com velocidade	27
36 Aplicação: dimensões de um quadrado	28
37 Resolução por fatoração: observação	30
38 Propriedade do produto nulo	31
39 Comparação com equações do primeiro grau	31
40 Erros comuns	32
41 Mapa conceitual	34

42	Resumo teórico	34
43	Exercícios	35
43.1	Parte A – Reconhecimento	35
43.2	Parte B – Equações básicas	36
43.3	Parte C – Coeficiente diferente de 1	36
43.4	Parte D – Soluções irracionais	36
43.5	Parte E – Existência de soluções reais	37
43.6	Parte F – Reorganização	37
43.7	Parte G – Verificação	38
43.8	Parte H – Número de soluções	38
43.9	Parte I – Problemas	39
44	Gabarito comentado	40
44.1	Parte A	40
44.2	Parte B	40
44.3	Parte C	40
44.4	Parte D	41
44.5	Parte E	42
44.6	Parte F	42
44.7	Parte G	44
44.8	Parte H	44
44.9	Parte I	45
45	Avaliação final	46
45.1	Gabarito da avaliação final	48
46	Conclusão	50

1 Introdução

Até agora, estudamos equações como:

$$2x + 3 = 11.$$

Nesse tipo de equação, a incógnita x aparece elevada à primeira potência:

$$x = x^1.$$

Por isso, ela é chamada de equação do primeiro grau.

Agora estudaremos equações como:

$$x^2 = 25.$$

Nesse caso, a incógnita aparece elevada ao quadrado.

Essa mudança aparentemente pequena altera significativamente o comportamento da equação.

Por exemplo:

$$5^2 = 25$$

e também:

$$(-5)^2 = 25.$$

Portanto, a equação:

$$x^2 = 25$$

possui duas soluções:

$$x = 5$$

e:

$$x = -5.$$

Observação

Este curso estuda especialmente as equações do segundo grau mais simples, da forma:

$$ax^2 = b.$$

O estudo da equação geral:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

será desenvolvido posteriormente.

2 Revisão de potência de expoente 2

Definição 2.1: Quadrado de um número

O quadrado de um número real x é o produto do número por ele mesmo:

$$x^2 = x \cdot x.$$

Exemplo

$$4^2 = 4 \cdot 4 = 16.$$

$$7^2 = 7 \cdot 7 = 49.$$

$$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9.$$

Teorema 2.1: Não negatividade do quadrado

Para todo número real x ,

$$x^2 \geq 0.$$

Justificativa.

Se:

$$x > 0,$$

então:

$$x^2 > 0.$$

Se:

$$x < 0,$$

o produto de dois números negativos é positivo:

$$x \cdot x > 0.$$

Se:

$$x = 0,$$

temos:

$$x^2 = 0.$$

Portanto:

$$x^2 \geq 0.$$

Atenção

Nenhum número real elevado ao quadrado produz um número negativo.
Assim, não existe:

$$x \in \mathbb{R}$$

tal que:

$$x^2 = -4.$$

3 Quadrados perfeitos

Definição 3.1: Quadrado perfeito

Um número natural é chamado de **quadrado perfeito** quando pode ser escrito como o quadrado de um número natural.

Potência	Resultado
0^2	0
1^2	1
2^2	4
3^2	9
4^2	16
5^2	25
6^2	36
7^2	49
8^2	64
9^2	81
10^2	100
11^2	121
12^2	144

4 Revisão de raiz quadrada

Definição 4.1: Raiz quadrada principal

Para $a \geq 0$, a raiz quadrada principal de a , indicada por

$$\sqrt{a},$$

é o número real não negativo b tal que:

$$b^2 = a.$$

Exemplo

$$\sqrt{25} = 5,$$

pois:

$$5^2 = 25.$$

Atenção

Temos:

$$\boxed{\sqrt{25} = 5}$$

e não:

$$\sqrt{25} = \pm 5.$$

O símbolo radical:

$$\sqrt{25}$$

representa apenas a raiz quadrada principal, que é não negativa.

Já a equação:

$$x^2 = 25$$

possui duas soluções:

$$\boxed{x = \pm 5.}$$

5 O símbolo $\pm$

Definição 5.1: Símbolo mais ou menos

O símbolo:

$$\pm$$

é lido como “mais ou menos” e representa duas possibilidades:

$$+ \quad e \quad - \quad .$$

Assim:

$$x = \pm 4$$

significa:

$$x = 4$$

ou:

$$x = -4.$$

Notação

$$x = \pm a \iff x = a \text{ ou } x = -a.$$

6 Equação do segundo grau

Definição 6.1: Equação do segundo grau

Uma equação do segundo grau em uma incógnita é uma equação que pode ser escrita na forma:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

em que:

$$a, b, c \in \mathbb{R}$$

e:

$$a \neq 0.$$

O número a é o coeficiente de x^2 .

O número b é o coeficiente de x .

O número c é o termo independente.

Exemplo

$$2x^2 + 3x - 5 = 0$$

é uma equação do segundo grau.

Temos:

$$a = 2, \quad b = 3, \quad c = -5.$$

7 Equações do tipo $ax^2 = b$

O foco deste curso é uma forma particular de equação do segundo grau:

$$ax^2 = b.$$

Definição 7.1: Equação do tipo $ax^2 = b$

Uma equação da forma:

$$ax^2 = b,$$

com:

$$a, b \in \mathbb{R}$$

e:

$$a \neq 0,$$

é uma equação do segundo grau incompleta.

Exemplo

São equações desse tipo:

$$x^2 = 16,$$

$$2x^2 = 50,$$

$$3x^2 = 27,$$

$$5x^2 = 0.$$

8 Por que $a \neq 0$?

Se:

$$a = 0,$$

então:

$$ax^2 = b$$

se transforma em:

$$0x^2 = b.$$

O termo de segundo grau desaparece.

Observação

Para que a equação seja realmente de segundo grau, o coeficiente de x^2 deve ser diferente de zero:

$$a \neq 0.$$

9 Princípio fundamental da resolução

Considere:

$$ax^2 = b.$$

Como:

$$a \neq 0,$$

podemos dividir os dois lados por a :

$$x^2 = \frac{b}{a}.$$

Em seguida, analisamos o valor:

$$\frac{b}{a}.$$

Teorema 9.1: Resolução de $ax^2 = b$

Considere:

$$ax^2 = b,$$

com:

$$a \neq 0.$$

Então:

$$x^2 = \frac{b}{a}.$$

Se:

$$\frac{b}{a} > 0,$$

existem duas soluções reais:

$$x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Se:

$$\frac{b}{a} = 0,$$

existe uma única solução real:

$$x = 0.$$

Se:

$$\frac{b}{a} < 0,$$

não existe solução real.

10 Equações do tipo $x^2 = b$

Começaremos pelo caso mais simples:

$$x^2 = b.$$

Exemplo

Resolva:

$$x^2 = 36.$$

Resolução

Procuramos os números cujo quadrado é 36.

Temos:

$$6^2 = 36$$

e:

$$(-6)^2 = 36.$$

Logo:

$$x = 6$$

ou:

$$x = -6.$$

Assim:

$$x = \pm 6.$$

O conjunto solução é:

$$S = \{-6, 6\}.$$

11 Aplicação direta da raiz quadrada

Teorema 11.1: Equação $x^2 = k$

Se:

$$k > 0,$$

então:

$$x^2 = k$$

equivale a:

$$x = \pm\sqrt{k}.$$

Exemplo

$$x^2 = 49.$$

Logo:

$$x = \pm\sqrt{49}.$$

Portanto:

$$x = \pm 7.$$

Exemplo

$$x^2 = 121.$$

Logo:

$$x = \pm 11.$$

Assim:

$$S = \{-11, 11\}.$$

12 Equações com coeficiente diferente de 1

Exemplo

Resolva:

$$2x^2 = 32.$$

Resolução

Dividimos os dois lados por 2:

$$x^2 = 16.$$

Aplicamos a raiz:

$$x = \pm \sqrt{16}.$$

Logo:

$$x = \pm 4.$$

Portanto:

$$S = \{-4, 4\}.$$

13 Outro exemplo

Exemplo

Resolva:

$$3x^2 = 75.$$

Resolução

Dividimos por 3:

$$x^2 = 25.$$

Então:

$$x = \pm\sqrt{25}.$$

Logo:

$$\boxed{x = \pm 5.}$$

14 Exemplo com resultado não inteiro

Exemplo

Resolva:

$$2x^2 = 10.$$

Resolução

Dividindo por 2:

$$x^2 = 5.$$

Portanto:

$$x = \pm\sqrt{5}.$$

Como $\sqrt{5}$ não é um número inteiro, podemos deixar a solução na forma exata:

$$x = \pm\sqrt{5}.$$

Aproximadamente:

$$\sqrt{5} \approx 2,236.$$

Assim:

$$x \approx 2,236$$

ou:

$$x \approx -2,236.$$

15 Soluções irracionais

Observação

Nem toda equação do tipo:

$$ax^2 = b$$

possui soluções inteiras ou racionais.

Por exemplo:

$$x^2 = 2$$

tem soluções:

$$x = \pm\sqrt{2}.$$

Como:

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q},$$

as soluções são irracionais.

16 Quando o segundo membro é zero

Exemplo

Resolva:

$$5x^2 = 0.$$

Resolução

Dividindo por 5:

$$x^2 = 0.$$

O único número cujo quadrado é zero é:

$$0.$$

Logo:

$$x = 0.$$

Portanto:

$$S = \{0\}.$$

Teorema 16.1: Quadrado igual a zero

Para $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 = 0$$

se, e somente se:

$$x = 0.$$

17 Quando aparece um número negativo

Exemplo

Resolva em $\mathbb{R}$:

$$x^2 = -9.$$

Resolução

Para todo número real x :

$$x^2 \geq 0.$$

Portanto, não existe número real cujo quadrado seja -9 .

Logo:

$$S = \emptyset.$$

Teorema 17.1: Equação $x^2 = k$ com $k < 0$

Se:

$$k < 0,$$

então:

$$x^2 = k$$

não possui solução no conjunto dos números reais.

18 Coeficientes negativos

Considere:

$$-2x^2 = -18.$$

Exemplo

Resolva:

$$-2x^2 = -18.$$

Resolução

Dividimos por -2 :

$$x^2 = 9.$$

Logo:

$$x = \pm 3.$$

Portanto:

$$S = \{-3, 3\}.$$

Exemplo

Resolva:

$$-4x^2 = 36.$$

Resolução

Dividindo por -4 :

$$x^2 = -9.$$

Como:

$$x^2 \geq 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, não há solução real.

Logo:

$$S = \emptyset.$$

19 Classificação pelo sinal de $\frac{b}{a}$

Considere:

$$ax^2 = b.$$

Após dividir por a :

$$x^2 = \frac{b}{a}.$$

Podemos determinar imediatamente o número de soluções reais observando o sinal de:

$$\frac{b}{a}.$$

$\frac{b}{a}$	Número de soluções reais	Soluções
$\frac{b}{a} > 0$	2	$\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$
$\frac{b}{a} = 0$	1	0
$\frac{b}{a} < 0$	0	nenhuma

20 Por que aparecem duas soluções?

Considere:

$$x^2 = 16.$$

A função quadrado não diferencia o sinal de números opostos:

$$4^2 = 16$$

e:

$$(-4)^2 = 16.$$

Em geral:

$$a^2 = (-a)^2.$$

Teorema 20.1: Quadrados de números opostos

Para todo número real a ,

$$a^2 = (-a)^2.$$

Demonstração.

$$(-a)^2 = (-a)(-a).$$

Como o produto de dois números negativos é positivo:

$$(-a)(-a) = a^2.$$

Logo:

$$(-a)^2 = a^2.$$

21 Raiz quadrada versus solução da equação

Esta distinção é fundamental.

Notação

mas:

$$\sqrt{25} = 5$$

$$x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5.$$

Por quê?

Porque:

$$\sqrt{25}$$

é definida como a raiz quadrada principal, isto é, não negativa.

Por outro lado, ao resolver:

$$x^2 = 25,$$

procuramos **todos** os valores de x cujo quadrado é 25.

Esses valores são:

$$5$$

e:

$$-5.$$

22 Verificação das soluções

Definição 22.1: Verificação

Verificar uma solução significa substituir o valor encontrado na equação original e confirmar que a igualdade é verdadeira.

Exemplo

Verifique as soluções de:

$$x^2 = 16.$$

Resolução

Para:

$$x = 4,$$

temos:

$$4^2 = 16.$$

Verdadeiro.

Para:

$$x = -4,$$

temos:

$$(-4)^2 = 16.$$

Também verdadeiro.

Portanto:

$$\boxed{x = \pm 4}$$

são realmente as duas soluções.

23 Algoritmo geral de resolução

Notação

Para resolver:

$$ax^2 = b,$$

siga:

1) verifique se:

$$a \neq 0;$$

2) divida ambos os lados por a :

$$x^2 = \frac{b}{a};$$

3) analise o sinal de:

$$\frac{b}{a};$$

4) se for positivo:

$$x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}};$$

5) se for zero:

$$x = 0;$$

6) se for negativo:

$$S = \emptyset$$

no conjunto dos números reais;

7) verifique as soluções.

24 Exemplo completo

Exemplo

Resolva:

$$8x^2 = 200.$$

Resolução

1º passo: isolar x^2 .

$$x^2 = \frac{200}{8}.$$

Simplificando:

$$x^2 = 25.$$

2º passo: aplicar a raiz quadrada.

$$x = \pm \sqrt{25}.$$

$$x = \pm 5.$$

3º passo: escrever o conjunto solução.

$$S = \{-5, 5\}.$$

25 Equações que precisam ser reorganizadas

Nem sempre a equação aparece imediatamente na forma:

$$ax^2 = b.$$

Exemplo

Resolva:

$$3x^2 - 27 = 0.$$

Resolução

Somamos 27 aos dois lados:

$$3x^2 = 27.$$

Dividindo por 3:

$$x^2 = 9.$$

Logo:

$$x = \pm 3.$$

Portanto:

$$S = \{-3, 3\}.$$

26 Outro exemplo com reorganização

Exemplo

Resolva:

$$5x^2 + 20 = 0.$$

Resolução

Subtraímos 20:

$$5x^2 = -20.$$

Dividimos por 5:

$$x^2 = -4.$$

Não existe solução real.

Logo:

$$S = \emptyset.$$

27 Equações equivalentes

Definição 27.1: Equações equivalentes

Duas equações são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução.

Por exemplo:

$$2x^2 = 18$$

e:

$$x^2 = 9$$

são equivalentes, pois dividimos ambos os lados da primeira equação por 2.

Ambas possuem:

$$S = \{-3, 3\}.$$

28 Solução exata e solução aproximada

Considere:

$$x^2 = 7.$$

A solução exata é:

$$x = \pm\sqrt{7}.$$

Usando aproximação decimal:

$$\sqrt{7} \approx 2,646.$$

Logo:

$$x \approx 2,646$$

ou:

$$x \approx -2,646.$$

Observação

Sempre que possível, a forma com radical é considerada a forma exata.
A forma decimal pode ser uma aproximação.

29 Estimativa das soluções

Mesmo sem calculadora, podemos localizar uma raiz entre dois inteiros.

Exemplo

Estime:

$$\sqrt{30}.$$

Resolução

Sabemos que:

$$5^2 = 25$$

e:

$$6^2 = 36.$$

Como:

$$25 < 30 < 36,$$

temos:

$$5 < \sqrt{30} < 6.$$

Portanto, as soluções de:

$$x^2 = 30$$

satisfazem:

$$5 < x < 6$$

ou:

$$-6 < x < -5.$$

30 Interpretação gráfica

Considere a equação:

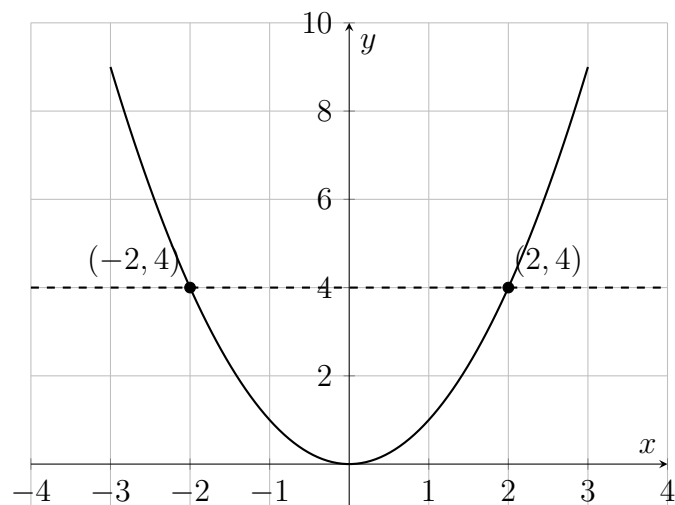
$$x^2 = 4.$$

Podemos interpretá-la como a interseção entre os gráficos:

$$y = x^2$$

e:

$$y = 4.$$



Os valores das abscissas dos pontos de interseção são:

$$x = -2$$

e:

$$x = 2.$$

Logo:

$$x = \pm 2.$$

31 Interpretação do número de soluções

O gráfico também ajuda a entender os três casos possíveis.

31.1 Duas soluções

$$x^2 = 4.$$

A reta:

$$y = 4$$

intersecta a parábola em dois pontos.

Logo, existem duas soluções.

31.2 Uma solução

$$x^2 = 0.$$

A reta:

$$y = 0$$

toca a parábola apenas no ponto:

$$(0, 0).$$

Logo, existe uma solução:

$$x = 0.$$

31.3 Nenhuma solução real

$$x^2 = -4.$$

A reta:

$$y = -4$$

fica abaixo da parábola:

$$y = x^2.$$

Não há interseção.

Logo:

$$S = \emptyset.$$

32 Aplicação: área de um quadrado

Definição 32.1: Área de um quadrado

Se um quadrado possui lado l , sua área é:

$$A = l^2.$$

Exemplo

Um quadrado possui área:

$$81 \text{ cm}^2.$$

Qual é a medida do lado?

Resolução

Temos:

$$l^2 = 81.$$

Algebricamente:

$$l = \pm 9.$$

Porém, como l representa uma medida de comprimento:

$$l > 0.$$

Portanto, no contexto geométrico:

$$l = 9 \text{ cm.}$$

Atenção

A equação:

$$x^2 = 81$$

possui duas soluções algébricas:

$$x = \pm 9.$$

Mas, se x representa comprimento, a solução negativa é descartada pelo contexto.

33 Aplicação: área desconhecida

Exemplo

A área de um quadrado é:

$$200 \text{ m}^2.$$

Determine a medida exata de seu lado.

Resolução

Se l é o lado:

$$l^2 = 200.$$

Então:

$$l = \sqrt{200}.$$

Como:

$$200 = 100 \cdot 2,$$

temos:

$$\sqrt{200} = \sqrt{100}\sqrt{2}.$$

Logo:

$$l = 10\sqrt{2} \text{ m.}$$

Aproximadamente:

$$l \approx 14,14 \text{ m.}$$

34 Aplicação: área do círculo

Exemplo

Um círculo possui área:

$$A = 49\pi \text{ cm}^2.$$

Determine seu raio.

Resolução

A área do círculo é:

$$A = \pi r^2.$$

Logo:

$$\pi r^2 = 49\pi.$$

Dividimos por π :

$$r^2 = 49.$$

Algebricamente:

$$r = \pm 7.$$

Como raio é uma medida positiva:

$$\boxed{r = 7 \text{ cm.}}$$

35 Aplicação: problema com velocidade

Exemplo

Em determinado modelo simplificado, uma grandeza E é dada por:

$$E = 2v^2.$$

Se:

$$E = 72,$$

determine os valores algébricos possíveis de v .

Resolução

Temos:

$$2v^2 = 72.$$

Dividindo por 2:

$$v^2 = 36.$$

Logo:

$$v = \pm 6.$$

Assim:

$$\boxed{v = \pm 6.}$$

Se v representar apenas o módulo de uma velocidade, utilizaremos:

$$v = 6.$$

36 Aplicação: dimensões de um quadrado

Exemplo

O lado de um quadrado mede $x + 2$ cm e sua área é 49 cm^2 .
Determine x .

Resolução

Temos:

$$(x + 2)^2 = 49.$$

Embora essa equação não esteja inicialmente na forma $ax^2 = b$, podemos usar a ideia:

$$x + 2 = \pm 7.$$

Temos dois casos.

Caso 1:

$$x + 2 = 7.$$

Logo:

$$x = 5.$$

Caso 2:

$$x + 2 = -7.$$

Logo:

$$x = -9.$$

Entretanto, a medida do lado é:

$$x + 2.$$

Se:

$$x = -9,$$

teríamos lado:

$$-7 \text{ cm},$$

o que não é geometricamente admissível.

Portanto:

$$\boxed{x = 5.}$$

Observação

Esse exemplo antecipa uma extensão importante: equações em que uma expressão inteira aparece elevada ao quadrado.

37 Resolução por fatoração: observação

Considere:

$$x^2 = 25.$$

Podemos escrever:

$$x^2 - 25 = 0.$$

Como:

$$x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5),$$

temos:

$$(x - 5)(x + 5) = 0.$$

Portanto:

$$x - 5 = 0$$

ou:

$$x + 5 = 0.$$

Logo:

$$x = 5$$

ou:

$$x = -5.$$

Observação

Esse método utiliza fatoração e a propriedade do produto nulo. Ele será aprofundado posteriormente. Para as equações do tipo $ax^2 = b$, o método da raiz quadrada é geralmente mais direto.

38 Propriedade do produto nulo

Teorema 38.1: Produto nulo

Se:

$$ab = 0,$$

então:

$$a = 0$$

ou:

$$b = 0.$$

Por exemplo:

$$(x - 3)(x + 3) = 0$$

implica:

$$x - 3 = 0$$

ou:

$$x + 3 = 0.$$

Logo:

$$x = 3$$

ou:

$$x = -3.$$

39 Comparação com equações do primeiro grau

Considere:

$$2x = 8.$$

Temos apenas:

$$x = 4.$$

Agora considere:

$$2x^2 = 8.$$

Dividimos por 2:

$$x^2 = 4.$$

Logo:

$$x = \pm 2.$$

Equação	Grau	Soluções
$2x = 8$	1	$x = 4$
$2x^2 = 8$	2	$x = \pm 2$

40 Erros comuns

Atenção

Erro 1: esquecer uma das soluções.

Errado:

$$x^2 = 25 \Rightarrow x = 5.$$

Correto:

$$x = \pm 5.$$

Atenção

Erro 2: escrever

$$\sqrt{25} = \pm 5.$$

Isso está errado.

O correto é:

$$\sqrt{25} = 5.$$

Já:

$$x^2 = 25$$

implica:

$$x = \pm 5.$$

Atenção

Erro 3: dividir apenas um lado da equação.

De:

$$4x^2 = 36,$$

devemos dividir **ambos os lados** por 4:

$$x^2 = 9.$$

Atenção

Erro 4: achar que

$$x^2 = -9$$

possui solução real:

$$x = -3.$$

Mas:

$$(-3)^2 = 9,$$

e não -9 .

Portanto:

$$S = \emptyset$$

em $\mathbb{R}$.

Atenção

Erro 5: confundir

$$(-3)^2$$

com:

$$-3^2.$$

Temos:

$$(-3)^2 = 9,$$

mas:

$$-3^2 = -(3^2) = -9.$$

Atenção

Erro 6: aceitar soluções incompatíveis com o contexto.

Se:

$$l^2 = 36$$

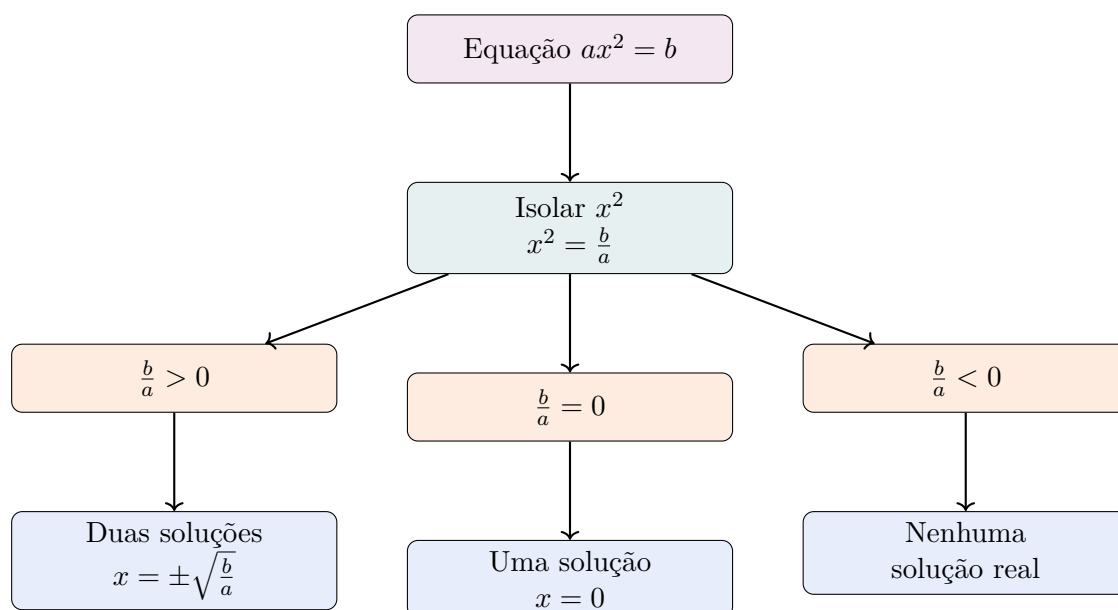
representa o lado de um quadrado, algebricamente:

$$l = \pm 6.$$

Porém, como uma medida de comprimento não pode ser negativa:

$$l = 6.$$

41 Mapa conceitual



42 Resumo teórico

Situação	Condição	Resultado
$x^2 = k$	$k > 0$	$x = \pm\sqrt{k}$
$x^2 = 0$	$k = 0$	$x = 0$
$x^2 = k$	$k < 0$	nenhuma solução real
$ax^2 = b$	$a \neq 0$	$x^2 = \frac{b}{a}$

Notação

Regra fundamental:

$$ax^2 = b$$

com:

$$a \neq 0.$$

Dividindo por a :

$$x^2 = \frac{b}{a}.$$

Se:

$$\frac{b}{a} > 0,$$

então:

$$x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Se:

$$\frac{b}{a} = 0,$$

então:

$$x = 0.$$

Se:

$$\frac{b}{a} < 0,$$

então:

$$S = \emptyset \text{ em } \mathbb{R}.$$

43 Exercícios

43.1 Parte A – Reconhecimento

Exercício

Indique quais equações são do segundo grau.

a)

$$2x + 3 = 7$$

b)

$$x^2 = 16$$

c)

$$3x^2 = 27$$

d)

$$x^3 = 8$$

e)

$$4x^2 - 5 = 0$$

f)

$$7x = 21$$

43.2 Parte B – Equações básicas

Exercício

Resolva em $\mathbb{R}$.

a) $x^2 = 9$

e) $x^2 = 81$

b) $x^2 = 16$

f) $x^2 = 100$

c) $x^2 = 25$

g) $x^2 = 1$

d) $x^2 = 64$

h) $x^2 = 0$

43.3 Parte C – Coeficiente diferente de 1

Exercício

Resolva.

a) $2x^2 = 18$

d) $5x^2 = 125$

b) $3x^2 = 48$

e) $8x^2 = 72$

c) $4x^2 = 100$

f) $10x^2 = 360$

43.4 Parte D – Soluções irracionais

Exercício

Resolva, deixando a resposta na forma exata.

a)

$$x^2 = 2$$

b)

$$x^2 = 3$$

c)

$$2x^2 = 14$$

d)

$$3x^2 = 15$$

e)

$$5x^2 = 30$$

43.5 Parte E – Existência de soluções reais

Exercício

Resolva em $\mathbb{R}$.

a)

$$x^2 = -4$$

b)

$$3x^2 = -12$$

c)

$$-2x^2 = -18$$

d)

$$-5x^2 = 45$$

e)

$$-7x^2 = 0$$

43.6 Parte F – Reorganização

Exercício

Resolva.

a)

$$x^2 - 25 = 0$$

b)

$$2x^2 - 32 = 0$$

c)

$$3x^2 + 27 = 0$$

d)

$$4x^2 - 100 = 0$$

e)

$$5x^2 + 20 = 0$$

43.7 Parte G – Verificação

Exercício

Verifique se os valores indicados são soluções.

a)

$$x^2 = 49, \quad x = 7$$

b)

$$x^2 = 49, \quad x = -7$$

c)

$$2x^2 = 18, \quad x = 3$$

d)

$$2x^2 = 18, \quad x = -3$$

e)

$$3x^2 = 12, \quad x = 2$$

43.8 Parte H – Número de soluções

Exercício

Sem resolver completamente, diga se cada equação possui duas, uma ou nenhuma solução real.

a)

$$x^2 = 15$$

b)

$$x^2 = 0$$

c)

$$x^2 = -7$$

d)

$$-3x^2 = -12$$

e)

$$-2x^2 = 8$$

43.9 Parte I – Problemas

Exercício

Um quadrado possui área de:

$$144 \text{ cm}^2.$$

Determine a medida de seu lado.

Exercício

Um quadrado possui área de:

$$72 \text{ cm}^2.$$

Determine a medida exata de seu lado.

Exercício

Um círculo possui área:

$$64\pi \text{ cm}^2.$$

Determine seu raio.

Exercício

O lado de um quadrado mede x metros e sua área é:

$$225 \text{ m}^2.$$

Determine x , considerando que x representa comprimento.

Exercício

Uma grandeza E satisfaz:

$$E = 3v^2.$$

Se:

$$E = 147,$$

determine os valores algébricos possíveis de v .

44 Gabarito comentado

44.1 Parte A

Resolução

São equações do segundo grau:

$$b, c, e.$$

A equação:

$$x^3 = 8$$

é do terceiro grau.

As equações:

$$2x + 3 = 7$$

e:

$$7x = 21$$

são do primeiro grau.

44.2 Parte B

Resolução

a)

$$x = \pm 3$$

e)

$$x = \pm 9$$

b)

$$x = \pm 4$$

f)

$$x = \pm 10$$

c)

$$x = \pm 5$$

g)

$$x = \pm 1$$

d)

$$x = \pm 8$$

h)

$$x = 0$$

44.3 Parte C

Resolução

a)

$$2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \boxed{x = \pm 3}.$$

b)

$$3x^2 = 48 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow \boxed{x = \pm 4}.$$

c)

$$4x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow \boxed{x = \pm 5}.$$

d)

$$5x^2 = 125 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow \boxed{x = \pm 5}.$$

e)

$$8x^2 = 72 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \boxed{x = \pm 3}.$$

f)

$$10x^2 = 360 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow \boxed{x = \pm 6}.$$

44.4 Parte D

Resolução

a)

$$\boxed{x = \pm\sqrt{2}}.$$

b)

$$\boxed{x = \pm\sqrt{3}}.$$

c)

$$2x^2 = 14 \Rightarrow x^2 = 7.$$

Logo:

$$\boxed{x = \pm\sqrt{7}}.$$

d)

$$3x^2 = 15 \Rightarrow x^2 = 5.$$

Logo:

$$\boxed{x = \pm\sqrt{5}}.$$

e)

$$5x^2 = 30 \Rightarrow x^2 = 6.$$

Logo:

$$\boxed{x = \pm\sqrt{6}}.$$

44.5 Parte E

Resolução

a)

$$x^2 = -4.$$

Não há solução real:

$$\boxed{S = \emptyset}.$$

b)

$$3x^2 = -12 \Rightarrow x^2 = -4.$$

Logo:

$$\boxed{S = \emptyset}.$$

c)

$$-2x^2 = -18 \Rightarrow x^2 = 9.$$

Portanto:

$$\boxed{x = \pm 3}.$$

d)

$$-5x^2 = 45 \Rightarrow x^2 = -9.$$

Logo:

$$\boxed{S = \emptyset}.$$

e)

$$-7x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0.$$

Portanto:

$$\boxed{x = 0}.$$

44.6 Parte F

Resolução

a)

$$x^2 - 25 = 0$$

$$x^2 = 25$$

$$\boxed{x = \pm 5}.$$

b)

$$2x^2 - 32 = 0$$

$$2x^2 = 32$$

$$x^2 = 16.$$

Logo:

$$\boxed{x = \pm 4}.$$

c)

$$3x^2 + 27 = 0$$

$$3x^2 = -27$$

$$x^2 = -9.$$

Logo:

$$\boxed{S = \emptyset}.$$

d)

$$4x^2 - 100 = 0$$

$$4x^2 = 100.$$

$$x^2 = 25.$$

Logo:

$$\boxed{x = \pm 5}.$$

e)

$$5x^2 + 20 = 0$$

$$5x^2 = -20$$

$$x^2 = -4.$$

Logo:

$$\boxed{S = \emptyset}.$$

44.7 Parte G

Resolução

a)

$$7^2 = 49.$$

Logo, é solução.

b)

$$(-7)^2 = 49.$$

Logo, também é solução.

c)

$$2(3)^2 = 18.$$

Logo, é solução.

d)

$$2(-3)^2 = 18.$$

Logo, também é solução.

e)

$$3(2)^2 = 12.$$

Logo, é solução.

44.8 Parte H

Resolução

a)

$$x^2 = 15$$

possui:

2 soluções reais.

b)

$$x^2 = 0$$

possui:

1 solução real.

c)

$$x^2 = -7$$

possui:

0 soluções reais.

d)

$$-3x^2 = -12 \Rightarrow x^2 = 4.$$

Portanto:

2 soluções reais.

e)

$$-2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = -4.$$

Portanto:

0 soluções reais.

44.9 Parte I

Resolução

1.

Se l é o lado:

$$l^2 = 144.$$

Algebricamente:

$$l = \pm 12.$$

Como l é comprimento:

$$l = 12 \text{ cm.}$$

2.

$$l^2 = 72.$$

Logo:

$$l = \sqrt{72}.$$

Simplificando:

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}.$$

Portanto:

$$l = 6\sqrt{2} \text{ cm.}$$

3.

$$A = \pi r^2.$$

Logo:

$$\pi r^2 = 64\pi.$$

Dividindo por π :

$$r^2 = 64.$$

Como raio é positivo:

$$r = 8 \text{ cm.}$$

4.

$$x^2 = 225.$$

Algebricamente:

$$x = \pm 15.$$

Como x representa comprimento:

$$x = 15 \text{ m.}$$

5.

$$3v^2 = 147.$$

Dividindo por 3:

$$v^2 = 49.$$

Logo:

$$v = \pm 7.$$

45 Avaliação final

Avaliação final – Equações do 2º grau do tipo ax^2

Resolva as questões abaixo.

1. Defina uma equação do segundo grau.
2. Explique por que o coeficiente a deve satisfazer:

$$a \neq 0.$$

3. Resolva:

$$x^2 = 169.$$

4. Resolva:

$$3x^2 = 75.$$

5. Resolva:

$$4x^2 = 20.$$

6. Resolva em $\mathbb{R}$:

$$5x^2 = -45.$$

7. Resolva:

$$-2x^2 = -32.$$

8. Resolva:

$$3x^2 - 48 = 0.$$

9. Explique a diferença entre:

$$\sqrt{36}$$

e as soluções de:

$$x^2 = 36.$$

10. Um quadrado possui área:

$$98 \text{ cm}^2.$$

Determine a medida exata de seu lado.

45.1 Gabarito da avaliação final

Resolução

1. Uma equação do segundo grau é uma equação que pode ser escrita na forma:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

com:

$$a \neq 0.$$

2. Se:

$$a = 0,$$

o termo:

$$ax^2$$

desaparece. Assim, a equação deixa de ser de segundo grau.

- 3.

$$x^2 = 169.$$

Logo:

$$x = \pm\sqrt{169}.$$

Portanto:

$$\boxed{x = \pm 13.}$$

- 4.

$$3x^2 = 75.$$

Dividindo por 3:

$$x^2 = 25.$$

Logo:

$$\boxed{x = \pm 5.}$$

5.

$$4x^2 = 20.$$

Dividindo por 4:

$$x^2 = 5.$$

Portanto:

$$x = \pm\sqrt{5}.$$

6.

$$5x^2 = -45.$$

Dividindo por 5:

$$x^2 = -9.$$

Portanto:

$$S = \emptyset \text{ em } \mathbb{R}.$$

7.

$$-2x^2 = -32.$$

Dividindo por -2 :

$$x^2 = 16.$$

Logo:

$$x = \pm 4.$$

8.

$$3x^2 - 48 = 0.$$

Então:

$$3x^2 = 48.$$

$$x^2 = 16.$$

Logo:

$$x = \pm 4.$$

9. O radical:

$$\sqrt{36}$$

representa a raiz quadrada principal:

$$\boxed{\sqrt{36} = 6.}$$

Já a equação:

$$x^2 = 36$$

procura todos os números cujo quadrado é 36.

Logo:

$$\boxed{x = \pm 6.}$$

10. Se l é o lado:

$$l^2 = 98.$$

Logo:

$$l = \sqrt{98}.$$

Como:

$$98 = 49 \cdot 2,$$

temos:

$$\sqrt{98} = 7\sqrt{2}.$$

Como lado é positivo:

$$\boxed{l = 7\sqrt{2} \text{ cm.}}$$

46 Conclusão

As equações do segundo grau do tipo:

$$ax^2 = b$$

constituem uma primeira introdução às equações quadráticas.

Diferentemente das equações do primeiro grau, elas podem apresentar duas soluções, uma solução ou nenhuma solução real.

As ideias fundamentais deste curso são:

1) uma equação do segundo grau possui termo com x^2 ;

2) na forma:

$$ax^2 = b,$$

devemos ter:

$$a \neq 0;$$

3) para resolver, isolamos:

$$x^2;$$

4) obtemos:

$$x^2 = \frac{b}{a};$$

5) se:

$$\frac{b}{a} > 0,$$

existem duas soluções reais:

$$x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}};$$

6) se:

$$\frac{b}{a} = 0,$$

existe uma solução:

$$x = 0;$$

7) se:

$$\frac{b}{a} < 0,$$

não existe solução no conjunto dos números reais;

8) o símbolo:

$$\sqrt{k}$$

representa a raiz principal e não deve ser confundido com as duas soluções de:

$$x^2 = k;$$

9) as soluções devem ser verificadas na equação original;

10) em problemas reais, o contexto pode eliminar uma das soluções algébricas.

Notação

Resumo final:

$$ax^2 = b, \quad a \neq 0$$

$$x^2 = \frac{b}{a}$$

Se:

$$\frac{b}{a} > 0,$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$$

Se:

$$\frac{b}{a} = 0,$$

$$x = 0$$

Se:

$$\frac{b}{a} < 0,$$

$$S = \emptyset \quad \text{em } \mathbb{R}$$

e:

$$\sqrt{k} \neq \pm \sqrt{k}$$

pois:

$$\sqrt{k}$$

representa apenas a raiz principal, enquanto:

$$x^2 = k$$

possui, para $k > 0$:

$$x = \pm \sqrt{k}.$$

Fim do curso