

# Múltiplos, Divisores e Divisibilidade

Curso de Matemática – 7º Ano

## Objetivos da aula

Ao final deste módulo, o estudante deverá ser capaz de:

- 1) compreender os conceitos de múltiplo, divisor e divisibilidade;
- 2) reconhecer e aplicar critérios de divisibilidade;
- 3) diferenciar números primos e compostos;
- 4) decompor números naturais em fatores primos;
- 5) calcular o máximo divisor comum, MDC;
- 6) calcular o mínimo múltiplo comum, MMC;
- 7) resolver problemas envolvendo regularidades, partilhas, agrupamentos e repetições.

## Sumário

|          |                                            |          |
|----------|--------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Ideia central do capítulo</b>           | <b>3</b> |
| <b>2</b> | <b>Números naturais e divisão exata</b>    | <b>3</b> |
| <b>3</b> | <b>Divisores e múltiplos</b>               | <b>5</b> |
| <b>4</b> | <b>Como encontrar múltiplos</b>            | <b>6</b> |
| <b>5</b> | <b>Como encontrar divisores</b>            | <b>7</b> |
| <b>6</b> | <b>Divisibilidade</b>                      | <b>9</b> |
| <b>7</b> | <b>Critérios de divisibilidade</b>         | <b>9</b> |
| 7.1      | Critério de divisibilidade por 2 . . . . . | 9        |
| 7.2      | Critério de divisibilidade por 3 . . . . . | 10       |
| 7.3      | Critério de divisibilidade por 4 . . . . . | 11       |
| 7.4      | Critério de divisibilidade por 5 . . . . . | 11       |
| 7.5      | Critério de divisibilidade por 6 . . . . . | 12       |
| 7.6      | Critério de divisibilidade por 8 . . . . . | 12       |
| 7.7      | Critério de divisibilidade por 9 . . . . . | 12       |

|           |                                                  |           |
|-----------|--------------------------------------------------|-----------|
| 7.8       | Cr terio de divisibilidade por 10 . . . . .      | 13        |
| 7.9       | Resumo dos cr terios . . . . .                   | 13        |
| <b>8</b>  | <b>Propriedades da divisibilidade</b>            | <b>14</b> |
| <b>9</b>  | <b>Números pares e ímpares</b>                   | <b>16</b> |
| <b>10</b> | <b>Números primos e compostos</b>                | <b>18</b> |
| 10.1      | Crivo de Eratóstenes . . . . .                   | 19        |
| <b>11</b> | <b>Decomposição em fatores primos</b>            | <b>20</b> |
| <b>12</b> | <b>Máximo divisor comum: MDC</b>                 | <b>21</b> |
| 12.1      | MDC por listagem de divisores . . . . .          | 22        |
| 12.2      | MDC por decomposição em fatores primos . . . . . | 22        |
| 12.3      | Algoritmo de Euclides . . . . .                  | 23        |
| <b>13</b> | <b>Mínimo múltiplo comum: MMC</b>                | <b>24</b> |
| 13.1      | MMC por listagem de múltiplos . . . . .          | 25        |
| 13.2      | MMC por decomposição em fatores primos . . . . . | 25        |
| <b>14</b> | <b>MDC ou MMC? Como decidir</b>                  | <b>27</b> |
| <b>15</b> | <b>Exercícios de fixação</b>                     | <b>28</b> |
| <b>16</b> | <b>Correção comentada</b>                        | <b>29</b> |
| <b>17</b> | <b>Lista extra de treino</b>                     | <b>34</b> |
| <b>18</b> | <b>Síntese final</b>                             | <b>35</b> |

# 1 Ideia central do capítulo

A Matemática estuda padrões. Quando trabalhamos com múltiplos e divisores, estamos estudando padrões de repetição, agrupamento e divisão exata.

Por exemplo:

- os múltiplos de 5 aparecem de 5 em 5:

$$0, 5, 10, 15, 20, 25, \dots$$

- os divisores de 24 são os números que dividem 24 sem deixar resto:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.$$

Essas ideias aparecem em situações como:

- organizar alunos em grupos iguais;
- descobrir de quantas formas é possível dividir uma quantidade;
- encontrar encontros periódicos entre eventos;
- simplificar frações;
- resolver problemas de planejamento, horários e ciclos.

## Resumo essencial

Neste capítulo, estudaremos a seguinte pergunta:

Quando um número divide outro exatamente?

A partir dela, construiremos os conceitos de divisor, múltiplo, divisibilidade, número primo, MDC e MMC.

# 2 Números naturais e divisão exata

## Definição 2.1: Números naturais

O conjunto dos números naturais é o conjunto usado para contar quantidades inteiras não negativas:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Em muitos problemas escolares, quando falamos em divisores de um número, consideramos apenas divisores naturais positivos.

### Observação

Alguns livros definem os números naturais começando em 1, isto é,

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Neste curso, usaremos:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad \text{e} \quad \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

### Definição 2.2: Divisão exata

Dizemos que uma divisão é exata quando o resto da divisão é igual a zero.

Se  $a$  e  $b$  são números naturais e  $b \neq 0$ , a divisão de  $a$  por  $b$  é exata quando existe um número natural  $q$  tal que:

$$a = b \cdot q.$$

Nesse caso, dizemos que  $b$  divide  $a$ .

### Exemplo

A divisão de 24 por 6 é exata, pois:

$$24 = 6 \cdot 4.$$

Logo, 6 divide 24.

A divisão de 25 por 6 não é exata, pois:

$$25 = 6 \cdot 4 + 1.$$

O resto é 1, portanto 6 não divide 25.

### Notação

Quando  $b$  divide  $a$ , escrevemos:

$$b \mid a.$$

Lemos: “ $b$  divide  $a$ ”.

Quando  $b$  não divide  $a$ , escrevemos:

$$b \nmid a.$$

Lemos: “ $b$  não divide  $a$ ”.

### Exemplo

$$3 \mid 18,$$

pois

$$18 = 3 \cdot 6.$$

Mas

$$5 \nmid 18,$$

pois não existe número natural  $q$  tal que:

$$18 = 5 \cdot q.$$

### Atenção

Na notação  $b \mid a$ , o número que fica à esquerda do símbolo  $\mid$  é o divisor.

Assim:

$$4 \mid 20$$

significa que 4 divide 20, e não o contrário.

## 3 Divisores e múltiplos

### Definição 3.1: Divisor

Se  $a$  e  $b$  são números naturais, com  $a \neq 0$ , dizemos que  $a$  é divisor de  $b$  quando existe um número natural  $k$  tal que:

$$b = a \cdot k.$$

Ou seja,  $a$  é divisor de  $b$  quando  $b$  pode ser dividido por  $a$  sem deixar resto.

### Definição 3.2: Múltiplo

Se  $a$  e  $b$  são números naturais, dizemos que  $b$  é múltiplo de  $a$  quando existe um número natural  $k$  tal que:

$$b = a \cdot k.$$

Ou seja, os múltiplos de  $a$  são os resultados obtidos ao multiplicar  $a$  por  $0, 1, 2, 3, \dots$

### Teorema 3.1: Relação entre divisor e múltiplo

Se  $a$  e  $b$  são números naturais, com  $a \neq 0$ , então:

$$a \text{ é divisor de } b$$

se, e somente se,

$$b \text{ é múltiplo de } a.$$

### Demonstração.

Pela definição,  $a$  é divisor de  $b$  quando existe um número natural  $k$  tal que:

$$b = a \cdot k.$$

Mas essa mesma igualdade significa exatamente que  $b$  foi obtido multiplicando  $a$  por um número natural. Portanto,  $b$  é múltiplo de  $a$ .

Assim, as duas afirmações dizem a mesma coisa.  $\square$

### Exemplo

Como

$$30 = 6 \cdot 5,$$

podemos dizer duas coisas equivalentes:

6 é divisor de 30

e

30 é múltiplo de 6.

### Resumo essencial

As frases abaixo têm o mesmo significado:

$$a \mid b,$$

$a$  é divisor de  $b$ ,

$b$  é múltiplo de  $a$ ,

$$b = a \cdot k \text{ para algum } k \in \mathbb{N}.$$

## 4 Como encontrar múltiplos

### Método

Para encontrar os múltiplos de um número natural  $a$ , multiplicamos  $a$  por:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

Portanto:

$$M(a) = \{a \cdot 0, a \cdot 1, a \cdot 2, a \cdot 3, a \cdot 4, \dots\}.$$

### Exemplo

Os múltiplos de 7 são:

$$7 \cdot 0 = 0,$$

$$7 \cdot 1 = 7,$$

$$7 \cdot 2 = 14,$$

$$7 \cdot 3 = 21,$$

$$7 \cdot 4 = 28.$$

Logo:

$$M(7) = \{0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, \dots\}.$$

#### Teorema 4.1: Quantidade de múltiplos

Todo número natural positivo possui infinitos múltiplos.

#### Demonstração.

Seja  $a \in \mathbb{N}^*$ . Os múltiplos de  $a$  são:

$$0, a, 2a, 3a, 4a, 5a, \dots$$

Como podemos continuar multiplicando  $a$  por números naturais cada vez maiores, sempre obteremos novos múltiplos.

Portanto,  $a$  possui infinitos múltiplos.  $\square$

#### Observação

O número 0 é múltiplo de todo número natural positivo, pois:

$$0 = a \cdot 0.$$

Por exemplo:

$$0 = 5 \cdot 0,$$

então 0 é múltiplo de 5.

## 5 Como encontrar divisores

#### Método

Para encontrar os divisores positivos de um número natural  $n$ , testamos quais números de 1 até  $n$  dividem  $n$  exatamente.

Isto é, procuramos os números  $d \in \mathbb{N}^*$  tais que:

$$d \mid n.$$

#### Exemplo

Vamos encontrar os divisores positivos de 18.

$$18 \div 1 = 18 \quad \Rightarrow \quad 1 \mid 18.$$

$$18 \div 2 = 9 \quad \Rightarrow \quad 2 \mid 18.$$

$$18 \div 3 = 6 \quad \Rightarrow \quad 3 \mid 18.$$

$$18 \div 4 = 4 \text{ com resto } 2 \Rightarrow 4 \nmid 18.$$

$$18 \div 5 = 3 \text{ com resto } 3 \Rightarrow 5 \nmid 18.$$

$$18 \div 6 = 3 \Rightarrow 6 \mid 18.$$

Continuando, obtemos:

$$D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}.$$

### Teorema 5.1: Quantidade de divisores

Todo número natural positivo possui uma quantidade finita de divisores positivos.

#### Demonstração.

Seja  $n \in \mathbb{N}^*$ . Se  $d$  é divisor positivo de  $n$ , então existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tal que:

$$n = d \cdot k.$$

Como  $k \geq 1$ , temos:

$$d \leq n.$$

Assim, todos os divisores positivos de  $n$  estão entre 1 e  $n$ . Como há apenas uma quantidade finita de números naturais entre 1 e  $n$ , também há apenas uma quantidade finita de divisores de  $n$ .  $\square$

#### Exemplo

Os divisores de 36 podem ser encontrados por pares de multiplicação:

$$1 \cdot 36 = 36,$$

$$2 \cdot 18 = 36,$$

$$3 \cdot 12 = 36,$$

$$4 \cdot 9 = 36,$$

$$6 \cdot 6 = 36.$$

Logo:

$$D(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}.$$

#### Atenção

Não confunda divisor com múltiplo.

6 é divisor de 24,

mas

24 é múltiplo de 6.

O número menor pode ser divisor do maior, enquanto o número maior pode ser múltiplo do menor.

## 6 Divisibilidade

### Definição 6.1: Divisibilidade

A divisibilidade estuda quando um número natural pode ser dividido por outro sem deixar resto.

Se  $a, b \in \mathbb{N}$ , com  $a \neq 0$ , dizemos que  $b$  é divisível por  $a$  quando:

$$a \mid b.$$

### Exemplo

O número 42 é divisível por 7, pois:

$$42 = 7 \cdot 6.$$

O número 42 não é divisível por 5, pois a divisão de 42 por 5 deixa resto 2.

### Resumo essencial

$$b \text{ é divisível por } a \iff a \text{ divide } b \iff b \text{ é múltiplo de } a.$$

## 7 Critérios de divisibilidade

Os critérios de divisibilidade são regras que nos ajudam a saber se um número é divisível por outro sem fazer a divisão completa.

### 7.1 Critério de divisibilidade por 2

#### Teorema 7.1: Divisibilidade por 2

Um número natural é divisível por 2 quando seu último algarismo é:

$$0, 2, 4, 6 \text{ ou } 8.$$

### Exemplo

348 é divisível por 2,  
pois termina em 8.

735 não é divisível por 2,  
pois termina em 5.

### Definição 7.1: Número par e número ímpar

Um número natural é chamado de par quando é divisível por 2.

Um número natural é chamado de ímpar quando não é divisível por 2.

### Exemplo

24 é par, pois  $2 \mid 24$ .

31 é ímpar, pois  $2 \nmid 31$ .

## 7.2 Critério de divisibilidade por 3

### Teorema 7.2: Divisibilidade por 3

Um número natural é divisível por 3 quando a soma de seus algarismos é divisível por 3.

### Exemplo

O número 741 é divisível por 3, pois:

$$7 + 4 + 1 = 12.$$

Como 12 é divisível por 3, então 741 também é divisível por 3.

De fato:

$$741 \div 3 = 247.$$

### Exemplo

O número 853 não é divisível por 3, pois:

$$8 + 5 + 3 = 16.$$

Como 16 não é divisível por 3, então 853 não é divisível por 3.

### Observação

A razão desse critério vem do sistema decimal. Por exemplo:

$$741 = 7 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 1.$$

Como  $100 = 99 + 1$  e  $10 = 9 + 1$ , temos:

$$741 = 7(99 + 1) + 4(9 + 1) + 1.$$

Logo:

$$741 = 7 \cdot 99 + 7 + 4 \cdot 9 + 4 + 1.$$

Os termos  $7 \cdot 99$  e  $4 \cdot 9$  são divisíveis por 3. Então a divisibilidade por 3 depende da soma:

$$7 + 4 + 1.$$

### 7.3 Critério de divisibilidade por 4

#### Teorema 7.3: Divisibilidade por 4

Um número natural é divisível por 4 quando o número formado por seus dois últimos algarismos é divisível por 4.

##### Exemplo

O número 1 328 é divisível por 4, pois os dois últimos algarismos formam 28, e:

$$28 \div 4 = 7.$$

Logo, 1 328 é divisível por 4.

##### Exemplo

O número 2 346 não é divisível por 4, pois os dois últimos algarismos formam 46, e 46 não é divisível por 4.

### 7.4 Critério de divisibilidade por 5

#### Teorema 7.4: Divisibilidade por 5

Um número natural é divisível por 5 quando seu último algarismo é 0 ou 5.

##### Exemplo

730 é divisível por 5,  
pois termina em 0.

815 é divisível por 5,  
pois termina em 5.

812 não é divisível por 5,  
pois termina em 2.

## 7.5 Critério de divisibilidade por 6

### Teorema 7.5: Divisibilidade por 6

Um número natural é divisível por 6 quando é divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo.

#### Exemplo

O número 528 é divisível por 6, pois:

528 é par,

e

$$5 + 2 + 8 = 15,$$

que é divisível por 3.

Logo, 528 é divisível por 6.

#### Atenção

Não basta ser divisível por 2 ou por 3. Precisa ser divisível pelos dois.

Por exemplo, 21 é divisível por 3, mas não é divisível por 2. Logo, 21 não é divisível por 6.

Já 14 é divisível por 2, mas não é divisível por 3. Logo, 14 não é divisível por 6.

## 7.6 Critério de divisibilidade por 8

### Teorema 7.6: Divisibilidade por 8

Um número natural é divisível por 8 quando o número formado por seus três últimos algarismos é divisível por 8.

#### Exemplo

O número 12 416 é divisível por 8, pois os três últimos algarismos formam 416, e:

$$416 \div 8 = 52.$$

Logo, 12 416 é divisível por 8.

## 7.7 Critério de divisibilidade por 9

### Teorema 7.7: Divisibilidade por 9

Um número natural é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos é divisível por 9.

### Exemplo

O número 5 832 é divisível por 9, pois:

$$5 + 8 + 3 + 2 = 18.$$

Como 18 é divisível por 9, então 5 832 é divisível por 9.

## 7.8 Critério de divisibilidade por 10

### Teorema 7.8: Divisibilidade por 10

Um número natural é divisível por 10 quando seu último algarismo é 0.

### Exemplo

340 é divisível por 10.

341 não é divisível por 10.

## 7.9 Resumo dos critérios

| Divisor | Critério                                               | Exemplo                            |
|---------|--------------------------------------------------------|------------------------------------|
| 2       | Último algarismo é 0, 2, 4, 6 ou 8.                    | 246                                |
| 3       | Soma dos algarismos é divisível por 3.                 | 732, pois $7+3+2 = 12$ .           |
| 4       | Dois últimos algarismos formam número divisível por 4. | 1 216, pois $16 \mid 16$ .         |
| 5       | Último algarismo é 0 ou 5.                             | 835                                |
| 6       | É divisível por 2 e por 3.                             | 528                                |
| 8       | Três últimos algarismos formam número divisível por 8. | 3 128, pois $128 \mid 128$ .       |
| 9       | Soma dos algarismos é divisível por 9.                 | 7 218, pois $7 + 2 + 1 + 8 = 18$ . |
| 10      | Último algarismo é 0.                                  | 9 870                              |

### Atenção

Na tabela acima, quando aparece algo como “ $16 \mid 16$ ”, isso significa que 16 é divisível por 16. Naturalmente, o mais importante é perceber que 16 é divisível por 4, então 1 216 também é divisível por 4.

## 8 Propriedades da divisibilidade

### Teorema 8.1: Divisibilidade e soma

Se  $a \mid b$  e  $a \mid c$ , então:

$$a \mid (b + c).$$

**Demonstração.**

Se  $a \mid b$ , então existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que:

$$b = a \cdot m.$$

Se  $a \mid c$ , então existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que:

$$c = a \cdot n.$$

Somando:

$$b + c = a \cdot m + a \cdot n.$$

Colocando  $a$  em evidência:

$$b + c = a(m + n).$$

Como  $m + n \in \mathbb{N}$ , concluímos que:

$$a \mid (b + c).$$

□

### Exemplo

Como  $5 \mid 20$  e  $5 \mid 35$ , então:

$$5 \mid (20 + 35).$$

De fato:

$$20 + 35 = 55,$$

e

$$55 = 5 \cdot 11.$$

### Teorema 8.2: Divisibilidade e diferença

Se  $a \mid b$ ,  $a \mid c$  e  $b \geq c$ , então:

$$a \mid (b - c).$$

### Exemplo

Como  $4 \mid 28$  e  $4 \mid 12$ , então:

$$4 \mid (28 - 12).$$

De fato:

$$28 - 12 = 16,$$

e

$$4 \mid 16.$$

### Teorema 8.3: Transitividade da divisibilidade

Se  $a \mid b$  e  $b \mid c$ , então:

$$a \mid c.$$

#### Demonstração.

Se  $a \mid b$ , então:

$$b = a \cdot m$$

para algum  $m \in \mathbb{N}$ .

Se  $b \mid c$ , então:

$$c = b \cdot n$$

para algum  $n \in \mathbb{N}$ .

Substituindo  $b = a \cdot m$  na segunda igualdade:

$$c = (a \cdot m) \cdot n.$$

Logo:

$$c = a \cdot (mn).$$

Como  $mn \in \mathbb{N}$ , concluímos que:

$$a \mid c.$$

□

### Exemplo

Sabemos que:

$3 \mid 12$

e

$12 \mid 60.$

Então:

$3 \mid 60.$

## 9 Números pares e ímpares

### Definição 9.1: Forma geral de um número par

Um número natural  $n$  é par quando pode ser escrito na forma:

$$n = 2k,$$

em que  $k \in \mathbb{N}$ .

### Definição 9.2: Forma geral de um número ímpar

Um número natural  $n$  é ímpar quando pode ser escrito na forma:

$$n = 2k + 1,$$

em que  $k \in \mathbb{N}$ .

### Exemplo

O número 18 é par porque:

$$18 = 2 \cdot 9.$$

O número 23 é ímpar porque:

$$23 = 2 \cdot 11 + 1.$$

### Teorema 9.1: Soma de números pares

A soma de dois números pares é sempre um número par.

#### Demonstração.

Sejam  $a$  e  $b$  dois números pares. Então existem  $m, n \in \mathbb{N}$  tais que:

$$a = 2m$$

e

$$b = 2n.$$

Logo:

$$a + b = 2m + 2n.$$

Colocando 2 em evidência:

$$a + b = 2(m + n).$$

Como  $m + n \in \mathbb{N}$ , concluímos que  $a + b$  é par.  $\square$

### **Teorema 9.2: Soma de dois números ímpares**

A soma de dois números ímpares é sempre um número par.

#### **Demonstração.**

Sejam  $a$  e  $b$  dois números ímpares. Então existem  $m, n \in \mathbb{N}$  tais que:

$$a = 2m + 1$$

e

$$b = 2n + 1.$$

Somando:

$$a + b = (2m + 1) + (2n + 1).$$

Logo:

$$a + b = 2m + 2n + 2.$$

Colocando 2 em evidência:

$$a + b = 2(m + n + 1).$$

Portanto,  $a + b$  é par.  $\square$

### **Teorema 9.3: Soma de um par com um ímpar**

A soma de um número par com um número ímpar é sempre um número ímpar.

#### **Exemplo**

$$8 + 13 = 21.$$

Como 8 é par e 13 é ímpar, a soma é ímpar.

### Resumo essencial

$$\text{par} + \text{par} = \text{par}$$

$$\text{ímpar} + \text{ímpar} = \text{par}$$

$$\text{par} + \text{ímpar} = \text{ímpar}$$

$$\text{par} \cdot \text{qualquer número natural} = \text{par}$$

## 10 Números primos e compostos

### Definição 10.1: Número primo

Um número natural maior que 1 é chamado de número primo quando possui exatamente dois divisores positivos: 1 e ele mesmo.

#### Exemplo

O número 7 é primo, pois seus divisores positivos são:

$$D(7) = \{1, 7\}.$$

### Definição 10.2: Número composto

Um número natural maior que 1 é chamado de número composto quando possui mais de dois divisores positivos.

#### Exemplo

O número 12 é composto, pois:

$$D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}.$$

Ele possui mais de dois divisores.

### Atenção

O número 1 não é primo e também não é composto.  
Ele possui apenas um divisor positivo:

$$D(1) = \{1\}.$$

### Observação

Os primeiros números primos são:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots$$

O número 2 é o único número primo par.

### Teorema 10.1: O único primo par

O número 2 é o único número primo par.

#### Demonstração.

Todo número par é divisível por 2. Se um número par maior que 2 é divisível por 2, então ele possui pelo menos três divisores positivos:

1, 2, ele mesmo.

Logo, ele não pode ser primo.

Portanto, o único número primo par é 2.  $\square$

## 10.1 Crivo de Eratóstenes

### Método

O Crivo de Eratóstenes é um método para encontrar números primos. Para encontrar os primos até 50:

- 1) escreva os números de 2 até 50;
- 2) mantenha o 2 e risque seus múltiplos maiores que ele;
- 3) mantenha o 3 e risque seus múltiplos maiores que ele;
- 4) mantenha o 5 e risque seus múltiplos maiores que ele;
- 5) continue o processo;
- 6) os números não riscados são primos.

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 |
| 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |
| 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 |
| 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |    |

### Observação

No quadro acima, o aluno pode riscar os múltiplos de 2, depois de 3, depois de 5, e assim por diante. Os números que restarem serão os primos até 50.

## 11 Decomposição em fatores primos

### Definição 11.1: Fatoração

Fatorar um número natural significa escrevê-lo como produto de fatores.

### Definição 11.2: Decomposição em fatores primos

Decompor um número em fatores primos significa escrevê-lo como produto de números primos.

### Exemplo

Vamos decompor 60 em fatores primos.

$$60 = 2 \cdot 30.$$

Como  $30 = 2 \cdot 15$ , temos:

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 15.$$

Como  $15 = 3 \cdot 5$ , obtemos:

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Logo:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

### Método

Para decompor um número em fatores primos usando divisões sucessivas:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Logo:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

### Teorema 11.1: Teorema Fundamental da Aritmética

Todo número natural maior que 1 pode ser escrito como produto de números primos. Além disso, essa decomposição é única, desconsiderando a ordem dos fatores.

### Observação

Este teorema é uma das ideias mais importantes da Aritmética. No 7º ano, o mais importante é saber aplicar a decomposição em fatores primos para resolver problemas envolvendo divisores, MDC e MMC.

### Exemplo

A decomposição de 84 é:

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Portanto:

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7.$$

## 12 Máximo divisor comum: MDC

### Definição 12.1: Divisor comum

Um divisor comum de dois ou mais números naturais é um número que divide todos eles.

### Exemplo

Vamos encontrar os divisores comuns de 18 e 24.

$$D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}.$$

$$D(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}.$$

Os divisores comuns são:

$$\{1, 2, 3, 6\}.$$

### Definição 12.2: Máximo divisor comum

O máximo divisor comum de dois ou mais números naturais positivos é o maior número que divide todos eles.

Usamos a notação:

$$\text{mdc}(a, b).$$

### Exemplo

Como os divisores comuns de 18 e 24 são:

$$\{1, 2, 3, 6\},$$

o maior deles é 6. Logo:

$$\text{mdc}(18, 24) = 6.$$

## 12.1 MDC por listagem de divisores

### Método

Para calcular o MDC por listagem:

- 1) liste os divisores positivos de cada número;
- 2) identifique os divisores comuns;
- 3) escolha o maior divisor comum.

### Exemplo

Calcule  $\text{mdc}(30, 45)$ .

$$D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}.$$

$$D(45) = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}.$$

Os divisores comuns são:

$$\{1, 3, 5, 15\}.$$

Logo:

$$\text{mdc}(30, 45) = 15.$$

## 12.2 MDC por decomposição em fatores primos

### Método

Para calcular o MDC usando decomposição em fatores primos:

- 1) decompõe os números em fatores primos;
- 2) escolha apenas os fatores primos comuns;
- 3) use o menor expoente de cada fator comum;
- 4) multiplique os fatores escolhidos.

### Exemplo

Calcule  $\text{mdc}(72, 90)$ .

Primeiro, decompomos:

$$72 = 2^3 \cdot 3^2.$$

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Os fatores comuns são 2 e 3.

Usando os menores expoentes:

$$2^1 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18.$$

Logo:

$$\text{mdc}(72, 90) = 18.$$

## 12.3 Algoritmo de Euclides

### Teorema 12.1: Algoritmo de Euclides

Se  $a$  e  $b$  são números naturais positivos, com  $a > b$ , então:

$$\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r),$$

em que  $r$  é o resto da divisão de  $a$  por  $b$ .

### Observação

O Algoritmo de Euclides é um método eficiente para calcular o MDC. Ele usa divisões sucessivas até que o resto seja zero.

### Exemplo

Calcule  $\text{mdc}(252, 105)$ .

Primeiro:

$$252 = 105 \cdot 2 + 42.$$

Então:

$$\text{mdc}(252, 105) = \text{mdc}(105, 42).$$

Agora:

$$105 = 42 \cdot 2 + 21.$$

Então:

$$\text{mdc}(105, 42) = \text{mdc}(42, 21).$$

Por fim:

$$42 = 21 \cdot 2 + 0.$$

Quando o resto chega a zero, o último divisor é o MDC.

Logo:

$$\text{mdc}(252, 105) = 21.$$

### Resumo essencial

O MDC é usado quando o problema envolve:

- dividir em grupos iguais;
- encontrar o maior tamanho possível;
- repartir sem sobrar;
- simplificar frações;
- organizar elementos em quantidades iguais.

## 13 Mínimo múltiplo comum: MMC

### Definição 13.1: Múltiplo comum

Um múltiplo comum de dois ou mais números naturais positivos é um número que é múltiplo de todos eles.

### Exemplo

Vamos encontrar alguns múltiplos comuns de 4 e 6.

$$M(4) = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, \dots\}.$$

$$M(6) = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, \dots\}.$$

Os múltiplos comuns positivos são:

$$12, 24, 36, \dots$$

### Definição 13.2: Mínimo múltiplo comum

O mínimo múltiplo comum de dois ou mais números naturais positivos é o menor múltiplo positivo comum entre eles.

Usamos a notação:

$$\text{mmc}(a, b).$$

### Exemplo

Como os múltiplos comuns positivos de 4 e 6 são:

$$12, 24, 36, \dots$$

o menor deles é 12. Logo:

$$\text{mmc}(4, 6) = 12.$$

## 13.1 MMC por listagem de múltiplos

### Método

Para calcular o MMC por listagem:

- 1) liste os múltiplos positivos de cada número;
- 2) encontre os múltiplos comuns;
- 3) escolha o menor múltiplo comum positivo.

### Exemplo

Calcule  $\text{mmc}(8, 12)$ .

$$M(8) = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, \dots\}.$$

$$M(12) = \{12, 24, 36, 48, \dots\}.$$

O menor múltiplo comum positivo é 24.

Logo:

$$\text{mmc}(8, 12) = 24.$$

## 13.2 MMC por decomposição em fatores primos

### Método

Para calcular o MMC usando decomposição em fatores primos:

- 1) decompõe os números em fatores primos;
- 2) escolha todos os fatores primos que aparecem;
- 3) use o maior expoente de cada fator;
- 4) multiplique os fatores escolhidos.

### Exemplo

Calcule  $\text{mmc}(18, 24)$ .

Primeiro, decompomos:

$$18 = 2 \cdot 3^2.$$

$$24 = 2^3 \cdot 3.$$

Escolhemos todos os fatores que aparecem, com os maiores expoentes:

$$2^3 \cdot 3^2.$$

Logo:

$$\text{mmc}(18, 24) = 8 \cdot 9 = 72.$$

### Teorema 13.1: Relação entre MDC e MMC

Se  $a$  e  $b$  são números naturais positivos, então:

$$a \cdot b = \text{mdc}(a, b) \cdot \text{mmc}(a, b).$$

### Exemplo

Para  $a = 12$  e  $b = 18$ , temos:

$$\text{mdc}(12, 18) = 6$$

e

$$\text{mmc}(12, 18) = 36.$$

Então:

$$12 \cdot 18 = 216$$

e

$$6 \cdot 36 = 216.$$

Logo:

$$12 \cdot 18 = \text{mdc}(12, 18) \cdot \text{mmc}(12, 18).$$

### Resumo essencial

O MMC é usado quando o problema envolve:

- eventos que se repetem;
- ciclos;
- encontros periódicos;
- horários;
- somar ou comparar frações com denominadores diferentes.

## 14 MDC ou MMC? Como decidir

### Atenção

Muitos alunos erram problemas porque não sabem decidir se devem usar MDC ou MMC. A escolha depende da ideia do problema.

| Use MDC quando o problema fala em... | Use MMC quando o problema fala em... |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| dividir em partes iguais             | eventos que se repetem               |
| maior tamanho possível               | próximo encontro                     |
| maior quantidade por grupo           | ciclos simultâneos                   |
| repartir sem sobrar                  | horários e períodos                  |
| formar grupos iguais                 | menor número comum                   |

### Exemplo

Uma professora tem 24 lápis e 36 borrachas. Ela quer montar kits iguais, sem sobrar nenhum item. Qual é o maior número de kits que ela pode montar?

Como o problema fala em dividir em grupos iguais e sem sobrar, usamos MDC:

$$\text{mdc}(24, 36) = 12.$$

Logo, ela pode montar 12 kits.

Cada kit terá:

$$24 \div 12 = 2 \text{ lápis}$$

e

$$36 \div 12 = 3 \text{ borrachas.}$$

### Exemplo

Dois ônibus passam por um ponto. Um passa a cada 12 minutos e outro a cada 18 minutos. Se eles passam juntos agora, daqui a quantos minutos passarão juntos novamente?

Como o problema fala em repetição e próximo encontro, usamos MMC:

$$\text{mmc}(12, 18) = 36.$$

Logo, eles passarão juntos novamente daqui a 36 minutos.

## 15 Exercícios de fixação

### Exercício 1

Liste os dez primeiros múltiplos de 6, começando por 0.

### Exercício 2

Determine os divisores positivos de 28.

### Exercício 3

Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.

- a)  $4 \mid 32$
- b)  $7 \mid 50$
- c)  $9 \mid 81$
- d)  $6 \mid 45$
- e)  $10 \mid 230$

### Exercício 4

Usando critérios de divisibilidade, diga se os números abaixo são divisíveis por 2, 3, 5, 6, 9 e 10.

240, 315, 728, 1 206, 4 590.

### Exercício 5

Classifique os números abaixo em primos ou compostos.

2, 9, 11, 15, 17, 21, 29, 35.

### Exercício 6

Decomponha os números abaixo em fatores primos.

36, 48, 75, 120.

### Exercício 7

Calcule:

$\text{mdc}(18, 30)$ ,  $\text{mdc}(24, 36)$ ,  $\text{mdc}(45, 60)$ .

### Exercício 8

Calcule:

$$\text{mmc}(6, 8), \quad \text{mmc}(10, 15), \quad \text{mmc}(12, 18).$$

### Exercício 9

Uma escola possui 42 bolas de futebol e 70 bolas de vôlei. A direção quer montar kits iguais, sem sobrar nenhuma bola. Qual é o maior número de kits que pode ser montado?

### Exercício 10

Um semáforo fecha a cada 30 segundos e outro fecha a cada 45 segundos. Se os dois fecharam juntos agora, depois de quantos segundos fecharão juntos novamente?

## 16 Correção comentada

### Correção comentada

#### Exercício 1.

Os múltiplos de 6 são obtidos multiplicando 6 por  $0, 1, 2, 3, \dots$

$$6 \cdot 0 = 0$$

$$6 \cdot 1 = 6$$

$$6 \cdot 2 = 12$$

$$6 \cdot 3 = 18$$

$$6 \cdot 4 = 24$$

$$6 \cdot 5 = 30$$

$$6 \cdot 6 = 36$$

$$6 \cdot 7 = 42$$

$$6 \cdot 8 = 48$$

$$6 \cdot 9 = 54$$

Logo:

$$0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54.$$

### Correção comentada

#### Exercício 2.

Procuramos os números que dividem 28 exatamente.

$$1 \cdot 28 = 28$$

$$2 \cdot 14 = 28$$

$$4 \cdot 7 = 28$$

Logo:

$$D(28) = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}.$$

### Correção comentada

#### Exercício 3.

- a)  $4 \mid 32$ : verdadeiro, pois  $32 = 4 \cdot 8$ .
- b)  $7 \mid 50$ : falso, pois  $50 \div 7$  deixa resto 1.
- c)  $9 \mid 81$ : verdadeiro, pois  $81 = 9 \cdot 9$ .
- d)  $6 \mid 45$ : falso, pois  $45 \div 6$  deixa resto 3.
- e)  $10 \mid 230$ : verdadeiro, pois  $230 = 10 \cdot 23$ .

### Correção comentada

#### Exercício 4.

$$240 :$$

é divisível por 2, 3, 5, 6, 10, mas não por 9, pois:

$$2 + 4 + 0 = 6,$$

e 6 não é divisível por 9.

$$315 :$$

é divisível por 3, 5 e 9, pois:

$$3 + 1 + 5 = 9.$$

Não é divisível por 2, 6 nem 10.

$$728 :$$

é divisível por 2, mas não por 3, 5, 6, 9 nem 10.

$$1\,206 :$$

é divisível por 2, 3 e 6, pois é par e:

$$1 + 2 + 0 + 6 = 9.$$

Também é divisível por 9. Não é divisível por 5 nem por 10.

$$4\,590 :$$

é divisível por 2, 3, 5, 6, 9 e 10, pois termina em 0 e:

$$4 + 5 + 9 + 0 = 18.$$

### Correção comentada

#### Exercício 5.

2 é primo.

9 é composto, pois  $9 = 3 \cdot 3$ .

11 é primo.

15 é composto, pois  $15 = 3 \cdot 5$ .

17 é primo.

21 é composto, pois  $21 = 3 \cdot 7$ .

29 é primo.

35 é composto, pois  $35 = 5 \cdot 7$ .

### Correção comentada

#### Exercício 6.

$$36 = 2^2 \cdot 3^2.$$

$$48 = 2^4 \cdot 3.$$

$$75 = 3 \cdot 5^2.$$

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5.$$

### Correção comentada

#### Exercício 7.

$$18 = 2 \cdot 3^2$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Logo:

$$\text{mdc}(18, 30) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Agora:

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

Logo:

$$\text{mdc}(24, 36) = 2^2 \cdot 3 = 12.$$

Por fim:

$$45 = 3^2 \cdot 5$$

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Logo:

$$\text{mdc}(45, 60) = 3 \cdot 5 = 15.$$

Portanto:

|                                                                                         |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| $\text{mdc}(18, 30) = 6, \quad \text{mdc}(24, 36) = 12, \quad \text{mdc}(45, 60) = 15.$ |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|

### Correção comentada

#### Exercício 8.

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$8 = 2^3$$

Logo:

$$\text{mmc}(6, 8) = 2^3 \cdot 3 = 24.$$

Agora:

$$10 = 2 \cdot 5$$

$$15 = 3 \cdot 5$$

Logo:

$$\text{mmc}(10, 15) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$$

Por fim:

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$18 = 2 \cdot 3^2$$

Logo:

$$\text{mmc}(12, 18) = 2^2 \cdot 3^2 = 36.$$

Portanto:

$$\text{mmc}(6, 8) = 24, \quad \text{mmc}(10, 15) = 30, \quad \text{mmc}(12, 18) = 36.$$

### Correção comentada

#### Exercício 9.

Como a escola quer montar kits iguais sem sobrar nenhuma bola, devemos usar MDC.

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$$

Os fatores comuns são 2 e 7. Logo:

$$\text{mdc}(42, 70) = 2 \cdot 7 = 14.$$

Portanto, a escola pode montar:

$$14 \text{ kits.}$$

Cada kit terá:

$$42 \div 14 = 3$$

bolas de futebol e:

$$70 \div 14 = 5$$

bolas de vôlei.

### Correção comentada

#### Exercício 10.

Como os semáforos funcionam em ciclos que se repetem, devemos usar MMC.

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$45 = 3^2 \cdot 5$$

Logo:

$$\text{mmc}(30, 45) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

$$\text{mmc}(30, 45) = 2 \cdot 9 \cdot 5 = 90.$$

Portanto, os dois semáforos fecharão juntos novamente depois de:

90 segundos.

## 17 Lista extra de treino

### Exercício 11

Escreva os múltiplos de 9 menores que 100.

### Exercício 12

Determine todos os divisores positivos de 48.

### Exercício 13

Complete com  $|$  ou  $\nmid$ .

a)  $3 \_ 42$

d)  $9 \_ 108$

b)  $5 \_ 72$

e)  $6 \_ 82$

c)  $8 \_ 96$

f)  $10 \_ 1\,250$

### Exercício 14

Um número é divisível por 2 e por 3. Podemos afirmar que ele é divisível por 6? Justifique.

### Exercício 15

Um número é divisível por 3 e por 5. Podemos afirmar que ele é divisível por 15? Teste com exemplos e explique.

### Exercício 16

Calcule:

$$\text{mdc}(48, 72), \quad \text{mdc}(81, 108), \quad \text{mdc}(96, 120).$$

### Exercício 17

Calcule:

$$\text{mmc}(14, 21), \quad \text{mmc}(16, 20), \quad \text{mmc}(25, 40).$$

### Exercício 18

Três luzes piscam em intervalos diferentes. A primeira pisca a cada 6 segundos, a segunda a cada 8 segundos e a terceira a cada 12 segundos. Se elas piscam juntas agora, depois de quantos segundos piscarão juntas novamente?

### Exercício 19

Uma pessoa tem 84 doces de chocolate e 126 doces de coco. Ela deseja montar saquinhos iguais, sem sobrar doces. Qual é o maior número possível de saquinhos?

### Exercício 20

Explique, com suas palavras, a diferença entre divisor e múltiplo.

## 18 Síntese final

### Resumo essencial

#### 1. Divisor

$$a \text{ é divisor de } b \iff b = a \cdot k.$$

#### 2. Múltiplo

$$b \text{ é múltiplo de } a \iff b = a \cdot k.$$

#### 3. Divisibilidade

$$a \mid b \iff b \text{ é divisível por } a.$$

#### 4. Número primo

Número maior que 1 com exatamente dois divisores positivos.

#### 5. Número composto

Número maior que 1 com mais de dois divisores positivos.

#### 6. MDC

Maior divisor comum. Usamos principalmente em problemas de divisão em grupos iguais.

#### 7. MMC

Menor múltiplo comum positivo. Usamos principalmente em problemas de repetição, ciclos e encontros periódicos.

## Fim do módulo

Múltiplos, divisores e divisibilidade