

Números Racionais

Curso de Matemática – 7º Ano

Objetivos da aula

Ao final deste módulo, o estudante deverá ser capaz de:

- 1) compreender o conjunto dos números racionais;
- 2) reconhecer números racionais em forma fracionária e decimal;
- 3) identificar que todo número inteiro é racional;
- 4) transformar frações em números decimais;
- 5) transformar decimais finitos em frações;
- 6) reconhecer decimais finitos e dízimas periódicas;
- 7) representar números racionais na reta numérica;
- 8) comparar e ordenar números racionais;
- 9) realizar adição, subtração, multiplicação e divisão com racionais;
- 10) resolver expressões numéricas envolvendo números racionais;
- 11) aplicar números racionais em situações de medida, dinheiro, temperatura, saldo, receitas e proporcionalidade.

Sumário

1	Ideia central do capítulo	3
2	O conjunto dos números racionais	3
3	Formas de representar números racionais	4
4	Decimais finitos e dízimas periódicas	6
5	Transformando frações em decimais	7
6	Transformando decimais finitos em frações	8
7	Representação na reta numérica	10
8	Comparação de números racionais	11

8.1	Comparando racionais positivos	12
8.2	Comparando racionais negativos	12
9	Adição e subtração de números racionais	13
9.1	Mesmo denominador	13
9.2	Denominadores diferentes	14
9.3	Adição e subtração com decimais	15
10	Multiplicação de números racionais	16
11	Divisão de números racionais	18
12	Potenciação com números racionais	20
13	Expressões numéricas com racionais	21
14	Propriedades dos números racionais	23
15	Problemas contextualizados	25
15.1	Dinheiro	25
15.2	Temperatura	25
15.3	Receitas	25
15.4	Medidas	26
16	Fluxograma de resolução	26
17	Erros comuns	27
18	Exercícios de fixação	29
19	Correção comentada	30
20	Lista extra de treino	36
21	Síntese final	38

1 Ideia central do capítulo

Já estudamos números naturais, inteiros e frações. Agora, vamos estudar os números que podem ser escritos na forma de fração.

Por exemplo:

$$3, \quad -5, \quad \frac{2}{3}, \quad -\frac{7}{4}, \quad 0,5, \quad -1,25$$

são números racionais.

A ideia central é que um número racional é um número que pode ser escrito como uma divisão entre dois inteiros, com divisor diferente de zero.

Resumo essencial

A pergunta principal deste capítulo é:

Quais números podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$?

A resposta é: os números racionais.

2 O conjunto dos números racionais

Definição 2.1: Número racional

Um número é chamado de racional quando pode ser escrito na forma:

$$\frac{a}{b},$$

em que a e b são números inteiros e $b \neq 0$.

Notação

O conjunto dos números racionais é representado por:

$$\mathbb{Q}.$$

Podemos escrever:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Exemplo

Os números abaixo são racionais:

$$\frac{3}{5}, \quad -\frac{7}{2}, \quad \frac{10}{1}, \quad \frac{-4}{9}, \quad 0, \quad 2,5.$$

Observação

O número 2,5 é racional porque pode ser escrito como fração:

$$2,5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}.$$

Teorema 2.1: Todo número inteiro é racional

Todo número inteiro é um número racional.

Demonstração.

Seja $n \in \mathbb{Z}$. Podemos escrever:

$$n = \frac{n}{1}.$$

Como $n \in \mathbb{Z}$, $1 \in \mathbb{Z}$ e $1 \neq 0$, então $\frac{n}{1}$ é uma fração de inteiros com denominador diferente de zero.

Portanto, todo número inteiro é racional. $\square$

Exemplo

$$7 = \frac{7}{1}.$$

$$-12 = \frac{-12}{1}.$$

$$0 = \frac{0}{1}.$$

Logo, 7, -12 e 0 são números racionais.

Resumo essencial

Temos a seguinte inclusão de conjuntos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Todo número natural é inteiro, e todo número inteiro é racional.

3 Formas de representar números racionais

Um mesmo número racional pode aparecer de várias formas.

Exemplo

O número racional $\frac{1}{2}$ pode ser representado como:

$$\frac{1}{2},$$

0,5,

50%.

Todas essas escritas representam o mesmo número.

Definição 3.1: Forma fracionária

A forma fracionária de um número racional é uma escrita da forma:

$$\frac{a}{b},$$

com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.

Definição 3.2: Forma decimal

A forma decimal de um número racional é a escrita obtida ao realizar a divisão do numerador pelo denominador.

Exemplo

A fração:

$$\frac{3}{4}$$

em forma decimal é:

$$3 \div 4 = 0,75.$$

Logo:

$$\frac{3}{4} = 0,75.$$

Exemplo

A fração:

$$-\frac{5}{2}$$

em forma decimal é:

$$-5 \div 2 = -2,5.$$

Logo:

$$-\frac{5}{2} = -2,5.$$

Observação

O sinal negativo pode aparecer em diferentes posições:

$$-\frac{3}{5} = \frac{-3}{5} = \frac{3}{-5}.$$

Porém, por organização, normalmente escrevemos:

$$-\frac{3}{5}.$$

Atenção

A escrita:

$$\frac{-3}{-5}$$

não representa um número negativo. Como numerador e denominador são negativos, a fração é positiva:

$$\frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}.$$

4 Decimais finitos e dízimas periódicas

Definição 4.1: Decimal finito

Um decimal finito é um número decimal que possui uma quantidade limitada de casas decimais.

Exemplo

São decimais finitos:

$$0,5, \quad 1,25, \quad -3,75, \quad 12,08.$$

Definição 4.2: Dízima periódica

Uma dízima periódica é um número decimal infinito em que uma sequência de algarismos se repete indefinidamente.

Exemplo

$$\frac{1}{3} = 0,3333\dots$$

A parte que se repete é o algarismo 3.

Também podemos escrever:

$$0,\overline{3}.$$

Exemplo

$$\frac{2}{11} = 0,181818 \dots = 0,\overline{18}.$$

A parte que se repete é 18.

Teorema 4.1: Forma decimal dos racionais

Todo número racional, quando escrito na forma decimal, é um decimal finito ou uma dízima periódica.

Observação

A demonstração completa desse resultado será estudada em anos posteriores. No 7º ano, o mais importante é reconhecer o padrão: ao dividir dois inteiros, o resto da divisão não pode variar infinitamente sem repetir, então a parte decimal ou termina ou entra em repetição.

Atenção

Nem todo número decimal infinito é racional.

Por exemplo, números decimais infinitos que não possuem período, isto é, não repetem um bloco de algarismos de forma regular, não são racionais. Esses números serão estudados futuramente como números irracionais.

5 Transformando frações em decimais

Método

Para transformar uma fração em número decimal:

- 1) divida o numerador pelo denominador;
- 2) coloque o sinal correto;
- 3) observe se a divisão termina ou se aparece uma repetição.

Exemplo

Transforme:

$$\frac{7}{4}$$

em decimal.

Fazemos:

$$7 \div 4 = 1,75.$$

Logo:

$$\frac{7}{4} = 1,75.$$

Exemplo

Transforme:

$$-\frac{9}{5}$$

em decimal.

Fazemos:

$$9 \div 5 = 1,8.$$

Como a fração é negativa:

$$-\frac{9}{5} = -1,8.$$

Logo:

$$-\frac{9}{5} = -1,8.$$

Exemplo

Transforme:

$$\frac{2}{3}$$

em decimal.

Fazemos:

$$2 \div 3 = 0,6666 \dots$$

Logo:

$$\frac{2}{3} = 0,\overline{6}.$$

6 Transformando decimais finitos em frações

Método

Para transformar um decimal finito em fração:

- 1) escreva o número sem vírgula no numerador;
- 2) coloque no denominador 10, 100, 1000, etc., conforme a quantidade de casas decimais;

- 3) simplifique a fração, se possível;
- 4) mantenha o sinal do número.

Exemplo

Transforme:

$$0,6$$

em fração.

Há uma casa decimal, então usamos denominador 10:

$$0,6 = \frac{6}{10}.$$

Simplificando:

$$\frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Logo:

$$0,6 = \frac{3}{5}.$$

Exemplo

Transforme:

$$2,75$$

em fração.

Há duas casas decimais, então usamos denominador 100:

$$2,75 = \frac{275}{100}.$$

Simplificando por 25:

$$\frac{275}{100} = \frac{11}{4}.$$

Logo:

$$2,75 = \frac{11}{4}.$$

Exemplo

Transforme:

$$-0,125$$

em fração.

Há três casas decimais, então usamos denominador 1000:

$$-0,125 = -\frac{125}{1000}.$$

Simplificando por 125:

$$-\frac{125}{1000} = -\frac{1}{8}.$$

Logo:

$$-0,125 = -\frac{1}{8}.$$

Resumo essencial

$$0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

$$0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}.$$

$$0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}.$$

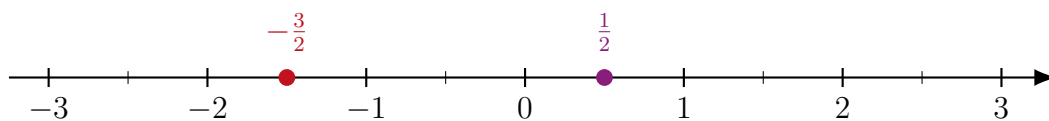
$$0,125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}.$$

7 Representação na reta numérica

Definição 7.1: Reta numérica racional

Os números racionais podem ser representados na reta numérica.

Nessa reta, os números negativos ficam à esquerda do zero, os positivos ficam à direita, e as frações podem aparecer entre os inteiros.



Exemplo

O número:

$$\frac{1}{2}$$

fica entre 0 e 1.

O número:

$$-\frac{3}{2}$$

é igual a:

$$-1,5.$$

Portanto, fica entre -2 e -1 .

Teorema 7.1: Ordem na reta numérica

Na reta numérica, o número que está mais à direita é sempre maior.

Exemplo

Como:

$$-\frac{1}{2}$$

está à direita de:

$$-2,$$

temos:

$$-\frac{1}{2} > -2.$$

Observação

Entre dois números inteiros sempre existem números racionais.
Por exemplo, entre 0 e 1, temos:

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad 0,25, \quad 0,75, \quad \dots$$

8 Comparação de números racionais

Método

Para comparar números racionais, podemos usar diferentes estratégias:

- 1) representar na reta numérica;
- 2) transformar em frações de mesmo denominador;
- 3) transformar em decimais;
- 4) usar produtos cruzados, quando estiverem em forma de fração.

8.1 Comparando racionais positivos

Exemplo

Compare:

$$\frac{3}{4} \text{ e } \frac{5}{8}.$$

Vamos escrever com denominador comum 8:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}.$$

Como:

$$\frac{6}{8} > \frac{5}{8},$$

temos:

$$\boxed{\frac{3}{4} > \frac{5}{8}.$$

Exemplo

Compare:

$$0,6 \text{ e } \frac{2}{3}.$$

Sabemos que:

$$\frac{2}{3} = 0,6666 \dots$$

Logo:

$$0,6 < 0,6666 \dots$$

Portanto:

$$\boxed{0,6 < \frac{2}{3}.$$

8.2 Comparando racionais negativos

Atenção

Entre números negativos, aquele que tem maior módulo é o menor.

Por exemplo:

$$-5 < -2.$$

Isso também vale para frações e decimais negativos.

Exemplo

Compare:

$$-\frac{3}{4} \text{ e } -\frac{1}{2}.$$

Vamos escrever:

$$-\frac{1}{2} = -\frac{2}{4}.$$

Agora comparamos:

$$-\frac{3}{4} \text{ e } -\frac{2}{4}.$$

Na reta numérica, $-\frac{3}{4}$ está mais à esquerda.

Logo:

$$\boxed{-\frac{3}{4} < -\frac{1}{2}.$$

Exemplo

Compare:

$$-1,2 \text{ e } -1,05.$$

Como:

$$-1,2 = -1,20,$$

temos:

$$-1,20 < -1,05.$$

Logo:

$$\boxed{-1,2 < -1,05.}$$

9 Adição e subtração de números racionais

9.1 Mesmo denominador

Teorema 9.1: Adição com mesmo denominador

Para somar frações de mesmo denominador, somamos os numeradores e conservamos o denominador.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}, \quad b \neq 0.$$

Exemplo

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}.$$

Exemplo

$$-\frac{4}{9} + \frac{7}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Teorema 9.2: Subtração com mesmo denominador

Para subtrair frações de mesmo denominador, subtraímos os numeradores e conservamos o denominador.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}, \quad b \neq 0.$$

Exemplo

$$\frac{8}{11} - \frac{3}{11} = \frac{5}{11}.$$

9.2 Denominadores diferentes

Método

Para somar ou subtrair frações com denominadores diferentes:

- 1) encontre um denominador comum;
- 2) transforme as frações em frações equivalentes;
- 3) some ou subtraia os numeradores;
- 4) conserve o denominador comum;
- 5) simplifique, se possível.

Exemplo

Calcule:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4}.$$

Um denominador comum é 12.

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}.$$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}.$$

Então:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12}.$$

$$\frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}.$$

Logo:

$$\boxed{\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}.$$

Exemplo

Calcule:

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{8}.$$

Um denominador comum entre 6 e 8 é 24.

$$\frac{5}{6} = \frac{20}{24}.$$

$$\frac{3}{8} = \frac{9}{24}.$$

Então:

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{8} = \frac{20}{24} - \frac{9}{24}.$$

$$\frac{20}{24} - \frac{9}{24} = \frac{11}{24}.$$

Logo:

$$\boxed{\frac{5}{6} - \frac{3}{8} = \frac{11}{24}.$$

9.3 Adição e subtração com decimais

Método

Para somar ou subtrair números decimais:

- 1) alinhe as vírgulas;
- 2) complete casas decimais com zeros, se necessário;
- 3) calcule normalmente;
- 4) mantenha a vírgula alinhada no resultado.

Exemplo

Calcule:

$$2,75 + 1,6.$$

Escrevemos:

$$2,75 + 1,60 = 4,35.$$

Logo:

$$\boxed{2,75 + 1,6 = 4,35.}$$

Exemplo

Calcule:

$$-3,2 + 1,75.$$

Como os sinais são diferentes, subtraímos os módulos:

$$3,20 - 1,75 = 1,45.$$

O maior módulo é 3,2, que é negativo. Logo:

$$\boxed{-3,2 + 1,75 = -1,45.}$$

10 Multiplicação de números racionais

Teorema 10.1: Multiplicação de frações

Para multiplicar frações, multiplicamos os numeradores entre si e os denominadores entre si.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad b \neq 0, d \neq 0.$$

Exemplo

Calcule:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}.$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7}.$$

$$\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}.$$

Logo:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}.$$

Exemplo

Calcule:

$$-\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{8}.$$

Primeiro, calculamos os módulos:

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}.$$

Como os sinais são diferentes, o resultado é negativo:

$$-\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{8} = -\frac{3}{10}.$$

Método

Antes de multiplicar frações, podemos simplificar fatores comuns entre numeradores e denominadores.

Isso facilita os cálculos.

Exemplo

Calcule:

$$\frac{6}{15} \cdot \frac{10}{9}.$$

Antes de multiplicar, simplificamos:

$$\frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

Então:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{10}{9}.$$

Podemos simplificar 10 com 5:

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{9}.$$

Logo:

$$\frac{6}{15} \cdot \frac{10}{9} = \frac{4}{9}.$$

Observação

A palavra “de” em muitos problemas indica multiplicação.
Por exemplo:

$$\frac{3}{4} \text{ de } 80$$

significa:

$$\frac{3}{4} \cdot 80.$$

11 Divisão de números racionais

Definição 11.1: Inverso multiplicativo

O inverso multiplicativo de um número racional não nulo é o número que, multiplicado por ele, resulta em 1.

O inverso de:

$$\frac{a}{b}$$

com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, é:

$$\frac{b}{a}.$$

Exemplo

O inverso de:

$$\frac{3}{5}$$

é:

$$\frac{5}{3}.$$

De fato:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{15}{15} = 1.$$

Exemplo

O inverso de:

$$-4$$

é:

$$-\frac{1}{4}.$$

Pois:

$$-4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 1.$$

Atenção

O número 0 não possui inverso multiplicativo, pois não existe número que multiplicado por 0 resulte em 1.

Teorema 11.1: Divisão de frações

Para dividir por uma fração não nula, multiplicamos pelo inverso da segunda fração.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c},$$

com $b \neq 0$, $c \neq 0$ e $d \neq 0$.

Exemplo

Calcule:

$$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7}.$$

Multiplicamos pelo inverso da segunda fração:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5}.$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}.$$

Logo:

$$\boxed{\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{14}{15}}.$$

Exemplo

Calcule:

$$-\frac{3}{4} \div \frac{9}{10}.$$

Multiplicamos pelo inverso:

$$-\frac{3}{4} \cdot \frac{10}{9}.$$

Multiplicando:

$$-\frac{30}{36}.$$

Simplificando por 6:

$$-\frac{30}{36} = -\frac{5}{6}.$$

Logo:

$$-\frac{3}{4} \div \frac{9}{10} = -\frac{5}{6}.$$

Atenção

Dividir por uma fração não é o mesmo que dividir numerador por numerador e denominador por denominador.

O método correto é:

conservar a primeira fração e multiplicar pelo inverso da segunda.

12 Potenciação com números racionais

Definição 12.1: Potência de racional

Se a é um número racional e n é um número natural positivo, então:

$$a^n$$

representa o produto de n fatores iguais a a .

Exemplo

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

Exemplo

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}.$$

Como o expoente é ímpar, o resultado é negativo.

Teorema 12.1: Potência de fração

Para elevar uma fração a um expoente natural positivo, elevamos numerador e denominador a esse expoente.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0.$$

Exemplo

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}.$$

Atenção

Existe diferença entre:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2$$

e

$$-\left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

No primeiro caso:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

No segundo caso:

$$-\left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9}.$$

13 Expressões numéricas com racionais

Método

Para resolver expressões numéricas com números racionais:

- 1) resolva primeiro os parênteses;
- 2) depois as potências;
- 3) depois multiplicações e divisões, da esquerda para a direita;
- 4) por fim, adições e subtrações, da esquerda para a direita;
- 5) simplifique o resultado, se possível.

Exemplo

Calcule:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}.$$

Primeiro a multiplicação:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

Agora:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Logo:

1.

Exemplo

Calcule:

$$-\frac{2}{3} + \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\right).$$

Primeiro os parênteses:

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{2}.$$

Como:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6},$$

temos:

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Agora:

$$-\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Logo:

$$-\frac{1}{3}.$$

Exemplo

Calcule:

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}.$$

Primeiro a potência:

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$

Agora:

$$\frac{9}{16} - \frac{1}{2}.$$

Como:

$$\frac{1}{2} = \frac{8}{16},$$

temos:

$$\frac{9}{16} - \frac{8}{16} = \frac{1}{16}.$$

Logo:

$$\frac{1}{16}.$$

14 Propriedades dos números racionais

Teorema 14.1: Fechamento da adição

A soma de dois números racionais é sempre um número racional.

Exemplo

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}.$$

Como $\frac{11}{15} \in \mathbb{Q}$, a soma é racional.

Teorema 14.2: Fechamento da multiplicação

O produto de dois números racionais é sempre um número racional.

Exemplo

$$-\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = -\frac{6}{35}.$$

Como $-\frac{6}{35} \in \mathbb{Q}$, o produto é racional.

Teorema 14.3: Fechamento da divisão

A divisão de dois números racionais é racional, desde que o divisor seja diferente de zero.

Exemplo

$$\frac{4}{9} \div \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

Como $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, o resultado é racional.

Atenção

A divisão por zero continua proibida.

$$\frac{3}{5} \div 0$$

não tem significado matemático.

Teorema 14.4: Densidade dos números racionais

Entre dois números racionais diferentes sempre existe outro número racional.

Demonstração acessível.

Sejam a e b dois números racionais, com $a < b$.

O número:

$$\frac{a+b}{2}$$

é a média entre a e b .

Essa média fica entre os dois números:

$$a < \frac{a+b}{2} < b.$$

Além disso, como a e b são racionais, a média também é racional.

Portanto, entre dois racionais sempre existe outro racional. $\square$

Exemplo

Entre:

$$\frac{1}{2} \text{ e } \frac{3}{4},$$

podemos encontrar a média:

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{2}.$$

Primeiro:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}.$$

Agora dividimos por 2:

$$\frac{5}{4} \div 2 = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}.$$

Logo:

$$\frac{5}{8}$$

está entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$.

15 Problemas contextualizados

15.1 Dinheiro

Exemplo

Uma pessoa tinha R\$ 50,00. Gastou $\frac{2}{5}$ desse valor. Quanto gastou?
Calculamos:

$$\frac{2}{5} \cdot 50.$$

$$50 \div 5 = 10.$$

$$2 \cdot 10 = 20.$$

Logo, gastou:

R\$ 20,00.

15.2 Temperatura

Exemplo

A temperatura era de $-2,5^{\circ}\text{C}$. Depois subiu $4,75^{\circ}\text{C}$. Qual foi a nova temperatura?

$$-2,5 + 4,75.$$

Escrevendo:

$$-2,50 + 4,75 = 2,25.$$

Logo:

$2,25^{\circ}\text{C}$.

15.3 Receitas

Exemplo

Uma receita usa $\frac{3}{4}$ de xícara de leite. Se a receita for multiplicada por 2, quanto leite será usado?

$$2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Como:

$$\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2},$$

será usado:

$$1\frac{1}{2} \text{ xícara de leite.}$$

15.4 Medidas

Exemplo

Uma fita tem 3,5 metros. Ela será dividida em 7 partes iguais. Qual será o comprimento de cada parte?

$$3,5 \div 7 = 0,5.$$

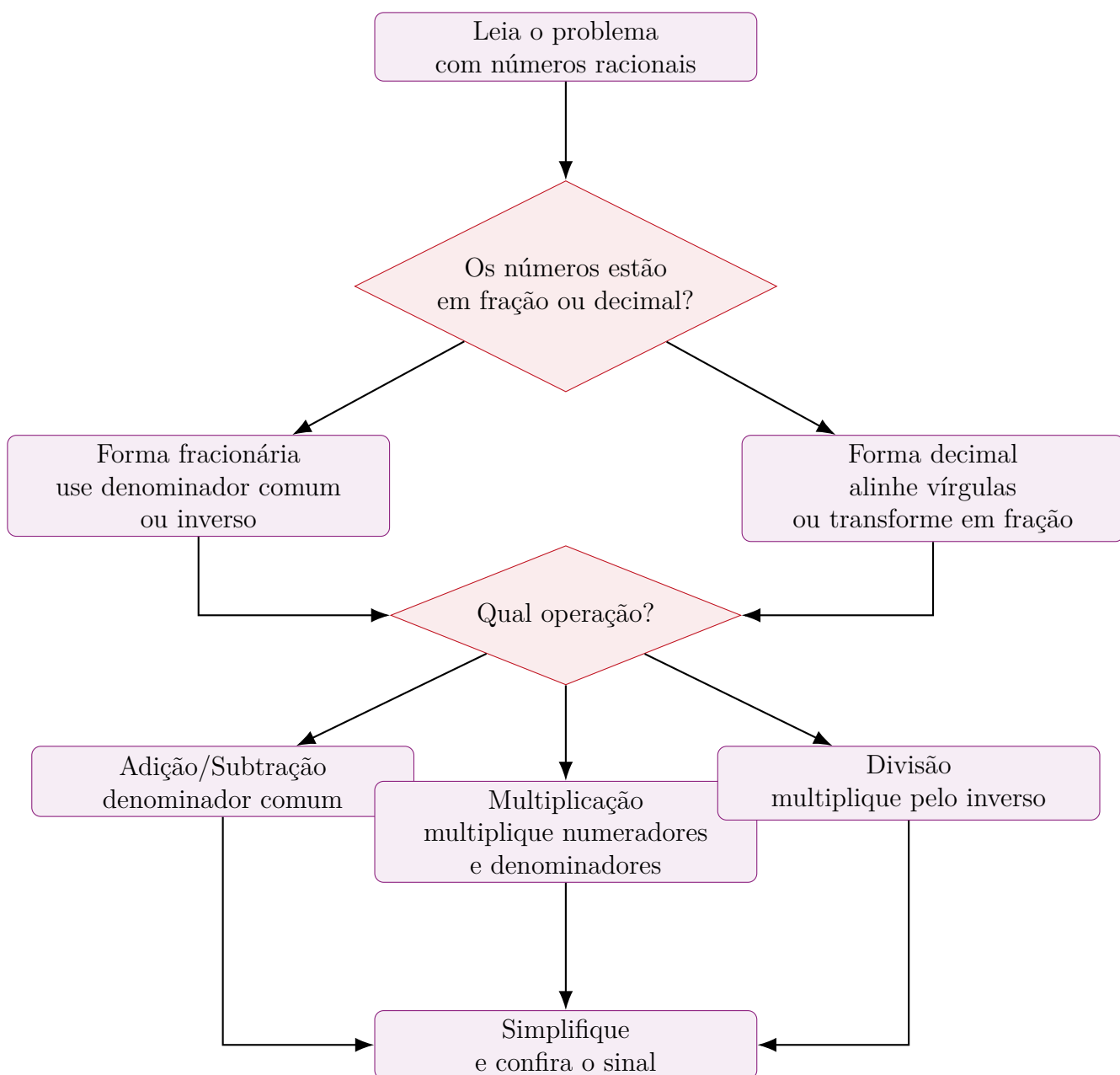
Logo, cada parte terá:

$$0,5 \text{ metro.}$$

Ou seja:

$$\frac{1}{2} \text{ metro.}$$

16 Fluxograma de resolução



17 Erros comuns

Atenção

Erro 1: achar que todo decimal é racional.

Todo decimal finito é racional, mas um decimal infinito sem repetição periódica não é racional.

Exemplo racional:

$$0,75 = \frac{3}{4}.$$

Exemplo de ideia não racional, que será estudada depois: decimal infinito sem período.

Atenção

Erro 2: somar denominadores em frações.

Errado:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}.$$

Correto:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}.$$

Atenção

Erro 3: esquecer o sinal negativo.

$$-\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Não é correto responder apenas $\frac{1}{3}$.

Atenção

Erro 4: dividir frações sem inverter.

Errado:

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}.$$

Correto:

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}.$$

Atenção

Erro 5: comparar negativos como se fossem positivos.

Como números negativos ficam à esquerda do zero:

$$-0,8 < -0,3.$$

Mesmo que $0,8 > 0,3$, temos:

$$-0,8 < -0,3.$$

18 Exercícios de fixação

Exercício 1

Diga quais números abaixo são racionais.

$$4, \quad -7, \quad \frac{2}{5}, \quad 0,75, \quad -1,2, \quad \frac{0}{3}.$$

Exercício 2

Escreva os números inteiros abaixo em forma de fração.

$$8, \quad -3, \quad 0, \quad 15.$$

Exercício 3

Transforme as frações em números decimais.

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad -\frac{5}{2}, \quad \frac{1}{3}.$$

Exercício 4

Transforme os decimais finitos em frações simplificadas.

$$0,4, \quad 1,25, \quad -0,75, \quad 2,5.$$

Exercício 5

Compare usando $>$, $<$ ou $=$.

$$\frac{2}{3} \text{ — } 0,6,$$

$$-\frac{1}{2} \text{ — } -0,75,$$

$$1,25 \text{ — } \frac{5}{4}.$$

Exercício 6

Calcule.

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{10},$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{6},$$

$$-\frac{2}{3} + \frac{5}{6}.$$

Exercício 7

Calcule.

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{9},$$

$$-\frac{4}{7} \cdot \frac{14}{3},$$

$$\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{9}{8}\right).$$

Exercício 8

Calcule.

$$\frac{5}{6} \div \frac{2}{3},$$

$$-\frac{3}{4} \div \frac{9}{10},$$

$$\frac{7}{5} \div (-2).$$

Exercício 9

Resolva as expressões.

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3},$$

$$-\frac{5}{6} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right),$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}.$$

Exercício 10

Uma pessoa gastou $\frac{3}{8}$ de R\$ 160,00. Quanto ela gastou?

19 Correção comentada

Correção comentada

Exercício 1.

Todos os números apresentados são racionais.

$$4 = \frac{4}{1}.$$

$$-7 = \frac{-7}{1}.$$

$$\frac{2}{5}$$

já está em forma de fração.

$$0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}.$$

$$-1,2 = -\frac{12}{10} = -\frac{6}{5}.$$

$$\frac{0}{3} = 0.$$

Logo, todos pertencem a $\mathbb{Q}$.

Correção comentada

Exercício 2.

Todo inteiro n pode ser escrito como:

$$n = \frac{n}{1}.$$

Assim:

$$8 = \frac{8}{1}.$$

$$-3 = \frac{-3}{1}.$$

$$0 = \frac{0}{1}.$$

$$15 = \frac{15}{1}.$$

Correção comentada

Exercício 3.

$$\frac{1}{2} = 0,5.$$

$$\frac{3}{4} = 0,75.$$

$$-\frac{5}{2} = -2,5.$$

$$\frac{1}{3} = 0,3333 \dots = 0,\overline{3}.$$

Logo:

$$0,5, \quad 0,75, \quad -2,5, \quad 0,\overline{3}.$$

Correção comentada

Exercício 4.

$$0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

$$1,25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}.$$

$$-0,75 = -\frac{75}{100} = -\frac{3}{4}.$$

$$2,5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}.$$

Logo:

$$\frac{2}{5}, \quad \frac{5}{4}, \quad -\frac{3}{4}, \quad \frac{5}{2}.$$

Correção comentada

Exercício 5.

Primeira comparação:

$$\frac{2}{3} = 0,6666\dots$$

Logo:

$$\frac{2}{3} > 0,6.$$

Segunda comparação:

$$-\frac{1}{2} = -0,5.$$

Como:

$$-0,5 > -0,75,$$

temos:

$$-\frac{1}{2} > -0,75.$$

Terceira comparação:

$$\frac{5}{4} = 1,25.$$

Logo:

$$1,25 = \frac{5}{4}.$$

Correção comentada

Exercício 6.

Primeiro:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{10}.$$

Como:

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10},$$

temos:

$$\frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Segundo:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{6}.$$

Denominador comum 12:

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}, \quad \frac{1}{6} = \frac{2}{12}.$$

Logo:

$$\frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{7}{12}.$$

Terceiro:

$$-\frac{2}{3} + \frac{5}{6}.$$

Como:

$$-\frac{2}{3} = -\frac{4}{6},$$

temos:

$$-\frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{1}{6}.$$

Portanto:

$$\boxed{\frac{1}{2}, \quad \frac{7}{12}, \quad \frac{1}{6}}.$$

Correção comentada

Exercício 7.

Primeiro:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{9}.$$

Simplificando:

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \quad \frac{10}{5} = 2.$$

Logo:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{9} = \frac{2}{3}.$$

Segundo:

$$-\frac{4}{7} \cdot \frac{14}{3}.$$

Simplificando 14 com 7:

$$-\frac{4}{1} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{8}{3}.$$

Terceiro:

$$\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{9}{8}\right).$$

O resultado será negativo.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}.$$

Logo:

$$\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{9}{8}\right) = -\frac{3}{4}.$$

Portanto:

$\frac{2}{3},$	$-\frac{8}{3},$	$-\frac{3}{4}.$
----------------	-----------------	-----------------

Correção comentada

Exercício 8.

Primeiro:

$$\frac{5}{6} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2}.$$

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}.$$

Segundo:

$$-\frac{3}{4} \div \frac{9}{10} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{10}{9}.$$

$$-\frac{30}{36} = -\frac{5}{6}.$$

Terceiro:

$$\frac{7}{5} \div (-2).$$

Como:

$$-2 = -\frac{2}{1},$$

temos:

$$\frac{7}{5} \div \left(-\frac{2}{1}\right) = \frac{7}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right).$$

$$\frac{7}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{10}.$$

Portanto:

$\frac{5}{4},$	$-\frac{5}{6},$	$-\frac{7}{10}.$
----------------	-----------------	------------------

Correção comentada

Exercício 9.

Primeira expressão:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}.$$

Primeiro a multiplicação:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

Então:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Segunda expressão:

$$-\frac{5}{6} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right).$$

Parênteses:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2}{6} - \frac{3}{6} = -\frac{1}{6}.$$

Agora:

$$-\frac{5}{6} + \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{6}{6} = -1.$$

Terceira expressão:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}.$$

Potência:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Agora:

$$\frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Logo:

$$1, \quad -1, \quad \frac{1}{3}.$$

Correção comentada

Exercício 10.

A pessoa gastou:

$$\frac{3}{8} \text{ de } 160.$$

Calculamos:

$$\frac{3}{8} \cdot 160.$$

Primeiro:

$$160 \div 8 = 20.$$

Depois:

$$3 \cdot 20 = 60.$$

Logo, ela gastou:

$$\text{R\$ } 60,00.$$

20 Lista extra de treino

Exercício 11

Transforme em decimal.

$$\frac{5}{8}, \quad -\frac{7}{2}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{2}{9}.$$

Exercício 12

Transforme em fração simplificada.

$$0,2, \quad 0,45, \quad -1,75, \quad 3,125.$$

Exercício 13

Coloque em ordem crescente.

$$-\frac{1}{2}, \quad 0,25, \quad -0,75, \quad \frac{2}{3}, \quad 0.$$

Exercício 14

Calcule.

$$\frac{4}{9} + \frac{1}{3}, \quad \frac{7}{10} - \frac{2}{5}, \quad -\frac{3}{8} + \frac{1}{4}.$$

Exercício 15

Calcule.

$$\frac{5}{12} \cdot \frac{18}{25}, \quad -\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{14}, \quad \frac{11}{6} \cdot (-3).$$

Exercício 16

Calcule.

$$\frac{3}{10} \div \frac{9}{20}, \quad -\frac{5}{8} \div \frac{15}{16}, \quad \frac{4}{7} \div (-2).$$

Exercício 17

Resolva.

$$\begin{aligned} & \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}, \\ & \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right)^2, \\ & -\frac{2}{3} + \frac{5}{6} \div \frac{10}{9}. \end{aligned}$$

Exercício 18

Uma garrafa contém 1,5 litro de suco. Foram consumidos $\frac{2}{3}$ do conteúdo. Quantos litros foram consumidos?

Exercício 19

Um saldo bancário era de $-\text{R\$ } 35,50$. A pessoa depositou $\text{R\$ } 80,75$. Qual ficou sendo o novo saldo?

Exercício 20

Explique, com suas palavras, por que todo número inteiro é também um número racional.

21 Síntese final

Resumo essencial

1. Número racional

$$\frac{a}{b}, \quad a, b \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0.$$

2. Conjunto dos racionais

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

3. Inclusão de conjuntos

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

4. Todo inteiro é racional

$$n = \frac{n}{1}.$$

5. Forma decimal

Todo racional em forma decimal é decimal finito ou dízima periódica.

6. Decimal finito em fração

$$0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}.$$

7. Soma e subtração

Use denominador comum.

8. Multiplicação

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

9. Divisão

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

10. Comparação

Na reta numérica, o número mais à direita é o maior.

11. Atenção aos sinais

Sinais iguais na multiplicação e divisão geram resultado positivo.

Sinais diferentes geram resultado negativo.

12. Ideia fundamental

Números racionais representam divisões entre inteiros, com divisor diferente de zero.

Fim do módulo

Números Racionais