

Comprimento da Circunferência

Curso de Matemática – 7º Ano

Objetivos da aula

Ao final deste módulo, o estudante deverá ser capaz de:

- 1) diferenciar circunferência e círculo;
- 2) identificar centro, raio e diâmetro;
- 3) compreender o comprimento da circunferência como medida de seu contorno;
- 4) compreender a relação entre comprimento da circunferência e diâmetro;
- 5) reconhecer o número π como razão constante;
- 6) usar aproximações de π , como 3,14;
- 7) calcular o comprimento da circunferência usando o raio;
- 8) calcular o comprimento da circunferência usando o diâmetro;
- 9) resolver problemas envolvendo rodas, pistas, praças circulares e objetos circulares;
- 10) calcular raio ou diâmetro a partir do comprimento;
- 11) interpretar resultados aproximados;
- 12) diferenciar comprimento da circunferência e área do círculo;
- 13) resolver problemas envolvendo voltas completas;
- 14) avaliar se uma resposta envolvendo circunferência é razoável.

Sumário

1	Ideia central do capítulo	3
2	Circunferência e círculo	3
3	Centro, raio e diâmetro	4
4	O que é o comprimento da circunferência?	5
5	O número π	6
6	Fórmula usando o diâmetro	7

7	Fórmula usando o raio	8
8	Quando usar cada fórmula?	9
9	Usando $\pi = 3,14$ ou deixando em função de π	10
10	Problemas com voltas completas	11
11	Problemas inversos	12
12	Comprimento da circunferência e unidades	13
13	Comprimento da circunferência e área do círculo	14
14	Situações práticas	15
15	Fluxograma de resolução	16
16	Erros comuns	17
17	Exercícios de fixação	18
18	Correção comentada	19
19	Lista extra de treino	23
20	Síntese final	24

1 Ideia central do capítulo

A circunferência é a linha que contorna um círculo.

O comprimento da circunferência é a medida dessa linha.

Por exemplo:

- o contorno de uma roda lembra uma circunferência;
- a borda de uma moeda lembra uma circunferência;
- a pista circular de uma praça pode ser modelada por uma circunferência;
- o aro de uma bicicleta possui comprimento de circunferência.

Resumo essencial

A ideia central deste módulo é:

O comprimento da circunferência é a medida do seu contorno.

Esse comprimento depende do raio ou do diâmetro.

$$C = 2\pi r$$

ou

$$C = \pi d$$

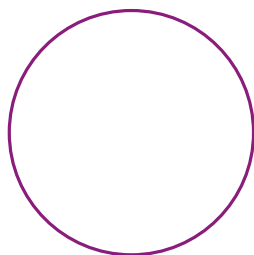
2 Circunferência e círculo

Definição 2.1: Circunferência

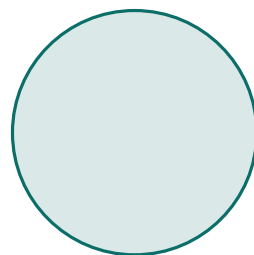
Circunferência é o conjunto dos pontos de um plano que estão a uma mesma distância de um ponto fixo chamado centro.

Definição 2.2: Círculo

Círculo é a região plana formada pela circunferência e por todos os pontos internos a ela.



circunferência



círculo

Atenção

Circunferência e círculo não são a mesma coisa.

circunferência = linha

círculo = região

Observação

Quando falamos em comprimento da circunferência, estamos medindo a linha de contorno, não a região interna.

3 Centro, raio e diâmetro

Definição 3.1: Centro

O centro é o ponto fixo que está à mesma distância de todos os pontos da circunferência.

Definição 3.2: Raio

O raio é o segmento que liga o centro a um ponto da circunferência.

Definição 3.3: Diâmetro

O diâmetro é o segmento que liga dois pontos da circunferência passando pelo centro.

Teorema 3.1: Relação entre raio e diâmetro

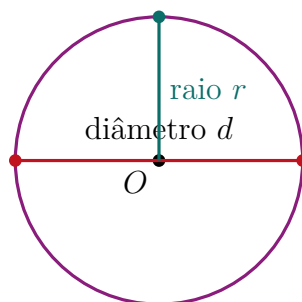
O diâmetro mede o dobro do raio.

Se d é o diâmetro e r é o raio, então:

$$d = 2r.$$

Também podemos escrever:

$$r = \frac{d}{2}.$$



Exemplo

Se uma circunferência tem raio 6 cm, então seu diâmetro é:

$$d = 2r.$$

$$d = 2 \cdot 6 = 12.$$

Logo:

$$d = 12 \text{ cm.}$$

Exemplo

Se uma circunferência tem diâmetro 18 m, então seu raio é:

$$r = \frac{d}{2}.$$

$$r = \frac{18}{2} = 9.$$

Logo:

$$r = 9 \text{ m.}$$

4 O que é o comprimento da circunferência?

Definição 4.1: Comprimento da circunferência

O comprimento da circunferência é a medida do contorno da circunferência.

Notação

Neste módulo, representaremos o comprimento da circunferência pela letra:

C .

Exemplo

Se uma roda dá uma volta completa no chão, ela percorre uma distância igual ao comprimento de sua circunferência.



Observação

O comprimento da circunferência também pode ser chamado de perímetro do círculo, pois mede o contorno da figura circular.

5 O número π

Definição 5.1: Número π

O número π é a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro.

Teorema 5.1: Razão constante

Em qualquer circunferência, a razão entre o comprimento C e o diâmetro d é sempre a mesma:

$$\frac{C}{d} = \pi.$$

Observação

Isso significa que, para qualquer circunferência:

C é aproximadamente 3,14 vezes o diâmetro.

Notação

O número π é irracional, ou seja, possui infinitas casas decimais e não pode ser escrito como uma fração exata.

Algumas aproximações comuns são:

$$\pi \approx 3,14$$

e

$$\pi \approx \frac{22}{7}.$$

Exemplo

Se uma circunferência tem diâmetro 10 cm, então seu comprimento é aproximadamente:

$$C \approx 3,14 \cdot 10.$$

$$C \approx 31,4 \text{ cm}.$$

Atenção

O número π não é exatamente 3,14.
Usamos 3,14 como aproximação.

6 Fórmula usando o diâmetro

Da relação:

$$\frac{C}{d} = \pi,$$

podemos obter:

$$C = \pi d.$$

Teorema 6.1: Comprimento usando o diâmetro

Se uma circunferência tem diâmetro d , então seu comprimento é:

$$C = \pi d.$$

Exemplo

Calcule o comprimento de uma circunferência com diâmetro 8 cm, usando $\pi \approx 3,14$.

$$C = \pi d.$$

$$C \approx 3,14 \cdot 8.$$

$$C \approx 25,12.$$

Logo:

$$C \approx 25,12 \text{ cm.}$$

Exemplo

Uma tampa circular tem diâmetro 20 cm. Qual é aproximadamente o comprimento de sua borda?

$$C = \pi d.$$

$$C \approx 3,14 \cdot 20 = 62,8.$$

Logo:

$$C \approx 62,8 \text{ cm.}$$

Método

Para calcular o comprimento usando o diâmetro:

- 1) identifique o diâmetro d ;
- 2) escolha a aproximação de π ;

- 3) aplique $C = \pi d$;
- 4) escreva a resposta com unidade de comprimento.

7 Fórmula usando o raio

Como o diâmetro é o dobro do raio:

$$d = 2r.$$

Substituindo na fórmula:

$$C = \pi d,$$

temos:

$$C = \pi \cdot 2r.$$

Portanto:

$$C = 2\pi r.$$

Teorema 7.1: Comprimento usando o raio

Se uma circunferência tem raio r , então seu comprimento é:

$$C = 2\pi r.$$

Exemplo

Calcule o comprimento de uma circunferência com raio 5 cm, usando $\pi \approx 3,14$.

$$C = 2\pi r.$$

$$C \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 5.$$

$$C \approx 6,28 \cdot 5 = 31,4.$$

Logo:

$$C \approx 31,4 \text{ cm.}$$

Exemplo

Uma praça circular tem raio 12 m. Qual é aproximadamente o comprimento de seu contorno?

$$C = 2\pi r.$$

$$C \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 12.$$

$$C \approx 6,28 \cdot 12 = 75,36.$$

Logo:

$$C \approx 75,36 \text{ m.}$$

Resumo essencial

As duas fórmulas são equivalentes:

$$C = \pi d$$

$$C = 2\pi r$$

porque:

$$d = 2r.$$

8 Quando usar cada fórmula?

Método

Para escolher a fórmula:

- 1) se o problema fornece o diâmetro, use:

$$C = \pi d;$$

- 2) se o problema fornece o raio, use:

$$C = 2\pi r;$$

- 3) se o problema fornece o comprimento e pede o raio ou o diâmetro, isole a incógnita.

Dado fornecido	Fórmula mais direta
Diâmetro d	$C = \pi d$
Raio r	$C = 2\pi r$
Comprimento C e diâmetro desconhecido	$d = \frac{C}{\pi}$
Comprimento C e raio desconhecido	$r = \frac{C}{2\pi}$

Exemplo

Se o diâmetro é 14 cm:

$$C = \pi d.$$

Se o raio é 7 cm:

$$C = 2\pi r.$$

Nos dois casos, o resultado é o mesmo, pois:

$$14 = 2 \cdot 7.$$

9 Usando $\pi = 3,14$ ou deixando em função de π

Em alguns problemas, podemos deixar a resposta em função de π .

Exemplo

Calcule o comprimento de uma circunferência de raio 6 cm.

Usando a fórmula:

$$C = 2\pi r.$$

$$C = 2\pi \cdot 6.$$

$$C = 12\pi.$$

Logo, o comprimento exato é:

$$\boxed{12\pi \text{ cm.}}$$

Usando $\pi \approx 3,14$:

$$C \approx 12 \cdot 3,14 = 37,68.$$

Então:

$$\boxed{C \approx 37,68 \text{ cm.}}$$

Observação

Quando deixamos a resposta com π , temos uma forma exata.

Quando substituímos π por 3,14, temos uma aproximação.

Atenção

Se o enunciado pedir “use $\pi = 3,14$ ”, devemos substituir π .

Se o enunciado pedir “deixe em função de π ”, não substituímos π .

10 Problemas com voltas completas

Quando uma roda dá uma volta completa, ela percorre uma distância igual ao comprimento da circunferência.

Teorema 10.1: Distância percorrida por uma roda

Se uma roda tem comprimento de circunferência C , então, ao dar n voltas completas, percorre distância:

$$D = n \cdot C.$$

Exemplo

Uma roda tem raio 30 cm. Quantos centímetros ela percorre em uma volta completa? Use $\pi \approx 3,14$.

$$C = 2\pi r.$$

$$C \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 30.$$

$$C \approx 188,4.$$

Logo, em uma volta completa, a roda percorre:

$$\boxed{188,4 \text{ cm.}}$$

Exemplo

A mesma roda do exemplo anterior dá 10 voltas completas. Qual distância percorre? Como uma volta mede aproximadamente:

$$188,4 \text{ cm,}$$

em 10 voltas:

$$D = 10 \cdot 188,4 = 1884.$$

Logo:

$$\boxed{D \approx 1884 \text{ cm.}}$$

Convertendo para metros:

$$1884 \text{ cm} = 18,84 \text{ m.}$$

Exemplo

Uma roda de bicicleta tem diâmetro 70 cm. Quantos metros ela percorre em 100 voltas? Use $\pi \approx 3,14$.

Primeiro, calculamos o comprimento da circunferência:

$$C = \pi d.$$

$$C \approx 3,14 \cdot 70 = 219,8 \text{ cm.}$$

Em 100 voltas:

$$D = 100 \cdot 219,8 = 21980 \text{ cm.}$$

Convertendo para metros:

$$21980 \div 100 = 219,8.$$

Logo:

$$D \approx 219,8 \text{ m.}$$

11 Problemas inversos

Às vezes, conhecemos o comprimento da circunferência e queremos descobrir o raio ou o diâmetro.

Método

Para descobrir o diâmetro:

$$C = \pi d.$$

Então:

$$d = \frac{C}{\pi}.$$

Para descobrir o raio:

$$C = 2\pi r.$$

Então:

$$r = \frac{C}{2\pi}.$$

Exemplo

Uma circunferência tem comprimento 31,4 cm. Usando $\pi = 3,14$, determine seu diâmetro.

$$C = \pi d.$$

$$31,4 = 3,14d.$$

$$d = \frac{31,4}{3,14} = 10.$$

Logo:

$$d = 10 \text{ cm.}$$

Exemplo

Uma circunferência tem comprimento 62,8 m. Usando $\pi = 3,14$, determine seu raio.

$$C = 2\pi r.$$

$$62,8 = 2 \cdot 3,14 \cdot r.$$

$$62,8 = 6,28r.$$

$$r = \frac{62,8}{6,28} = 10.$$

Logo:

$$r = 10 \text{ m.}$$

Atenção

Ao encontrar o raio a partir do comprimento, não esqueça do fator 2 na fórmula:

$$C = 2\pi r.$$

12 Comprimento da circunferência e unidades

O comprimento da circunferência é uma medida linear.

Por isso, suas unidades são:

mm, cm, m, km.

Atenção

O comprimento da circunferência não é medido em unidades quadradas.

$$C \Rightarrow \text{cm, m, km}$$

e não:

$$\text{cm}^2, \text{m}^2, \text{km}^2.$$

Exemplo

Se o raio está em centímetros, o comprimento será em centímetros.

$$r = 4 \text{ cm}$$

$$C = 2\pi r = 8\pi \text{ cm.}$$

Exemplo

Se o diâmetro está em metros, o comprimento será em metros.

$$d = 15 \text{ m}$$

$$C = 15\pi \text{ m.}$$

13 Comprimento da circunferência e área do círculo

Definição 13.1: Área do círculo

A área do círculo mede a superfície interna do círculo.

Observação

Neste módulo, o foco é o comprimento da circunferência. Porém, é importante não confundir as fórmulas.

Grandeza	O que mede	Unidade
Comprimento da circunferência	contorno	cm, m, km
Área do círculo	região interna	cm ² , m ² , km ²

Atenção

Não confunda:

$$C = 2\pi r$$

com:

$$A = \pi r^2.$$

A primeira fórmula calcula comprimento.

A segunda fórmula calcula área.

14 Situações práticas

Exemplo

Uma praça circular tem diâmetro 50 m. Uma pessoa dá uma volta completa ao redor da praça. Quantos metros ela percorre aproximadamente?

$$C = \pi d.$$

$$C \approx 3,14 \cdot 50.$$

$$C \approx 157.$$

Logo:

$$\boxed{157 \text{ m.}}$$

Exemplo

Uma pista circular tem raio 25 m. Um atleta corre 4 voltas completas. Qual distância percorre?

Primeiro, calculamos o comprimento da pista:

$$C = 2\pi r.$$

$$C \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 25.$$

$$C \approx 157 \text{ m.}$$

Em 4 voltas:

$$D = 4 \cdot 157 = 628.$$

Logo:

$$\boxed{628 \text{ m.}}$$

Exemplo

Uma lata cilíndrica tem tampa circular com raio 4 cm. Qual é o comprimento aproximado da borda da tampa?

$$C = 2\pi r.$$

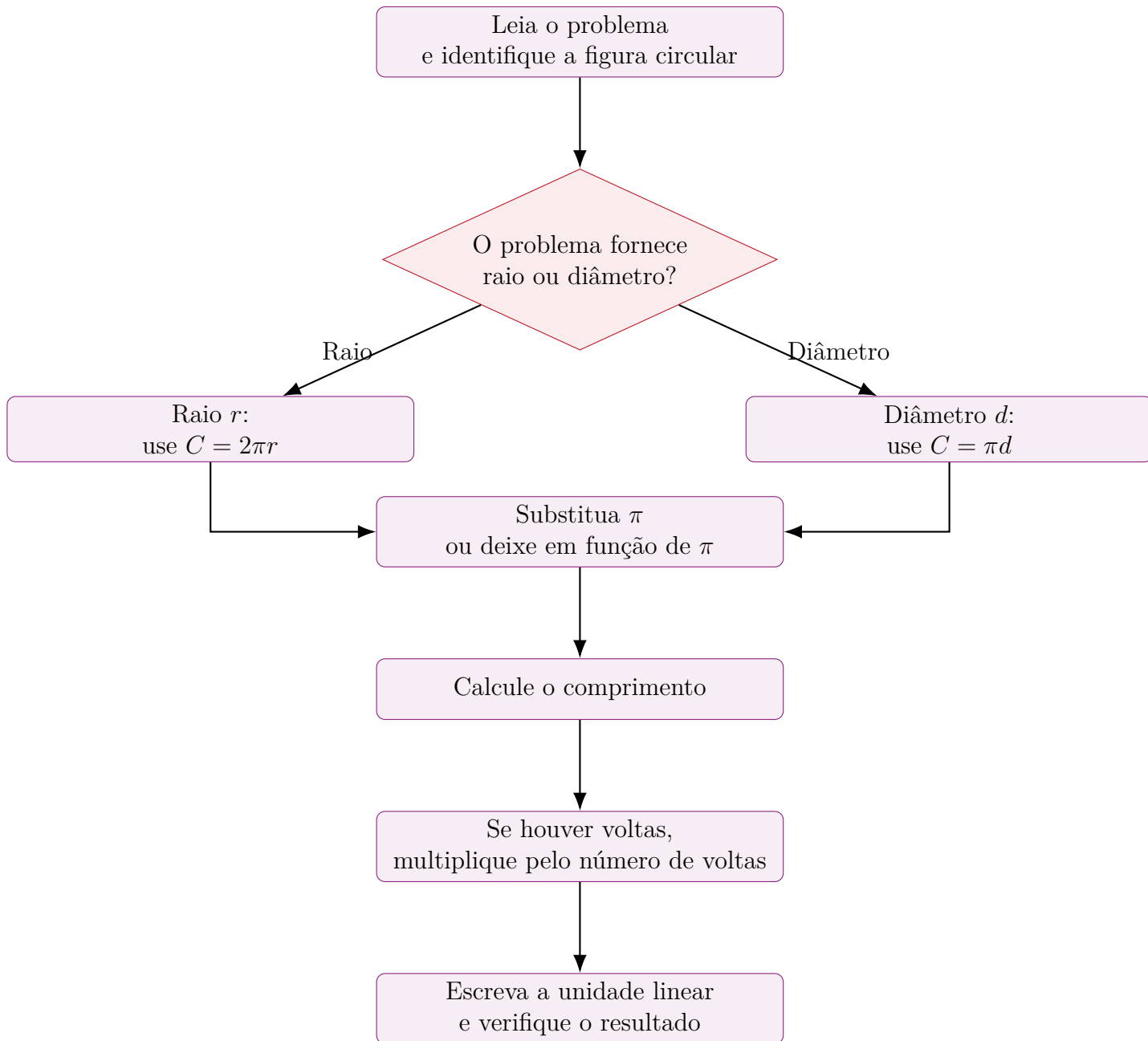
$$C \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 4.$$

$$C \approx 25,12.$$

Logo:

25,12 cm.

15 Fluxograma de resolução



16 Erros comuns

Atenção

Erro 1: Confundir raio e diâmetro.

O diâmetro é o dobro do raio:

$$d = 2r.$$

Se o problema fornece raio, use:

$$C = 2\pi r.$$

Se fornece diâmetro, use:

$$C = \pi d.$$

Atenção

Erro 2: Esquecer o fator 2 na fórmula com raio.

A fórmula correta é:

$$C = 2\pi r.$$

Não é:

$$C = \pi r.$$

Atenção

Erro 3: Usar unidade quadrada para comprimento.

Comprimento da circunferência é medida linear:

$$\text{cm}, \quad \text{m}, \quad \text{km}.$$

Não use:

$$\text{cm}^2, \quad \text{m}^2, \quad \text{km}^2.$$

Atenção

Erro 4: Confundir comprimento com área.

Comprimento:

$$C = 2\pi r.$$

Área:

$$A = \pi r^2.$$

Atenção

Erro 5: Tratar $\pi = 3,14$ como valor exato.

$$\pi \approx 3,14.$$

Portanto, ao usar 3,14, o resultado é aproximado.

Atenção

Erro 6: Esquecer de multiplicar pelo número de voltas.

Uma volta percorre C .

n voltas percorrem:

$$n \cdot C.$$

17 Exercícios de fixação

Exercício 1

Explique a diferença entre circunferência e círculo.

Exercício 2

Complete:

- a) Se o raio é 7 cm, então o diâmetro é _____.
- b) Se o diâmetro é 18 m, então o raio é _____.
- c) O comprimento da circunferência mede o _____.

Exercício 3

Calcule o comprimento de uma circunferência de diâmetro 10 cm, usando $\pi = 3,14$.

Exercício 4

Calcule o comprimento de uma circunferência de raio 6 cm, usando $\pi = 3,14$.

Exercício 5

Uma praça circular tem diâmetro 40 m. Calcule aproximadamente o comprimento de seu contorno, usando $\pi = 3,14$.

Exercício 6

Uma roda tem raio 25 cm. Qual distância ela percorre em uma volta completa? Use $\pi = 3,14$.

Exercício 7

A roda do exercício anterior dá 20 voltas completas. Quantos centímetros ela percorre?

Exercício 8

Uma circunferência tem comprimento 62,8 cm. Usando $\pi = 3,14$, determine seu diâmetro.

Exercício 9

Uma circunferência tem comprimento 94,2 m. Usando $\pi = 3,14$, determine seu raio.

Exercício 10

Calcule o comprimento de uma circunferência de raio 8 cm e deixe a resposta:

- a) em função de π ;
- b) usando $\pi = 3,14$.

18 Correção comentada

Correção comentada

Exercício 1.

Circunferência é a linha formada por todos os pontos que estão à mesma distância de um centro.

Círculo é a região interna limitada pela circunferência, junto com a própria circunferência. Assim:

circunferência = linha

círculo = região

Correção comentada

Exercício 2.

- a) Se o raio é 7 cm, então:

$$d = 2r = 2 \cdot 7 = 14 \text{ cm.}$$

- b) Se o diâmetro é 18 m, então:

$$r = \frac{d}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ m.}$$

- c) O comprimento da circunferência mede o **contorno**.

Correção comentada

Exercício 3.

Dados:

$$d = 10 \text{ cm}$$

e

$$\pi = 3,14.$$

Usamos:

$$C = \pi d.$$

$$C = 3,14 \cdot 10 = 31,4.$$

Logo:

$$C = 31,4 \text{ cm.}$$

Correção comentada

Exercício 4.

Dados:

$$r = 6 \text{ cm}$$

e

$$\pi = 3,14.$$

Usamos:

$$C = 2\pi r.$$

$$C = 2 \cdot 3,14 \cdot 6.$$

$$C = 6,28 \cdot 6 = 37,68.$$

Logo:

$$C = 37,68 \text{ cm.}$$

Correção comentada

Exercício 5.

Dados:

$$d = 40 \text{ m}$$

e

$$\pi = 3,14.$$

Usamos:

$$C = \pi d.$$

$$C = 3,14 \cdot 40 = 125,6.$$

Logo:

$$C = 125,6 \text{ m.}$$

Correção comentada

Exercício 6.

Dados:

$$r = 25 \text{ cm.}$$

Usamos:

$$C = 2\pi r.$$

$$C = 2 \cdot 3,14 \cdot 25.$$

$$C = 6,28 \cdot 25 = 157.$$

Logo, em uma volta completa, a roda percorre:

$$157 \text{ cm.}$$

Correção comentada

Exercício 7.

Pelo exercício anterior, uma volta completa corresponde a:

$$157 \text{ cm.}$$

Em 20 voltas:

$$D = 20 \cdot 157 = 3140.$$

Logo:

$$3140 \text{ cm.}$$

Correção comentada

Exercício 8.

Dados:

$$C = 62,8 \text{ cm}$$

e

$$\pi = 3,14.$$

Usamos:

$$C = \pi d.$$

$$62,8 = 3,14d.$$

$$d = \frac{62,8}{3,14} = 20.$$

Logo:

$$d = 20 \text{ cm.}$$

Correção comentada

Exercício 9.

Dados:

$$C = 94,2 \text{ m}$$

e

$$\pi = 3,14.$$

Usamos:

$$C = 2\pi r.$$

$$94,2 = 2 \cdot 3,14 \cdot r.$$

$$94,2 = 6,28r.$$

$$r = \frac{94,2}{6,28} = 15.$$

Logo:

$$r = 15 \text{ m.}$$

Correção comentada

Exercício 10.

Dados:

$$r = 8 \text{ cm.}$$

Usamos:

$$C = 2\pi r.$$

$$C = 2\pi \cdot 8 = 16\pi.$$

a) Em função de π :

$$C = 16\pi \text{ cm.}$$

b) Usando $\pi = 3,14$:

$$C = 16 \cdot 3,14 = 50,24.$$

Logo:

$$C = 50,24 \text{ cm.}$$

19 Lista extra de treino

Exercício 11

Calcule o comprimento de uma circunferência de diâmetro 16 cm, usando $\pi = 3,14$.

Exercício 12

Calcule o comprimento de uma circunferência de raio 9 m, usando $\pi = 3,14$.

Exercício 13

Uma tampa circular tem diâmetro 30 cm. Determine aproximadamente o comprimento de sua borda.

Exercício 14

Uma roda tem diâmetro 80 cm. Determine a distância percorrida em uma volta completa.

Exercício 15

A roda do exercício anterior dá 50 voltas completas. Determine a distância percorrida em metros.

Exercício 16

Uma pista circular tem raio 20 m. Determine o comprimento de uma volta completa.

Exercício 17

Um atleta corre 6 voltas em uma pista circular de raio 20 m. Determine a distância percorrida, usando $\pi = 3,14$.

Exercício 18

Uma circunferência tem comprimento 125,6 cm. Usando $\pi = 3,14$, determine seu diâmetro.

Exercício 19

Uma circunferência tem comprimento 43,96 m. Usando $\pi = 3,14$, determine seu raio.

Exercício 20

Explique por que o comprimento da circunferência deve ser medido em unidades lineares e não em unidades quadradas.

20 Síntese final

Resumo essencial

1. Circunferência

É a linha formada pelos pontos que estão à mesma distância de um centro.

2. Círculo

É a região interna limitada pela circunferência.

3. Raio

Segmento que liga o centro a um ponto da circunferência.

4. Diâmetro

Segmento que passa pelo centro e liga dois pontos da circunferência.

$$d = 2r.$$

5. Comprimento da circunferência

É a medida do contorno da circunferência.

6. Número π

$$\frac{C}{d} = \pi.$$

Usamos frequentemente:

$$\pi \approx 3,14.$$

7. Fórmula usando o diâmetro

$$C = \pi d.$$

8. Fórmula usando o raio

$$C = 2\pi r.$$

9. Voltas completas

Se uma roda dá n voltas, a distância percorrida é:

$$D = n \cdot C.$$

10. Problemas inversos

$$d = \frac{C}{\pi}.$$

$$r = \frac{C}{2\pi}.$$

11. Unidade

Comprimento da circunferência é medida linear:

cm, m, km.

12. Ideia fundamental

O comprimento da circunferência é sempre π vezes o diâmetro.

Fim do módulo

Comprimento da Circunferência