

Circunferência como Lugar Geométrico

Curso de Matemática – 7º Ano

Objetivos da aula

Ao final deste módulo, o estudante deverá ser capaz de:

- 1) compreender a ideia de lugar geométrico;
- 2) definir circunferência como conjunto de pontos equidistantes de um ponto fixo;
- 3) diferenciar circunferência e círculo;
- 4) identificar centro, raio, diâmetro, corda, arco, secante e tangente;
- 5) construir circunferências usando compasso;
- 6) reconhecer pontos interiores, exteriores e pertencentes à circunferência;
- 7) interpretar a circunferência em situações do cotidiano;
- 8) resolver problemas envolvendo distância fixa a um ponto;
- 9) representar circunferências no plano cartesiano em casos simples;
- 10) relacionar raio, diâmetro e distância ao centro;
- 11) compreender a circunferência como fronteira de uma região circular.

Sumário

1	Ideia central do capítulo	3
2	Lugar geométrico	3
3	Circunferência	4
4	Circunferência e círculo	5
5	Raio e diâmetro	5
6	Corda, arco, secante e tangente	7
7	Pontos interiores, exteriores e pertencentes	7
8	Construção de uma circunferência com compasso	9

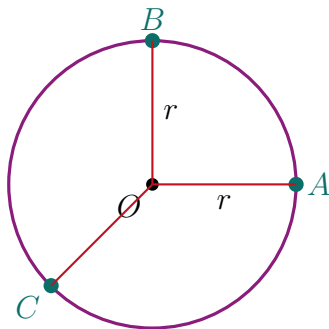
9	Circunferência no plano cartesiano	9
10	Circunferência como lugar geométrico em problemas	12
11	Interseções com circunferências	12
12	Posição de uma reta em relação à circunferência	13
13	Fluxograma de identificação	14
14	Erros comuns	15
15	Exercícios de fixação	15
16	Correção comentada	16
17	Lista extra de treino	20
18	Síntese final	21

1 Ideia central do capítulo

Imagine um ponto fixo O no plano.

Agora, imagine todos os pontos que estão exatamente a 3 cm de O .

Esses pontos formam uma circunferência.



Os pontos A , B e C estão na circunferência porque todos estão à mesma distância do centro O .

Resumo essencial

A ideia central deste módulo é:

Circunferência é o conjunto dos pontos que estão à mesma distância de um ponto fixo.

O ponto fixo é chamado de centro.
A distância fixa é chamada de raio.

2 Lugar geométrico

Definição 2.1: Lugar geométrico

Um lugar geométrico é um conjunto de pontos que satisfazem uma determinada condição geométrica.

Exemplo

O conjunto dos pontos que estão a 5 cm de um ponto fixo O é uma circunferência de centro O e raio 5 cm.

Exemplo

O conjunto dos pontos que estão sobre uma mesma reta é uma reta.
Nesse caso, a condição é:

pertencer à reta.

Observação

A ideia de lugar geométrico é importante porque descreve uma figura por meio de uma propriedade, e não apenas por sua aparência.

Atenção

Um lugar geométrico não é necessariamente uma figura cheia. Pode ser uma linha, uma curva, uma região ou um conjunto de pontos.

3 Circunferência

Definição 3.1: Circunferência

Circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano que estão a uma mesma distância de um ponto fixo chamado centro.

Definição 3.2: Centro

O centro de uma circunferência é o ponto fixo que está à mesma distância de todos os pontos da circunferência.

Definição 3.3: Raio

O raio de uma circunferência é a distância entre o centro e qualquer ponto da circunferência.

Notação

Se o centro é O e um ponto da circunferência é A , então o segmento:

$$\overline{OA}$$

é um raio da circunferência.

Exemplo

Se uma circunferência tem centro O e raio 4 cm, então todo ponto da circunferência está a 4 cm de O .

Teorema 3.1: Caracterização da circunferência

Um ponto P pertence à circunferência de centro O e raio r se, e somente se, a distância entre P e O é igual a r .

Em símbolos:

$$P \text{ pertence à circunferência} \iff OP = r.$$

Observação

A expressão “se, e somente se” significa que as duas afirmações são equivalentes:

- se P está na circunferência, então $OP = r$;

- se $OP = r$, então P está na circunferência.

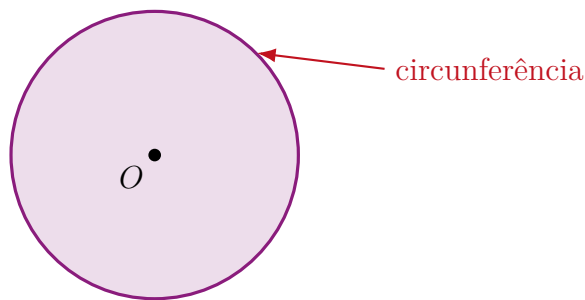
4 Circunferência e círculo

Definição 4.1: Círculo

Círculo é a região plana formada por todos os pontos que estão na circunferência ou no interior dela.

Definição 4.2: Circunferência como fronteira

A circunferência é a linha que delimita o círculo, isto é, sua fronteira.



círculo = região interna + fronteira

Atenção

Circunferência e círculo não são a mesma coisa.

Circunferência é a linha.

Círculo é a região.

Exemplo

A borda de uma moeda lembra uma circunferência.
A superfície inteira da moeda lembra um círculo.

5 Raio e diâmetro

Definição 5.1: Diâmetro

O diâmetro de uma circunferência é um segmento que passa pelo centro e liga dois pontos da circunferência.

Teorema 5.1: Relação entre diâmetro e raio

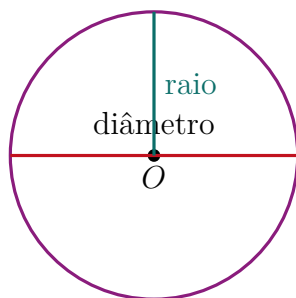
O diâmetro de uma circunferência mede o dobro do raio.

Se d é o diâmetro e r é o raio, então:

$$d = 2r.$$

Também podemos escrever:

$$r = \frac{d}{2}.$$



Exemplo

Se o raio de uma circunferência é 6 cm, então seu diâmetro é:

$$d = 2r.$$

$$d = 2 \cdot 6 = 12.$$

Logo:

$$d = 12 \text{ cm.}$$

Exemplo

Se o diâmetro de uma circunferência é 18 cm, então seu raio é:

$$r = \frac{d}{2}.$$

$$r = \frac{18}{2} = 9.$$

Logo:

$$r = 9 \text{ cm.}$$

Observação

Todos os raios de uma mesma circunferência têm a mesma medida.

6 Corda, arco, secante e tangente

Definição 6.1: Corda

Uma corda é um segmento que liga dois pontos da circunferência.

Definição 6.2: Arco

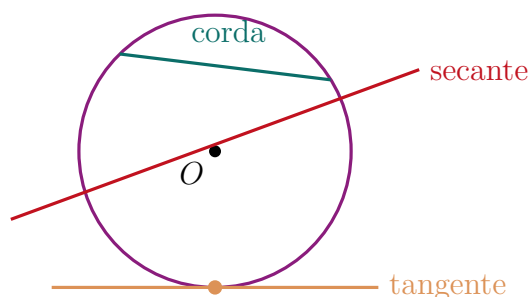
Um arco é uma parte da circunferência compreendida entre dois pontos dela.

Definição 6.3: Reta secante

Uma reta secante é uma reta que intersecta uma circunferência em dois pontos distintos.

Definição 6.4: Reta tangente

Uma reta tangente é uma reta que toca a circunferência em exatamente um ponto.



Observação

O diâmetro é uma corda especial, pois passa pelo centro da circunferência.

Teorema 6.1: Maior corda

O diâmetro é a maior corda de uma circunferência.

Exemplo

Em uma circunferência de raio 5 cm, o diâmetro mede:

$$2 \cdot 5 = 10 \text{ cm.}$$

Portanto, a maior corda dessa circunferência mede:

10 cm.

7 Pontos interiores, exteriores e pertencentes

Considere uma circunferência de centro O e raio r .

Um ponto do plano pode estar:

- dentro da circunferência;

- sobre a circunferência;
- fora da circunferência.

Definição 7.1: Ponto interior

Um ponto P é interior à circunferência quando sua distância ao centro é menor que o raio.

$$OP < r.$$

Definição 7.2: Ponto pertencente à circunferência

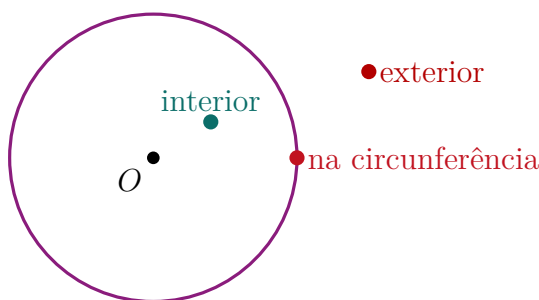
Um ponto P pertence à circunferência quando sua distância ao centro é igual ao raio.

$$OP = r.$$

Definição 7.3: Ponto exterior

Um ponto P é exterior à circunferência quando sua distância ao centro é maior que o raio.

$$OP > r.$$



Resumo essencial

Para uma circunferência de centro O e raio r :

$$OP < r \Rightarrow P \text{ é interior.}$$

$$OP = r \Rightarrow P \text{ pertence à circunferência.}$$

$$OP > r \Rightarrow P \text{ é exterior.}$$

Exemplo

Uma circunferência tem centro O e raio 8 cm.

Classifique os pontos:

$$A, \quad B, \quad C$$

sabendo que:

$$OA = 5 \text{ cm}, \quad OB = 8 \text{ cm}, \quad OC = 11 \text{ cm}.$$

Como:

$$OA = 5 < 8,$$

o ponto A é interior.

Como:

$$OB = 8,$$

o ponto B pertence à circunferência.

Como:

$$OC = 11 > 8,$$

o ponto C é exterior.

8 Construção de uma circunferência com compasso

Método

Para construir uma circunferência com compasso:

- 1) marque o centro O ;
- 2) escolha a abertura do compasso, que será o raio;
- 3) fixe a ponta seca do compasso no centro;
- 4) gire o compasso mantendo a abertura;
- 5) a curva desenhada será a circunferência.

Exemplo

Para construir uma circunferência de centro O e raio 3 cm:

- 1) marque o ponto O ;
- 2) abra o compasso com 3 cm;
- 3) apoie a ponta seca em O ;
- 4) trace a circunferência.

Observação

O compasso é o instrumento geométrico associado diretamente à ideia de circunferência, pois mantém a distância fixa ao centro durante o traçado.

9 Circunferência no plano cartesiano

No plano cartesiano, também podemos descrever uma circunferência usando coordenadas.

Definição 9.1: Circunferência no plano cartesiano

Uma circunferência no plano cartesiano pode ser descrita como o conjunto dos pontos que estão a uma distância fixa r de um centro.

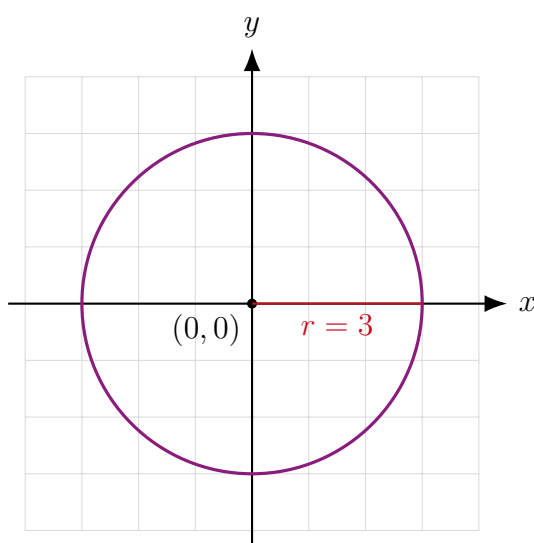
Teorema 9.1: Circunferência com centro na origem

A circunferência de centro na origem $(0,0)$ e raio r é formada pelos pontos (x,y) que satisfazem:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Observação

Essa relação vem da ideia de distância até a origem e do Teorema de Pitágoras.



Exemplo

A circunferência de centro $(0,0)$ e raio 3 satisfaz:

$$x^2 + y^2 = 3^2.$$

Logo:

$$x^2 + y^2 = 9.$$

Exemplo

Verifique se o ponto:

$$P = (3, 4)$$

pertence à circunferência:

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Substituimos $x = 3$ e $y = 4$:

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25.$$

Como o resultado é 25, o ponto pertence à circunferência.

Exemplo

Verifique se o ponto:

$$Q = (2, 2)$$

pertence à circunferência:

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Substituindo:

$$2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8.$$

Como:

$$8 \neq 25,$$

o ponto não pertence à circunferência.

Teorema 9.2: Circunferência com centro qualquer

A circunferência de centro (a, b) e raio r é formada pelos pontos (x, y) que satisfazem:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Exemplo

A circunferência de centro:

$$C = (2, 1)$$

e raio 4 é descrita por:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 16.$$

Observação

Esta última forma será aprofundada em anos posteriores. Neste momento, o mais importante é compreender que ela descreve todos os pontos que estão à distância r do centro (a, b) .

10 Circunferência como lugar geométrico em problemas

Exemplo

Uma antena de rádio alcança todos os pontos que estão a até 10 km dela.
A fronteira da região de alcance é uma circunferência de centro na antena e raio 10 km.
A região alcançada é o círculo de raio 10 km.

Exemplo

Uma pessoa combina de encontrar um amigo em um local que esteja exatamente a 2 km de uma praça.
Todos os possíveis pontos de encontro formam uma circunferência de centro na praça e raio 2 km.

Exemplo

Um cachorro está preso por uma corrente de 4 m a uma estaca.
Se a corrente puder girar livremente, a região que o cachorro pode alcançar é um círculo de raio 4 m.
A maior distância possível da estaca forma a circunferência de raio 4 m.

Atenção

A frase:

“a exatamente 4 m do ponto O ”

representa uma circunferência.

A frase:

“a no máximo 4 m do ponto O ”

representa um círculo.

11 Interseções com circunferências

Definição 11.1: Interseção

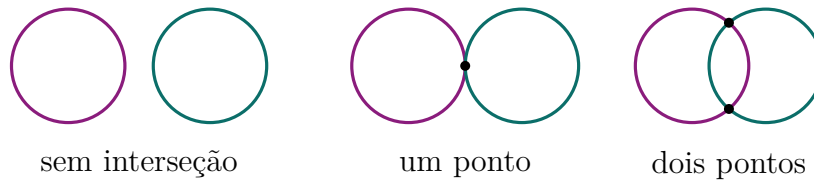
A interseção entre duas figuras é o conjunto de pontos que pertencem às duas figuras ao mesmo tempo.

Exemplo

Duas circunferências podem:

- não ter pontos em comum;
- ter exatamente um ponto em comum;
- ter dois pontos em comum;

- coincidir completamente.



Observação

Quando duas circunferências têm exatamente um ponto em comum, dizemos que elas são tangentes.

12 Posição de uma reta em relação à circunferência

Definição 12.1: Reta exterior

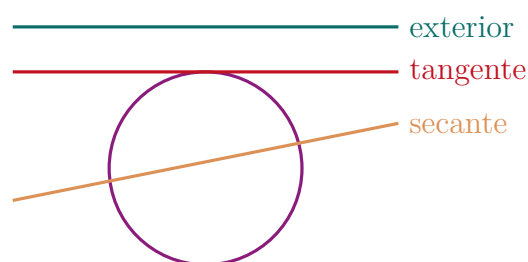
Uma reta é exterior a uma circunferência quando não possui nenhum ponto em comum com ela.

Definição 12.2: Reta tangente

Uma reta é tangente a uma circunferência quando possui exatamente um ponto em comum com ela.

Definição 12.3: Reta secante

Uma reta é secante a uma circunferência quando possui dois pontos em comum com ela.

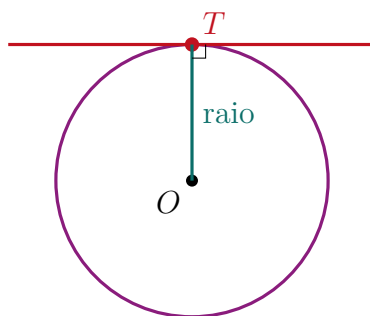


Observação

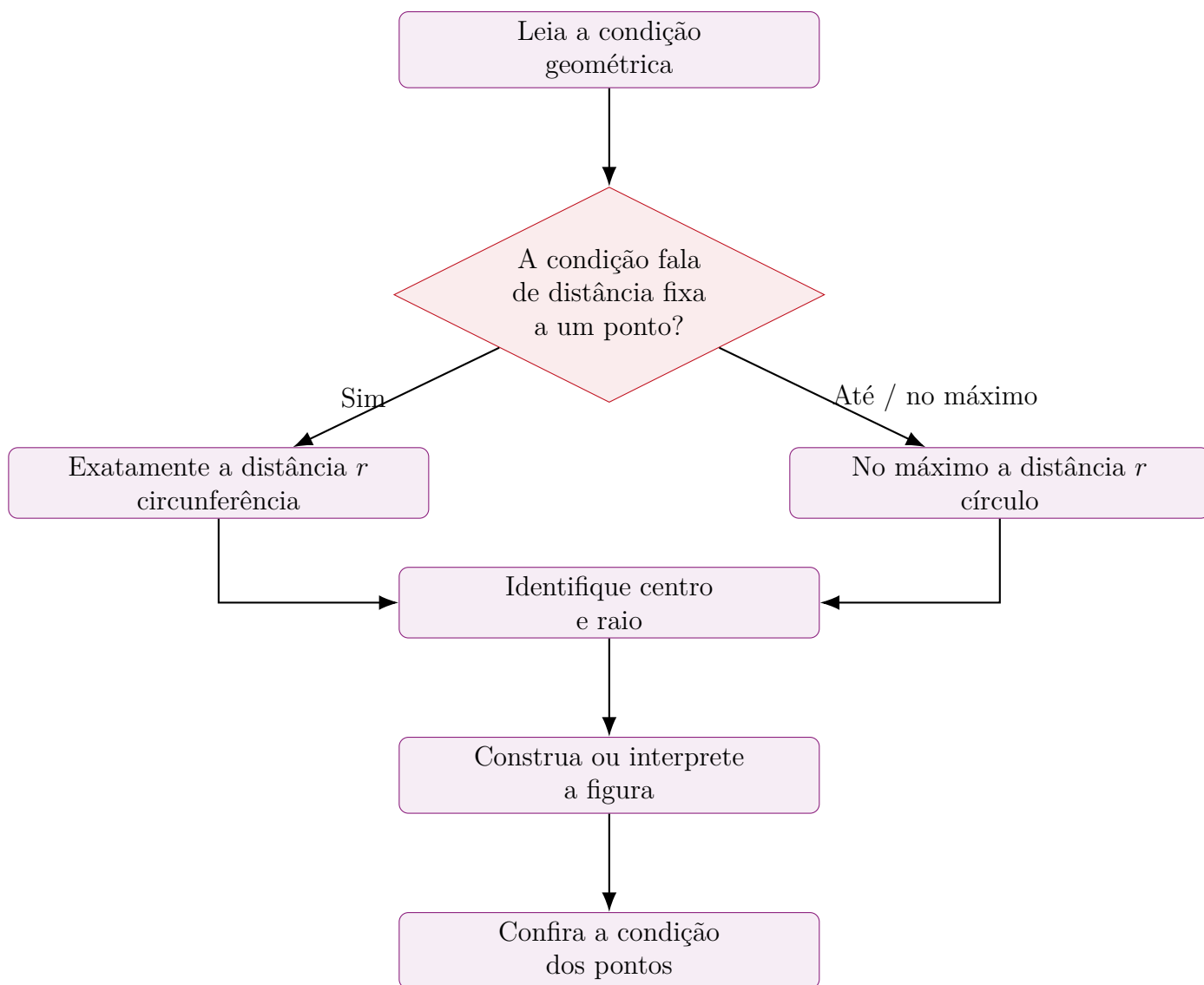
A reta tangente toca a circunferência em um único ponto. Esse ponto é chamado de ponto de tangência.

Teorema 12.1: Raio e tangente

O raio traçado até o ponto de tangência é perpendicular à reta tangente.



13 Fluxograma de identificação



14 Erros comuns

Atenção

Erro 1: Confundir circunferência com círculo.

Circunferência é apenas a linha.

Círculo é a região interna junto com a circunferência.

Atenção

Erro 2: Achar que o raio é sempre vertical ou horizontal.

O raio pode estar em qualquer direção, desde que ligue o centro a um ponto da circunferência.

Atenção

Erro 3: Confundir raio com diâmetro.

O raio vai do centro até a circunferência.

O diâmetro vai de um ponto da circunferência a outro, passando pelo centro.

$$d = 2r.$$

Atenção

Erro 4: Dizer que um ponto interior pertence à circunferência.

Um ponto interior pertence ao círculo, mas não pertence à circunferência.

Para pertencer à circunferência, a distância ao centro deve ser exatamente igual ao raio.

Atenção

Erro 5: Interpretar “até r metros” como circunferência.

A expressão “até r metros” indica região, ou seja, círculo.

A expressão “exatamente r metros” indica circunferência.

15 Exercícios de fixação

Exercício 1

Explique, com suas palavras, o que é um lugar geométrico.

Exercício 2

Complete:

A circunferência é o conjunto dos pontos de um plano que estão à mesma distância de um ponto fixo chamado _____.

Essa distância fixa é chamada de _____.

Exercício 3

Diferencie circunferência e círculo.

Exercício 4

Uma circunferência tem raio 7 cm. Determine seu diâmetro.

Exercício 5

Uma circunferência tem diâmetro 24 cm. Determine seu raio.

Exercício 6

Uma circunferência tem centro O e raio 10 cm. Classifique os pontos A , B e C , sabendo que:

$$OA = 6 \text{ cm}, \quad OB = 10 \text{ cm}, \quad OC = 13 \text{ cm}.$$

Exercício 7

Diga se cada frase representa uma circunferência ou um círculo.

- a) Pontos que estão exatamente a 5 cm de O .
- b) Pontos que estão a no máximo 5 cm de O .
- c) Pontos cuja distância a O é menor ou igual a 8 m.
- d) Pontos cuja distância a O é igual a 3 km.

Exercício 8

Verifique se o ponto $P = (3, 4)$ pertence à circunferência:

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Exercício 9

Verifique se o ponto $Q = (1, 2)$ pertence à circunferência:

$$x^2 + y^2 = 9.$$

Exercício 10

Uma praça é representada por um ponto O . Todos os pontos que estão exatamente a 2 km da praça formam que figura geométrica?

16 Correção comentada

Correção comentada

Exercício 1.

Um lugar geométrico é um conjunto de pontos que satisfazem uma mesma condição geométrica.

Por exemplo, o conjunto dos pontos que estão exatamente a 4 cm de um ponto fixo

forma uma circunferência.

Correção comentada

Exercício 2.

A circunferência é o conjunto dos pontos de um plano que estão à mesma distância de um ponto fixo chamado **centro**.

Essa distância fixa é chamada de **raio**.

Correção comentada

Exercício 3.

A circunferência é apenas a linha formada pelos pontos que estão à mesma distância do centro.

O círculo é a região formada pela circunferência e todos os pontos internos a ela.

Portanto:

$$\text{circunferência} = \text{linha}$$

e

$$\text{círculo} = \text{região}.$$

Correção comentada

Exercício 4.

O diâmetro é o dobro do raio:

$$d = 2r.$$

Como:

$$r = 7,$$

temos:

$$d = 2 \cdot 7 = 14.$$

Logo:

$$14 \text{ cm.}$$

Correção comentada

Exercício 5.

O raio é a metade do diâmetro:

$$r = \frac{d}{2}.$$

Como:

$$d = 24,$$

temos:

$$r = \frac{24}{2} = 12.$$

Logo:

$$\boxed{12 \text{ cm.}}$$

Correção comentada

Exercício 6.

A circunferência tem raio:

$$r = 10 \text{ cm.}$$

Como:

$$OA = 6 < 10,$$

o ponto A é interior.

Como:

$$OB = 10,$$

o ponto B pertence à circunferência.

Como:

$$OC = 13 > 10,$$

o ponto C é exterior.

Logo:

$$\boxed{A \text{ é interior, } B \text{ pertence à circunferência, } C \text{ é exterior.}}$$

Correção comentada

Exercício 7.

- a) Pontos exatamente a 5 cm de O : circunferência.
- b) Pontos a no máximo 5 cm de O : círculo.
- c) Pontos cuja distância a O é menor ou igual a 8 m: círculo.
- d) Pontos cuja distância a O é igual a 3 km: circunferência.

Correção comentada

Exercício 8.

A circunferência é:

$$x^2 + y^2 = 25.$$

O ponto é:

$$P = (3, 4).$$

Substituímos:

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25.$$

Como o resultado é igual a 25, o ponto pertence à circunferência.

Logo:

$$P = (3, 4) \text{ pertence à circunferência.}$$

Correção comentada

Exercício 9.

A circunferência é:

$$x^2 + y^2 = 9.$$

O ponto é:

$$Q = (1, 2).$$

Substituímos:

$$1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5.$$

Como:

$$5 \neq 9,$$

o ponto não pertence à circunferência.

Logo:

$$Q = (1, 2) \text{ não pertence à circunferência.}$$

Correção comentada

Exercício 10.

Os pontos que estão exatamente a 2 km da praça estão a uma distância fixa de um ponto fixo O .

Portanto, formam uma circunferência de centro O e raio 2 km.

Logo:

$$\text{circunferência.}$$

17 Lista extra de treino

Exercício 11

Uma circunferência tem raio 15 cm. Determine seu diâmetro.

Exercício 12

Uma circunferência tem diâmetro 9 m. Determine seu raio.

Exercício 13

Uma circunferência tem centro C e raio 12 cm. Classifique os pontos P , Q e R , sabendo que:

$$CP = 12 \text{ cm}, \quad CQ = 9 \text{ cm}, \quad CR = 15 \text{ cm}.$$

Exercício 14

Diga se cada objeto lembra mais uma circunferência ou um círculo.

- a) A borda de uma roda.
- b) A superfície de uma pizza.
- c) O contorno de um prato.
- d) A região de um disco.

Exercício 15

Verifique se $A = (0, 5)$ pertence à circunferência:

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Exercício 16

Verifique se $B = (2, 3)$ pertence à circunferência:

$$x^2 + y^2 = 13.$$

Exercício 17

Escreva a equação da circunferência de centro na origem e raio 6.

Exercício 18

Escreva a equação da circunferência de centro na origem e raio 10.

Exercício 19

Uma pessoa deve ficar a exatamente 4 m de uma árvore. Que lugar geométrico representa todos os possíveis locais onde ela pode ficar?

Exercício 20

Uma câmera de segurança alcança todos os pontos a no máximo 6 m dela. A região de alcance representa uma circunferência ou um círculo? Explique.

18 Síntese final

Resumo essencial

1. Lugar geométrico

É um conjunto de pontos que satisfazem uma condição geométrica.

2. Circunferência

É o conjunto dos pontos que estão à mesma distância de um ponto fixo.

3. Centro

É o ponto fixo da circunferência.

4. Raio

É a distância do centro a qualquer ponto da circunferência.

$$OP = r.$$

5. Círculo

É a região formada pela circunferência e seu interior.

6. Diferença essencial

circunferência = linha

círculo = região

7. Diâmetro

É a corda que passa pelo centro.

$$d = 2r.$$

8. Posição de um ponto

Para uma circunferência de centro O e raio r :

$$OP < r \Rightarrow \text{ponto interior.}$$

$$OP = r \Rightarrow \text{ponto na circunferência.}$$

$$OP > r \Rightarrow \text{ponto exterior.}$$

9. Circunferência no plano cartesiano

Centro na origem e raio r :

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Centro (a, b) e raio r :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

10. Ideia fundamental

Circunferência é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de um centro.

Fim do módulo

Circunferência como Lugar Geométrico