

Equação Linear de 1º Grau com Duas Incógnitas

Matemática – 8º Ano

Soluções, pares ordenados e representação no plano cartesiano

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste curso, o estudante deverá ser capaz de:

- 1) compreender o significado de uma equação com duas incógnitas;
- 2) reconhecer uma equação linear do primeiro grau com duas incógnitas;
- 3) identificar seus coeficientes;
- 4) verificar se um par ordenado é solução de uma equação;
- 5) determinar diferentes soluções de uma mesma equação linear;
- 6) compreender que, em geral, uma equação linear com duas incógnitas possui infinitas soluções reais;
- 7) organizar soluções em tabelas;
- 8) representar pares ordenados no plano cartesiano;
- 9) compreender que o conjunto de soluções de uma equação linear é representado geometricamente por uma reta;
- 10) transformar uma equação da forma $ax + by = c$ na forma $y = mx + n$, quando possível;
- 11) determinar interceptos com os eixos coordenados;
- 12) interpretar equações lineares em problemas contextualizados.

Sumário

1	Introdução	1
2	Revisão: equação	2
3	Incógnitas	2
4	Equação linear do primeiro grau com duas incógnitas	3

5	O que significa “linear”?	4
6	Solução de uma equação com duas incógnitas	5
7	Importância da ordem no par ordenado	6
8	Uma equação pode ter várias soluções	7
9	Determinando soluções	8
10	Isolando uma das incógnitas	9
11	Forma reduzida da equação da reta	10
12	Tabela de valores	11
13	Revisão do plano cartesiano	12
14	Representação de pontos no plano cartesiano	13
15	Representação gráfica de uma equação linear	13
16	Por que dois pontos bastam para construir uma reta?	14
17	Interceptos com os eixos	15
18	Regra dos interceptos	16
19	Exemplo completo de construção gráfica	17
20	Coeficiente angular: introdução	18
21	Reta horizontal	19
22	Reta vertical	20
23	Casos especiais na forma $ax + by = c$	20
23.1	Quando $a = 0$	20
23.2	Quando $b = 0$	21
24	Interpretação de pontos que pertencem ou não à reta	22
25	Modelagem de situações reais	23

26 Interpretação das soluções em problemas	24
27 Problema com preços	24
28 Problema com perímetro	25
29 Tabela, equação e gráfico	26
30 Algoritmo para construir o gráfico	27
31 Erros comuns	27
32 Mapa conceitual	29
33 Resumo teórico	29
34 Exercícios	30
34.1 Parte A – Reconhecimento	30
34.2 Parte B – Coeficientes	31
34.3 Parte C – Verificação de soluções	31
34.4 Parte D – Determinação de soluções	31
34.5 Parte E – Forma reduzida	32
34.6 Parte F – Tabelas	32
34.7 Parte G – Interceptos	32
34.8 Parte H – Representação gráfica	33
34.9 Parte I – Problemas	33
35 Gabarito comentado	34
35.1 Parte A	34
35.2 Parte B	34
35.3 Parte C	34
35.4 Parte D	35
35.5 Parte E	36
35.6 Parte F	37
35.7 Parte G	37
35.8 Parte I	38
36 Avaliação final	40
36.1 Gabarito da avaliação final	41

1 Introdução

No estudo anterior, trabalhamos com expressões algébricas como:

$$3x + 5$$

e:

$$2x + 4y.$$

Quando introduzimos um sinal de igualdade, podemos obter uma equação.

Por exemplo:

$$x + 3 = 7.$$

Essa é uma equação com uma incógnita.

Agora consideraremos expressões como:

$$x + y = 5.$$

Nesse caso, existem duas incógnitas:

$$x$$

e:

$$y.$$

Não procuramos mais necessariamente um único número. Procuramos **pares de números** que tornam a igualdade verdadeira.

Exemplo

Considere:

$$x + y = 5.$$

Se:

$$x = 2,$$

então devemos ter:

$$2 + y = 5.$$

Logo:

$$y = 3.$$

Portanto:

$$(2, 3)$$

é uma solução da equação.

2 Revisão: equação

Definição 2.1: Equação

Uma **equação** é uma igualdade matemática que contém uma ou mais incógnitas.

Exemplo

São equações:

$$x + 5 = 12,$$

$$2x - 3 = 9,$$

$$x + y = 7,$$

$$3x + 2y = 12.$$

Observação

Uma expressão algébrica como:

$$3x + 2y$$

não é uma equação, pois não possui sinal de igualdade.

3 Incógnitas

Definição 3.1: Incógnita

Uma **incógnita** é uma letra utilizada para representar um valor desconhecido que se deseja determinar.

Na equação:

$$2x + 3y = 12,$$

as incógnitas são:

$$x$$

e:

y .

4 Equação linear do primeiro grau com duas incógnitas

Definição 4.1: Equação linear com duas incógnitas

Uma **equação linear do primeiro grau com duas incógnitas** é uma equação que pode ser escrita na forma:

$$ax + by = c,$$

em que:

$$a, b, c \in \mathbb{R},$$

com:

$$(a, b) \neq (0, 0).$$

As letras x e y representam as incógnitas.

Notação

A forma geral é:

$$ax + by = c.$$

Os números:

$$a, \quad b$$

são os coeficientes das incógnitas.

O número:

$$c$$

é o termo independente.

Exemplo

Na equação:

$$3x + 2y = 10,$$

temos:

$$a = 3,$$

$$b = 2,$$

e:

$$c = 10.$$

Exemplo

Na equação:

$$-4x + 7y = 5,$$

temos:

$$a = -4, \quad b = 7, \quad c = 5.$$

5 O que significa “linear”?

Definição 5.1: Linearidade

Uma equação é chamada de **linear** quando as incógnitas aparecem apenas elevadas à primeira potência e não são multiplicadas umas pelas outras.

São lineares:

$$2x + 3y = 8,$$

$$x - y = 5,$$

$$4x = 12,$$

$$7y = 21.$$

Não são lineares:

$$x^2 + y = 5,$$

$$xy = 12,$$

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Atenção

Na equação linear:

$$ax + by = c,$$

não aparecem termos como:

$$x^2, \quad y^2, \quad xy.$$

6 Solução de uma equação com duas incógnitas

Definição 6.1: Solução

Uma **solução** de uma equação com duas incógnitas é um par ordenado:

$$(x, y)$$

que, quando substituído na equação, torna a igualdade verdadeira.

Exemplo

Considere:

$$x + y = 6.$$

O par:

$$(2, 4)$$

é solução?

Resolução

Substituímos:

$$x = 2, \quad y = 4.$$

Então:

$$2 + 4 = 6.$$

Como a igualdade é verdadeira:

$$(2, 4) \text{ é solução.}$$

Exemplo

Considere:

$$2x + y = 7.$$

O par:

$$(3, 2)$$

é solução?

Resolução

Substituímos:

$$2(3) + 2.$$

Calculando:

$$6 + 2 = 8.$$

Como:

$$8 \neq 7,$$

temos:

$(3, 2)$ não é solução.

7 Importância da ordem no par ordenado

Atenção

Os pares:

$$(2, 3)$$

e:

$$(3, 2)$$

não são, em geral, iguais.

No par:

$$(x, y),$$

o primeiro valor corresponde a x , e o segundo corresponde a y .

Exemplo

Considere:

$$2x + y = 7.$$

Para:

$$(2, 3),$$

temos:

$$2(2) + 3 = 7.$$

Logo:

$$(2, 3)$$

é solução.

Por outro lado, para:

$$(3, 2),$$

temos:

$$2(3) + 2 = 8.$$

Portanto:

$$(3, 2)$$

não é solução.

8 Uma equação pode ter várias soluções

Considere:

$$x + y = 5.$$

Temos:

$$x = 0 \Rightarrow y = 5,$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 4,$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 3,$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 2,$$

$$x = 4 \Rightarrow y = 1.$$

Também podemos escolher:

$$x = -1,$$

o que produz:

$$y = 6.$$

Ou ainda:

$$x = 2,5,$$

o que produz:

$$y = 2,5.$$

Assim, existem muitos pares solução.

Teorema 8.1: Infinitas soluções

Toda equação linear não degenerada:

$$ax + by = c,$$

com:

$$(a, b) \neq (0, 0),$$

possui infinitas soluções no conjunto dos números reais.

Observação

No 8º ano, essa ideia pode ser compreendida observando que podemos escolher livremente uma das incógnitas e calcular a outra, salvo casos especiais de reta vertical, nos quais uma coordenada permanece fixa e a outra pode variar livremente.

9 Determinando soluções

Considere:

$$2x + y = 8.$$

Podemos escolher um valor para x e determinar y .

Exemplo

Escolha:

$$x = 1.$$

Então:

$$2(1) + y = 8.$$

Logo:

$$2 + y = 8,$$

e:

Assim:

$$y = 6.$$

$$(1, 6)$$

é uma solução.

Exemplo

Escolha:

$$x = 3.$$

Então:

$$2(3) + y = 8.$$

Logo:

$$6 + y = 8.$$

Portanto:

$$y = 2.$$

Assim:

$$(3, 2)$$

é solução.

10 Isolando uma das incógnitas

Considere a equação:

$$2x + y = 8.$$

Podemos isolar y :

$$y = 8 - 2x.$$

Essa forma permite calcular rapidamente y para qualquer valor escolhido de x .

Teorema 10.1: Isolamento de y

Se:

$$ax + by = c$$

e:

$$b \neq 0,$$

então:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

Demonstração.

Partimos de:

$$ax + by = c.$$

Subtraindo ax dos dois lados:

$$by = c - ax.$$

Dividindo por b :

$$y = \frac{c - ax}{b}.$$

Separando:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

11 Forma reduzida da equação da reta

Definição 11.1: Forma reduzida

Uma equação linear pode ser escrita, quando possível, na forma:

$$y = mx + n,$$

em que:

$$m$$

é o coeficiente de x , e:

$$n$$

é o termo constante.

Exemplo

Escreva:

$$2x + y = 8$$

na forma:

$$y = mx + n.$$

Resolução

Isolamos y :

$$y = 8 - 2x.$$

Reorganizando:

$$y = -2x + 8.$$

Portanto:

$$m = -2$$

e:

$$n = 8.$$

Exemplo

Escreva:

$$3x - 2y = 6$$

na forma reduzida.

Resolução

Temos:

$$-2y = 6 - 3x.$$

Dividindo por -2 :

$$y = \frac{3}{2}x - 3.$$

Logo:

$$y = \frac{3}{2}x - 3.$$

12 Tabela de valores

Uma maneira prática de encontrar pontos de uma reta é construir uma tabela de valores.

Exemplo

Considere:

$$y = 2x + 1.$$

Escolhemos alguns valores para x :

$$x = -2, -1, 0, 1, 2.$$

Calculamos os valores correspondentes de y .

x	$y = 2x + 1$	Par ordenado
-2	-3	$(-2, -3)$
-1	-1	$(-1, -1)$
0	1	$(0, 1)$
1	3	$(1, 3)$
2	5	$(2, 5)$

Observação

Todos os pares da tabela satisfazem a mesma equação e, portanto, pertencem ao mesmo conjunto solução.

13 Revisão do plano cartesiano

Definição 13.1: Plano cartesiano

O **plano cartesiano** é um sistema formado por dois eixos numéricos perpendiculares:

- eixo horizontal: eixo x , ou eixo das abscissas;
- eixo vertical: eixo y , ou eixo das ordenadas.

O ponto de encontro dos eixos é a origem:

$$O = (0, 0).$$

Definição 13.2: Coordenadas de um ponto

Um ponto do plano cartesiano é representado por um par ordenado:

$$(x, y),$$

em que:

- x é a abscissa;
- y é a ordenada.

14 Representação de pontos no plano cartesiano

Exemplo

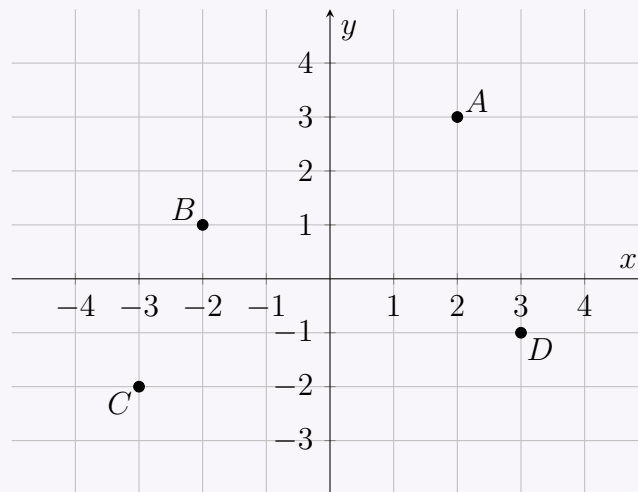
Represente os pontos:

$$A = (2, 3),$$

$$B = (-2, 1),$$

$$C = (-3, -2),$$

$$D = (3, -1).$$



15 Representação gráfica de uma equação linear

Considere:

$$x + y = 4.$$

Algumas soluções são:

$$(0, 4),$$

$$(1, 3),$$

$$(2, 2),$$

$$(3, 1),$$

$(4, 0)$.

Representando esses pontos no plano cartesiano, observamos que eles pertencem a uma mesma reta.

Teorema 15.1: Representação geométrica

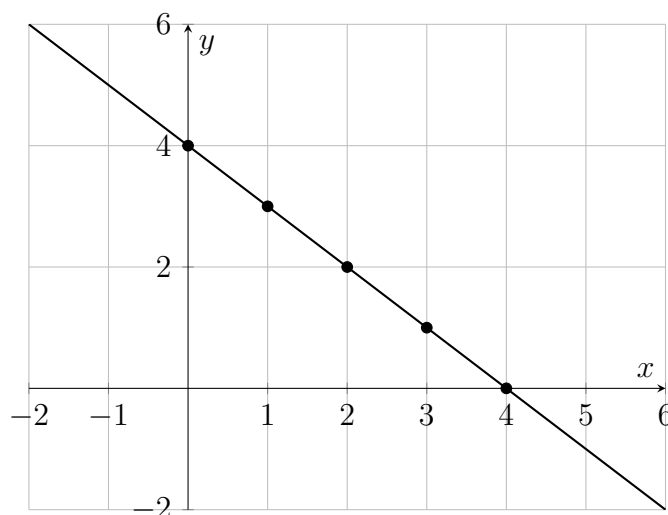
O conjunto de todas as soluções reais de uma equação linear:

$$ax + by = c,$$

com:

$$(a, b) \neq (0, 0),$$

é representado geometricamente por uma reta no plano cartesiano.



Observação

Não existem apenas os cinco pontos indicados. Eles são apenas alguns exemplos de soluções.

Entre quaisquer dois deles existem infinitos outros pontos da reta.

16 Por que dois pontos bastam para construir uma reta?

Teorema 16.1: Determinação de uma reta

Por dois pontos distintos do plano passa uma única reta.

Essa propriedade permite construir o gráfico de uma equação linear encontrando apenas duas soluções distintas.

Exemplo

Construa o gráfico de:

$$x + y = 5.$$

Resolução

Escolhemos:

$$x = 0.$$

Então:

$$y = 5.$$

Logo, temos o ponto:

$$A = (0, 5).$$

Agora escolhemos:

$$y = 0.$$

Então:

$$x = 5.$$

Logo:

$$B = (5, 0).$$

Traçamos a reta que passa por:

$$(0, 5)$$

e:

$$(5, 0).$$

17 Interceptos com os eixos

Definição 17.1: Intercepto com o eixo x

O intercepto de uma reta com o eixo x é o ponto em que:

$$y = 0.$$

Definição 17.2: Intercepto com o eixo y

O intercepto de uma reta com o eixo y é o ponto em que:

$$x = 0.$$

Exemplo

Determine os interceptos de:

$$2x + 3y = 12.$$

Resolução

Para encontrar o intercepto com o eixo x , fazemos:

$$y = 0.$$

Então:

$$2x = 12.$$

Logo:

$$x = 6.$$

Portanto:

$$\boxed{(6, 0)}.$$

Agora fazemos:

$$x = 0.$$

Então:

$$3y = 12.$$

Logo:

$$y = 4.$$

Portanto:

$$\boxed{(0, 4)}.$$

18 Regra dos interceptos

Teorema 18.1: Interceptos de $ax + by = c$

Considere:

$$ax + by = c.$$

Se:

$$a \neq 0,$$

o intercepto com o eixo x é:

$$\left(\frac{c}{a}, 0\right).$$

Se:

$$b \neq 0,$$

o intercepto com o eixo y é:

$$\left(0, \frac{c}{b}\right).$$

19 Exemplo completo de construção gráfica

Considere:

$$3x + 2y = 6.$$

Resolução

Primeiro encontramos o intercepto com o eixo x .
Fazemos:

$$y = 0.$$

Então:

$$3x = 6,$$

logo:

$$x = 2.$$

Primeiro ponto:

$$A = (2, 0).$$

Agora fazemos:

$$x = 0.$$

Então:

$$2y = 6.$$

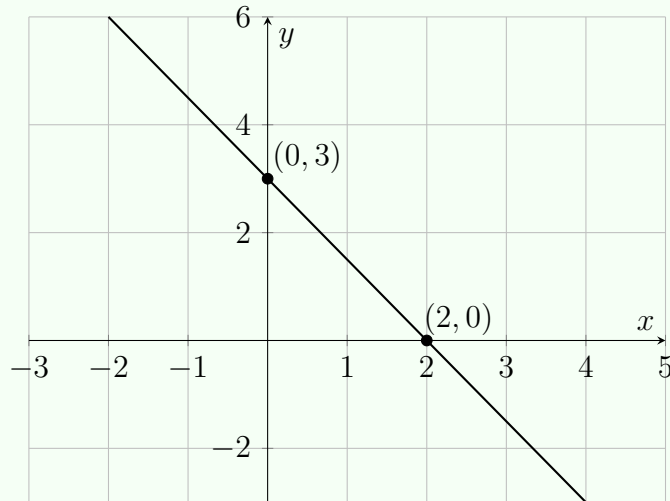
Logo:

$$y = 3.$$

Segundo ponto:

$$B = (0, 3).$$

Traçamos a reta pelos dois pontos.



20 Coeficiente angular: introdução

Na forma:

$$y = mx + n,$$

o número m indica como y varia quando x aumenta.

Definição 20.1: Coeficiente angular

Na equação:

$$y = mx + n,$$

o número m é chamado de **coeficiente angular** da reta.

Se:

$$m > 0,$$

a reta é crescente.

Se:

$$m < 0,$$

a reta é decrescente.

Se:

$$m = 0,$$

a reta é horizontal.

Exemplo

Na equação:

$$y = 2x + 1,$$

temos:

$$m = 2 > 0.$$

Logo, a reta é crescente.

Exemplo

Na equação:

$$y = -3x + 4,$$

temos:

$$m = -3 < 0.$$

Logo, a reta é decrescente.

Observação

O estudo formal do coeficiente angular será aprofundado posteriormente. Neste nível, o objetivo principal é interpretar qualitativamente a direção da reta.

21 Reta horizontal

Considere:

$$y = 3.$$

Nesse caso, y permanece sempre igual a 3, enquanto x pode assumir qualquer valor real.

Algumas soluções são:

$$(-2, 3),$$

$$(0, 3),$$

$$(4, 3).$$

Teorema 21.1: Equação $y = k$

A equação:

$$y = k$$

representa uma reta horizontal paralela ao eixo x .

22 Reta vertical

Considere:

$$x = 2.$$

Nesse caso, x permanece sempre igual a 2, enquanto y pode assumir qualquer valor real.

Algumas soluções são:

$$(2, -3),$$

$$(2, 0),$$

$$(2, 5).$$

Teorema 22.1: Equação $x = k$

A equação:

$$x = k$$

representa uma reta vertical paralela ao eixo y .

Atenção

Uma reta vertical não pode ser escrita na forma:

$$y = mx + n,$$

pois para um mesmo valor de x existem vários valores de y .

23 Casos especiais na forma $ax + by = c$

23.1 Quando $a = 0$

Se:

$$0x + by = c,$$

então:

$$by = c.$$

Logo:

$$y = \frac{c}{b}.$$

Isso representa uma reta horizontal.

Exemplo

equivale a:

$$3y = 12$$

$$y = 4.$$

23.2 Quando $b = 0$

Se:

$$ax + 0y = c,$$

então:

$$ax = c.$$

Logo:

$$x = \frac{c}{a}.$$

Isso representa uma reta vertical.

Exemplo

equivale a:

$$2x = 6$$

$$x = 3.$$

24 Interpretação de pontos que pertencem ou não à reta

Teorema 24.1: Pertinência à reta

Um ponto:

$$P = (x_0, y_0)$$

pertence à reta:

$$ax + by = c$$

se, e somente se:

$$ax_0 + by_0 = c.$$

Exemplo

O ponto:

$$P = (2, 1)$$

pertence à reta:

$$2x + 3y = 7?$$

Resolução

Substituímos:

$$2(2) + 3(1) = 4 + 3 = 7.$$

Logo:

P pertence à reta.

Exemplo

O ponto:

$$Q = (1, 1)$$

pertence à mesma reta?

Resolução

Temos:

$$2(1) + 3(1) = 5.$$

Como:

$$5 \neq 7,$$

temos:

$$Q \text{ não pertence à reta.}$$

25 Modelagem de situações reais

Equações lineares com duas incógnitas aparecem quando duas quantidades variáveis estão relacionadas.

Exemplo

Um ingresso adulto custa R\$ 20,00, e um ingresso infantil custa R\$ 10,00.
Se foram arrecadados R\$ 200,00, escreva uma equação relacionando o número de ingressos adultos e infantis vendidos.

Resolução

Se:

$$x = \text{número de ingressos adultos,}$$

e:

$$y = \text{número de ingressos infantis,}$$

então o valor arrecadado é:

$$20x + 10y.$$

Como o total é 200:

$$20x + 10y = 200.$$

Dividindo tudo por 10:

$$2x + y = 20.$$

26 Interpretação das soluções em problemas

Na equação:

$$2x + y = 20,$$

uma solução é:

$$(5, 10).$$

Isso significa:

$$5$$

ingressos adultos e:

$$10$$

ingressos infantis.

De fato:

$$2(5) + 10 = 20.$$

Outra solução é:

$$(8, 4).$$

Pois:

$$2(8) + 4 = 20.$$

Atenção

Em um problema real, nem todas as soluções reais da reta fazem sentido. Por exemplo, uma quantidade de ingressos não pode ser negativa nem fracionária. Assim, o contexto pode restringir o conjunto de soluções.

27 Problema com preços

Exemplo

Uma loja vende cadernos a R\$ 12,00 e canetas a R\$ 3,00.
Uma compra totaliza R\$ 60,00.
Se:

x = quantidade de cadernos

e:

y = quantidade de canetas,

determine a equação.

Resolução

O custo dos cadernos é:

$$12x.$$

O custo das canetas é:

$$3y.$$

Logo:

$$12x + 3y = 60.$$

Simplificando por 3:

$$4x + y = 20.$$

28 Problema com perímetro

Exemplo

Um retângulo tem perímetro de 30 cm.

Se:

x = comprimento

e:

y = largura,

escreva uma equação.

Resolução

O perímetro é:

$$2x + 2y.$$

Como o perímetro é 30:

$$2x + 2y = 30.$$

Dividindo por 2:

$$x + y = 15.$$

29 Tabela, equação e gráfico

Uma mesma relação linear pode ser representada de três maneiras:

- 1) equação;
- 2) tabela;
- 3) gráfico.

Considere:

$$y = -x + 4.$$

x	y	Par
0	4	(0, 4)
1	3	(1, 3)
2	2	(2, 2)
3	1	(3, 1)
4	0	(4, 0)

Esses pontos formam a reta:

$$x + y = 4.$$

30 Algoritmo para construir o gráfico

Notação

Para construir o gráfico de:

$$ax + by = c,$$

podemos seguir o procedimento:

- 1) escolha um valor conveniente para x ;
- 2) calcule o valor correspondente de y ;
- 3) obtenha um primeiro ponto;
- 4) escolha outro valor de x ;
- 5) calcule o novo y ;
- 6) obtenha um segundo ponto;
- 7) represente os dois pontos no plano;
- 8) trace a reta que passa por eles.

Uma alternativa eficiente é encontrar diretamente os interceptos:

$$x = 0$$

e:

$$y = 0.$$

31 Erros comuns

Atenção

Erro 1: pensar que a solução é um único número.

Em:

$$x + y = 5,$$

a solução é um par:

$$(x, y).$$

Atenção

Erro 2: trocar a ordem do par ordenado.

Se:

$$(2, 3)$$

é solução, isso não implica que:

$$(3, 2)$$

também seja.

Atenção

Erro 3: verificar apenas uma das incógnitas.

Para verificar se:

$$(x_0, y_0)$$

é solução, devemos substituir os dois valores na equação.

Atenção

Erro 4: pensar que dois pontos são as únicas soluções.

Dois pontos bastam para desenhar a reta, mas a reta contém infinitos pontos.

Atenção

Erro 5: esquecer que no eixo x :

$$y = 0.$$

E no eixo y :

$$x = 0.$$

Atenção

Erro 6: dividir apenas um termo ao isolar uma variável.

De:

$$2x + 4y = 8,$$

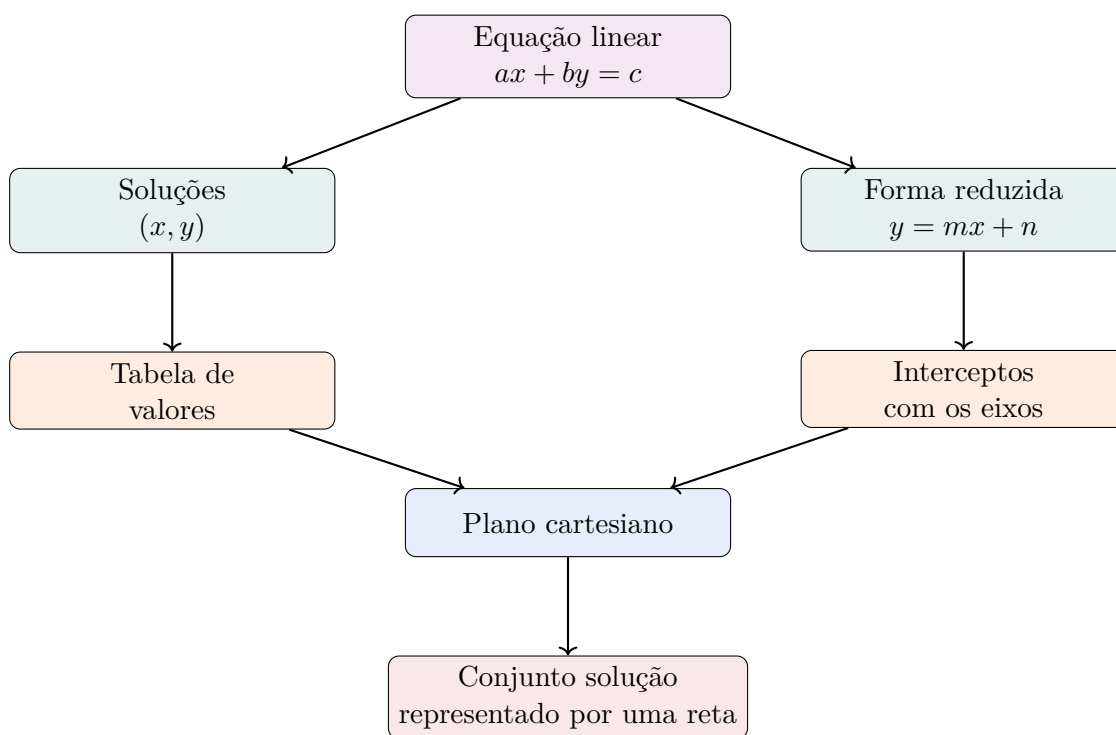
temos:

$$4y = 8 - 2x.$$

Então devemos dividir **todos** os termos por 4:

$$y = 2 - \frac{x}{2}.$$

32 Mapa conceitual



33 Resumo teórico

Conceito	Representação
Equação linear com duas incógnitas	$ax + by = c$
Solução	par ordenado (x, y)
Verificação	substituir x e y
Forma reduzida	$y = mx + n$
Intercepto em x	$y = 0$
Intercepto em y	$x = 0$
Reta horizontal	$y = k$
Reta vertical	$x = k$
Representação geométrica	reta no plano cartesiano

Notação

Resumo:

$$ax + by = c$$

Se:

$$b \neq 0,$$

então:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

Intercepto com x :

$$\left(\frac{c}{a}, 0\right)$$

quando $a \neq 0$.

Intercepto com y :

$$\left(0, \frac{c}{b}\right)$$

quando $b \neq 0$.

34 Exercícios

34.1 Parte A – Reconhecimento

Exercício

Indique quais equações são lineares do primeiro grau com duas incógnitas.

a) $2x + 3y = 7$

b) $x^2 + y = 5$

c) $x - y = 4$

d) $xy = 6$

e) $5x = 10$

f) $3y = 12$

g) $x^2 + y^2 = 25$

h) $-4x + 7y = 2$

34.2 Parte B – Coeficientes

Exercício

Identifique a , b e c .

- a) $2x + 3y = 12$
- b) $5x - y = 8$
- c) $-3x + 4y = 20$
- d) $x + 7y = -5$

34.3 Parte C – Verificação de soluções

Exercício

Verifique se o par indicado é solução.

- a) $x + y = 7$, com $(3, 4)$.
- b) $2x + y = 8$, com $(2, 4)$.
- c) $3x - 2y = 5$, com $(3, 2)$.
- d) $x + 2y = 10$, com $(4, 3)$.
- e) $4x + y = 9$, com $(2, 1)$.

34.4 Parte D – Determinação de soluções

Exercício

Determine y para os valores de x indicados.

- a) $x + y = 8$, para $x = 3$.
- b) $2x + y = 10$, para $x = 4$.
- c) $3x + y = 12$, para $x = 2$.
- d) $x - 2y = 6$, para $x = 10$.

34.5 Parte E – Forma reduzida

Exercício

Escreva na forma:

$$y = mx + n.$$

- a) $x + y = 5$
- b) $2x + y = 8$
- c) $3x + 2y = 12$
- d) $4x - 2y = 6$
- e) $-x + 5y = 10$

34.6 Parte F – Tabelas

Exercício

Complete uma tabela para cada equação utilizando:

$$x = -2, -1, 0, 1, 2.$$

- a) $y = x + 2$
- b) $y = 2x - 1$
- c) $y = -x + 3$

34.7 Parte G – Interceptos

Exercício

Determine os interceptos com os eixos x e y .

- a) $x + y = 6$
- b) $2x + 3y = 12$
- c) $4x + 2y = 8$
- d) $5x - y = 10$

34.8 Parte H – Representação gráfica

Exercício

Construa o gráfico das equações utilizando dois pontos.

- a) $x + y = 4$
- b) $2x + y = 6$
- c) $x - y = 2$
- d) $y = 3$
- e) $x = -2$

34.9 Parte I – Problemas

Exercício

Uma loja vende camisetas por R\$ 30,00 e bonés por R\$ 20,00. Uma compra totalizou R\$ 180,00.

Se:

$x = \text{número de camisetas}$

e:

$y = \text{número de bonés,}$

- a) escreva a equação;
- b) verifique se $(4, 3)$ é uma solução;
- c) encontre outra solução inteira não negativa.

Exercício

O perímetro de um retângulo é 40 cm. Se x representa o comprimento e y a largura:

- a) escreva a equação;
- b) simplifique-a;
- c) determine uma possível dimensão do retângulo.

35 Gabarito comentado

35.1 Parte A

Resolução

São lineares:

$$a, c, e, f, h.$$

As equações:

$$x^2 + y = 5,$$

$$xy = 6,$$

e:

$$x^2 + y^2 = 25$$

não são lineares.

35.2 Parte B

Resolução

a)

$$a = 2, \quad b = 3, \quad c = 12.$$

b)

$$a = 5, \quad b = -1, \quad c = 8.$$

c)

$$a = -3, \quad b = 4, \quad c = 20.$$

d)

$$a = 1, \quad b = 7, \quad c = -5.$$

35.3 Parte C

Resolução

a)

$$3 + 4 = 7.$$

Logo, é solução.

b)

$$2(2) + 4 = 8.$$

Logo, é solução.

c)

$$3(3) - 2(2) = 9 - 4 = 5.$$

Logo, é solução.

d)

$$4 + 2(3) = 10.$$

Logo, é solução.

e)

$$4(2) + 1 = 9.$$

Logo, é solução.

35.4 Parte D

Resolução

a)

$$3 + y = 8 \Rightarrow y = 5.$$

$$\boxed{(3, 5)}.$$

b)

$$2(4) + y = 10 \Rightarrow 8 + y = 10 \Rightarrow y = 2.$$

$$\boxed{(4, 2)}.$$

c)

$$3(2) + y = 12 \Rightarrow y = 6.$$

$$\boxed{(2, 6)}.$$

d)

$$10 - 2y = 6.$$

$$-2y = -4.$$

$$y = 2.$$

$$\boxed{(10, 2)}.$$

35.5 Parte E

Resolução

a)

$$x + y = 5$$

$$y = -x + 5.$$

b)

$$2x + y = 8$$

$$y = -2x + 8.$$

c)

$$3x + 2y = 12$$

$$2y = 12 - 3x.$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 6.$$

d)

$$4x - 2y = 6.$$

$$-2y = 6 - 4x.$$

$$y = 2x - 3.$$

e)

$$-x + 5y = 10.$$

$$5y = x + 10.$$

$$y = \frac{1}{5}x + 2.$$

35.6 Parte F

Resolução

Para:

$$y = x + 2 :$$

x	-2	-1	0	1	2
y	0	1	2	3	4

Para:

$$y = 2x - 1 :$$

x	-2	-1	0	1	2
y	-5	-3	-1	1	3

Para:

$$y = -x + 3 :$$

x	-2	-1	0	1	2
y	5	4	3	2	1

35.7 Parte G

Resolução

a)

$$x + y = 6.$$

Interceptos:

$$(6, 0)$$

e:

$$(0, 6).$$

b)

$$2x + 3y = 12.$$

Interceptos:

$$(6, 0)$$

e:

$$(0, 4).$$

c)

$$4x + 2y = 8.$$

Interceptos:

$$(2, 0)$$

e:

$$(0, 4).$$

d)

$$5x - y = 10.$$

Para $y = 0$:

$$x = 2.$$

Para $x = 0$:

$$-y = 10 \Rightarrow y = -10.$$

Logo:

$$(2, 0)$$

e:

$$(0, -10).$$

35.8 Parte I

Resolução

1. Camisetas e bonés

A equação é:

$$30x + 20y = 180.$$

Dividindo por 10:

$$3x + 2y = 18.$$

Verificando:

$$(4, 3) :$$

$$3(4) + 2(3) = 12 + 6 = 18.$$

Logo:

$$(4, 3) \text{ é solução.}$$

Outra possibilidade:

$$x = 2.$$

Então:

$$3(2) + 2y = 18.$$

$$6 + 2y = 18.$$

$$2y = 12.$$

$$y = 6.$$

Logo:

$$(2, 6)$$

é outra solução inteira não negativa.

2. Retângulo

O perímetro é:

$$2x + 2y = 40.$$

Dividindo por 2:

$$x + y = 20.$$

Uma possibilidade é:

$$x = 12, \quad y = 8.$$

De fato:

$$12 + 8 = 20.$$

Portanto, uma possível dimensão é:

$$12 \text{ cm} \times 8 \text{ cm.}$$

36 Avaliação final

Avaliação final – Equação linear com duas incógnitas

Resolva as questões abaixo.

1. Defina uma equação linear do primeiro grau com duas incógnitas.

2. Na equação:

$$4x - 3y = 12,$$

determine a , b e c .

3. Verifique se:

$$(3, 2)$$

é solução de:

$$2x + y = 8.$$

4. Determine y em:

$$3x + y = 14$$

quando:

$$x = 4.$$

5. Escreva:

$$2x + 5y = 20$$

na forma:

$$y = mx + n.$$

6. Determine os interceptos de:

$$3x + 4y = 12.$$

7. Construa uma tabela com três soluções de:

$$x + y = 6.$$

8. Explique por que os pontos solução de uma equação linear estão alinhados.

9. Uma lanchonete vende sanduíches por R\$ 15,00 e sucos por R\$ 5,00. Uma compra totalizou R\$ 60,00. Escreva a equação correspondente.

10. Determine duas soluções inteiras não negativas da equação do item anterior.

36.1 Gabarito da avaliação final

Resolução

1. Uma equação linear do primeiro grau com duas incógnitas é uma equação que pode ser escrita na forma:

$$ax + by = c,$$

com:

$$(a, b) \neq (0, 0).$$

2. Em:

$$4x - 3y = 12,$$

temos:

$$a = 4, \quad b = -3, \quad c = 12.$$

3. Substituindo:

$$2(3) + 2 = 8.$$

$$8 = 8.$$

Logo:

$$(3, 2) \text{ é solução.}$$

- 4.

$$3(4) + y = 14.$$

$$12 + y = 14.$$

Logo:

$$y = 2.$$

- 5.

$$2x + 5y = 20.$$

$$5y = 20 - 2x.$$

Portanto:

$$y = -\frac{2}{5}x + 4.$$

6. Para o eixo x :

$$y = 0.$$

$$3x = 12.$$

$$x = 4.$$

Logo:

$$\boxed{(4, 0)}.$$

Para o eixo y :

$$x = 0.$$

$$4y = 12.$$

$$y = 3.$$

Logo:

$$\boxed{(0, 3)}.$$

7. Exemplos:

$$(0, 6),$$

$$(2, 4),$$

$$(6, 0).$$

8. O conjunto solução de uma equação:

$$ax + by = c$$

satisfaz uma relação linear entre as coordenadas. Geometricamente, todos esses pontos formam uma reta.

9. Se:

$x =$ número de sanduíches

e:

$y =$ número de sucos,

temos:

$$15x + 5y = 60.$$

Dividindo por 5:

$$\boxed{3x + y = 12.}$$

10. Podemos escolher:

$$x = 0.$$

Então:

$$y = 12.$$

Logo:

$$(0, 12).$$

Outra possibilidade:

$$x = 2.$$

Então:

$$3(2) + y = 12.$$

$$y = 6.$$

Logo:

$$(2, 6).$$

Portanto, duas soluções são:

$$\boxed{(0, 12) \text{ e } (2, 6).}$$

37 Conclusão

As equações lineares com duas incógnitas ampliam o estudo das equações ao permitir representar relações entre duas grandezas variáveis.

As principais ideias desenvolvidas foram:

- 1) uma equação linear com duas incógnitas pode ser escrita como:

$$ax + by = c;$$

- 2) sua solução é um par ordenado:

$$(x, y);$$

- 3) um par é solução quando torna a igualdade verdadeira;

- 4) uma equação linear não degenerada possui infinitas soluções reais;

- 5) essas soluções podem ser organizadas em tabelas;

- 6) cada solução corresponde a um ponto no plano cartesiano;

- 7) o conjunto de todas as soluções forma uma reta;

- 8) dois pontos distintos são suficientes para determinar essa reta;

- 9) os interceptos podem ser encontrados fazendo:

$$x = 0$$

ou:

$$y = 0;$$

- 10) quando $b \neq 0$, podemos escrever a equação na forma:

$$y = mx + n.$$

Notação

Resumo final:

$$ax + by = c$$

$$(x_0, y_0) \text{ é solução} \iff ax_0 + by_0 = c$$

Quando:

$$b \neq 0,$$

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

Intercepto no eixo x :

$$y = 0$$

Intercepto no eixo y :

$$x = 0$$

e, geometricamente:

equação linear com duas incógnitas $\iff$ reta no plano cartesiano.

Fim do curso