

Ângulos em Retas Paralelas Cortadas por Transversal

Curso de Matemática – 7º Ano

Objetivos da aula

Ao final deste módulo, o estudante deverá ser capaz de:

- 1) reconhecer retas paralelas e retas transversais;
- 2) identificar os ângulos formados por duas retas cortadas por uma transversal;
- 3) reconhecer ângulos opostos pelo vértice;
- 4) reconhecer ângulos adjacentes e suplementares;
- 5) identificar ângulos correspondentes;
- 6) identificar ângulos alternos internos;
- 7) identificar ângulos alternos externos;
- 8) identificar ângulos colaterais internos;
- 9) identificar ângulos colaterais externos;
- 10) aplicar as propriedades dos ângulos formados por retas paralelas cortadas por transversal;
- 11) resolver problemas envolvendo medidas angulares;
- 12) usar equações simples para determinar ângulos desconhecidos.

Sumário

1	Ideia central do capítulo	3
2	Retas paralelas e transversal	3
3	Ângulos formados pela transversal	4
4	Ângulos adjacentes e suplementares	5
5	Ângulos opostos pelo vértice	6
6	Ângulos correspondentes	6

7	Ângulos alternos internos	7
8	Ângulos alternos externos	8
9	Ângulos colaterais internos	9
10	Ângulos colaterais externos	10
11	Resumo das relações angulares	11
12	Resolução de problemas com medidas	12
13	Condição inversa	13
14	Fluxograma de identificação	14
15	Erros comuns	15
16	Exercícios de fixação	15
17	Correção comentada	16
18	Lista extra de treino	19
19	Síntese final	20

$$r \parallel s.$$

Exemplo

As linhas de um caderno, quando idealizadas como retas, podem ser vistas como paralelas.

Os trilhos de uma ferrovia reta também lembram retas paralelas.

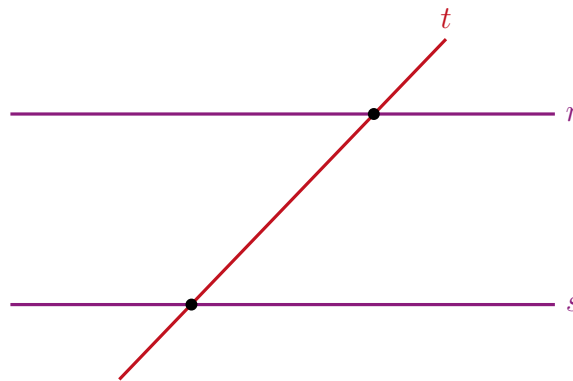
Definição 2.2: Reta transversal

Uma reta transversal é uma reta que intersecta duas ou mais retas em pontos distintos.

Exemplo

Na figura abaixo, r e s são paralelas, e t é uma transversal.

$$r \parallel s.$$

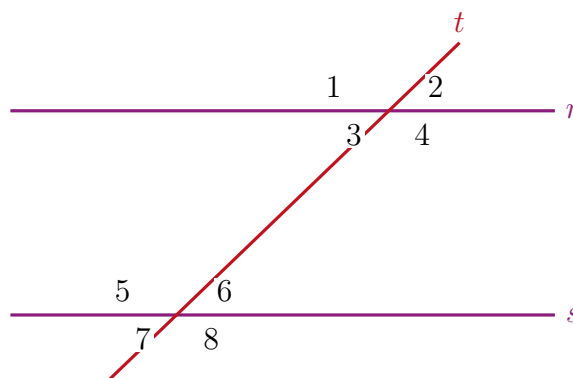


Observação

A transversal não precisa ser perpendicular às retas paralelas. Ela pode cortar as retas com qualquer inclinação.

3 Ângulos formados pela transversal

Quando uma transversal corta duas retas, formam-se 8 ângulos.



Observação

Os ângulos 1, 2, 3, 4 estão no ponto em que a transversal corta a reta r .
Os ângulos 5, 6, 7, 8 estão no ponto em que a transversal corta a reta s .

Definição 3.1: Região interna

A região interna é a região entre as duas retas paralelas.

Definição 3.2: Região externa

A região externa é formada pelas regiões que ficam fora das duas retas paralelas.

Exemplo

Na figura anterior, os ângulos 3, 4, 5, 6 são internos, pois estão entre as retas r e s .
Os ângulos 1, 2, 7, 8 são externos.

4 Ângulos adjacentes e suplementares

Definição 4.1: Ângulos adjacentes

Dois ângulos são adjacentes quando possuem o mesmo vértice, um lado comum e não possuem pontos internos em comum.

Definição 4.2: Ângulos suplementares

Dois ângulos são suplementares quando a soma de suas medidas é igual a:

$$180^\circ.$$

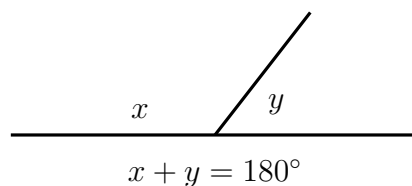
Exemplo

Se dois ângulos medem 120° e 60° , então são suplementares, pois:

$$120^\circ + 60^\circ = 180^\circ.$$

Teorema 4.1: Ângulos adjacentes sobre uma reta

Se dois ângulos adjacentes formam uma linha reta, então eles são suplementares.



Exemplo

Se dois ângulos adjacentes sobre uma reta são x e 65° , então:

$$x + 65^\circ = 180^\circ.$$

Logo:

$$x = 115^\circ.$$

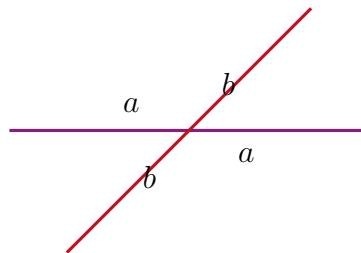
5 Ângulos opostos pelo vértice

Definição 5.1: Ângulos opostos pelo vértice

Dois ângulos são opostos pelo vértice quando são formados por duas retas que se cruzam e não são adjacentes.

Teorema 5.1: Ângulos opostos pelo vértice são congruentes

Ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida.



Exemplo

Se um ângulo mede 72° , então seu oposto pelo vértice também mede:

$$72^\circ.$$

Observação

Em retas paralelas cortadas por transversal, os ângulos opostos pelo vértice aparecem nos dois pontos de interseção.

6 Ângulos correspondentes

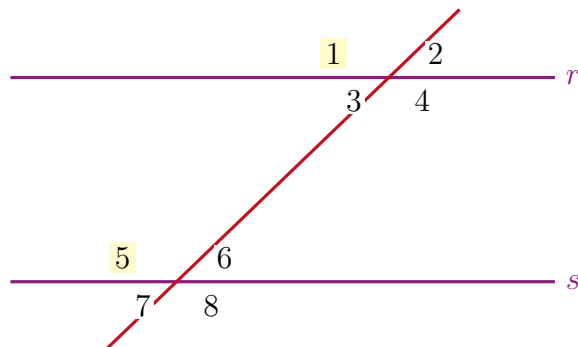
Definição 6.1: Ângulos correspondentes

Ângulos correspondentes são ângulos que ocupam a mesma posição relativa em cada interseção da transversal com as retas.

Exemplo

Na figura abaixo, os pares de ângulos correspondentes são:

1 e 5, 2 e 6, 3 e 7, 4 e 8.



Teorema 6.1: Correspondentes em retas paralelas

Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos correspondentes são congruentes.

Notação

Dizer que dois ângulos são congruentes significa dizer que eles têm a mesma medida. Se a e b são congruentes, podemos escrever:

$$a = b.$$

Exemplo

Se $r \parallel s$ e um ângulo correspondente mede 65° , então o outro ângulo correspondente também mede:

$$65^\circ.$$

7 Ângulos alternos internos

Definição 7.1: Ângulos alternos internos

Ângulos alternos internos são ângulos que:

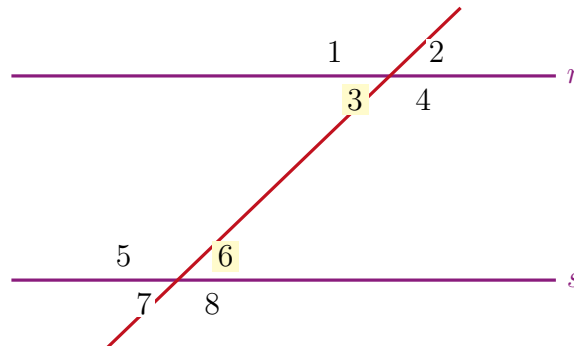
- ficam entre as duas retas;
- ficam em lados opostos da transversal.

Exemplo

Na figura, os pares de ângulos alternos internos são:

3 e 6,

4 e 5.



Teorema 7.1: Alternos internos em retas paralelas

Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternos internos são congruentes.

Exemplo

Se $r \parallel s$, e um ângulo alterno interno mede 110° , então o outro ângulo alterno interno correspondente também mede:

110° .

8 Ângulos alternos externos

Definição 8.1: Ângulos alternos externos

Ângulos alternos externos são ângulos que:

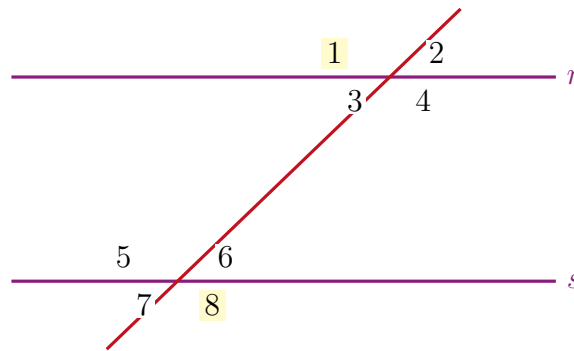
- ficam fora das duas retas;
- ficam em lados opostos da transversal.

Exemplo

Na figura, os pares de ângulos alternos externos são:

1 e 8,

2 e 7.



Teorema 8.1: Alternos externos em retas paralelas

Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternos externos são congruentes.

Exemplo

Se $r \parallel s$ e um ângulo alterno externo mede 38° , então o outro ângulo alterno externo correspondente mede:

38° .

9 Ângulos colaterais internos

Definição 9.1: Ângulos colaterais internos

Ângulos colaterais internos são ângulos que:

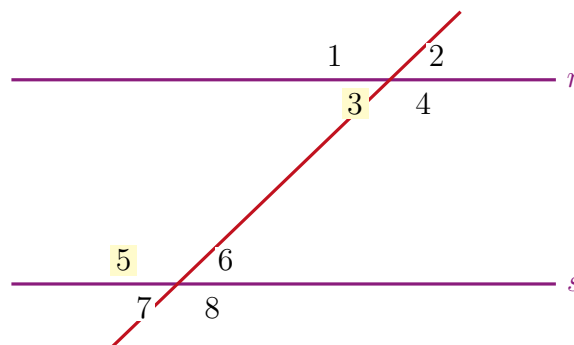
- ficam entre as duas retas;
- ficam do mesmo lado da transversal.

Exemplo

Na figura, os pares de ângulos colaterais internos são:

3 e 5,

4 e 6.



Teorema 9.1: Colaterais internos em retas paralelas

Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos colaterais internos são suplementares.

Notação

Se a e b são colaterais internos, então:

$$a + b = 180^\circ.$$

Exemplo

Se um ângulo colateral interno mede 125° , então o outro mede:

$$180^\circ - 125^\circ = 55^\circ.$$

Logo, o outro ângulo mede:

$$55^\circ.$$

10 Ângulos colaterais externos

Definição 10.1: Ângulos colaterais externos

Ângulos colaterais externos são ângulos que:

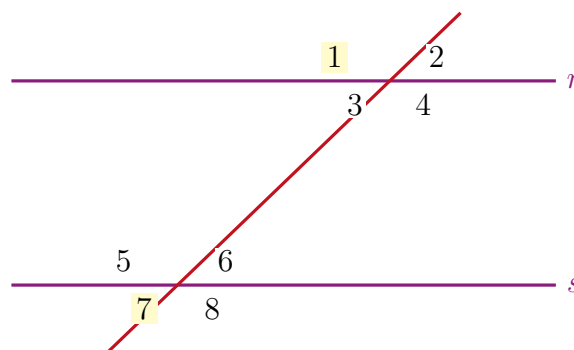
- ficam fora das duas retas;
- ficam do mesmo lado da transversal.

Exemplo

Na figura, os pares de ângulos colaterais externos são:

1 e 7,

2 e 8.



Teorema 10.1: Colaterais externos em retas paralelas

Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos colaterais externos são suplementares.

Exemplo

Se um ângulo colateral externo mede 40° , então o outro mede:

$$180^\circ - 40^\circ = 140^\circ.$$

Logo, o outro ângulo mede:

$$140^\circ.$$

11 Resumo das relações angulares

Tipo de ângulo	Posição	Relação
Correspondentes	mesma posição relativa	congruentes
Alternos internos	internos e lados opostos	congruentes
Alternos externos	externos e lados opostos	congruentes
Colaterais internos	internos e mesmo lado	suplementares
Colaterais externos	externos e mesmo lado	suplementares
Opostos pelo vértice	opostos no cruzamento	congruentes
Adjacentes sobre reta	lado a lado numa reta	suplementares

Resumo essencial

Quando $r \parallel s$:

correspondentes $\Rightarrow$ iguais.

alternos internos $\Rightarrow$ iguais.

alternos externos $\Rightarrow$ iguais.

colaterais internos $\Rightarrow$ soma 180° .

colaterais externos $\Rightarrow$ soma 180° .

12 Resolução de problemas com medidas

Método

Para resolver problemas com retas paralelas cortadas por transversal:

- 1) identifique se as retas são paralelas;
- 2) identifique a transversal;
- 3) classifique os ângulos envolvidos;
- 4) decida se eles são congruentes ou suplementares;
- 5) monte uma igualdade ou uma equação;
- 6) resolva;
- 7) verifique se a medida encontrada faz sentido.

Exemplo

Duas retas paralelas são cortadas por uma transversal. Um par de ângulos alternos internos mede $3x + 10^\circ$ e 70° . Determine x .

Como os ângulos alternos internos são congruentes:

$$3x + 10 = 70.$$

Subtraindo 10:

$$3x = 60.$$

Dividindo por 3:

$$x = 20.$$

Logo:

$$\boxed{x = 20.}$$

Exemplo

Dois ângulos colaterais internos medem $2x + 30^\circ$ e $x + 60^\circ$. Determine x .

Como colaterais internos são suplementares:

$$(2x + 30) + (x + 60) = 180.$$

Reduzindo:

$$3x + 90 = 180.$$

Subtraindo 90:

$$3x = 90.$$

Dividindo por 3:

$$x = 30.$$

Logo:

$$\boxed{x = 30.}$$

Exemplo

Se dois ângulos correspondentes medem $5x - 20^\circ$ e $2x + 40^\circ$, determine x .
Como são correspondentes:

$$5x - 20 = 2x + 40.$$

Subtraindo $2x$:

$$3x - 20 = 40.$$

Somando 20:

$$3x = 60.$$

Dividindo por 3:

$$x = 20.$$

Logo:

$$\boxed{x = 20.}$$

13 Condição inversa

Teorema 13.1: Condição inversa dos correspondentes

Se duas retas cortadas por uma transversal formam ângulos correspondentes congruentes, então as duas retas são paralelas.

Teorema 13.2: Condição inversa dos alternos internos

Se duas retas cortadas por uma transversal formam ângulos alternos internos congruentes, então as duas retas são paralelas.

Teorema 13.3: Condição inversa dos colaterais internos

Se duas retas cortadas por uma transversal formam ângulos colaterais internos suplementares, então as duas retas são paralelas.

Observação

Essas condições são usadas para provar que duas retas são paralelas.

Exemplo

Se duas retas cortadas por uma transversal formam ângulos correspondentes de 80° e 80° , então essas retas são paralelas.

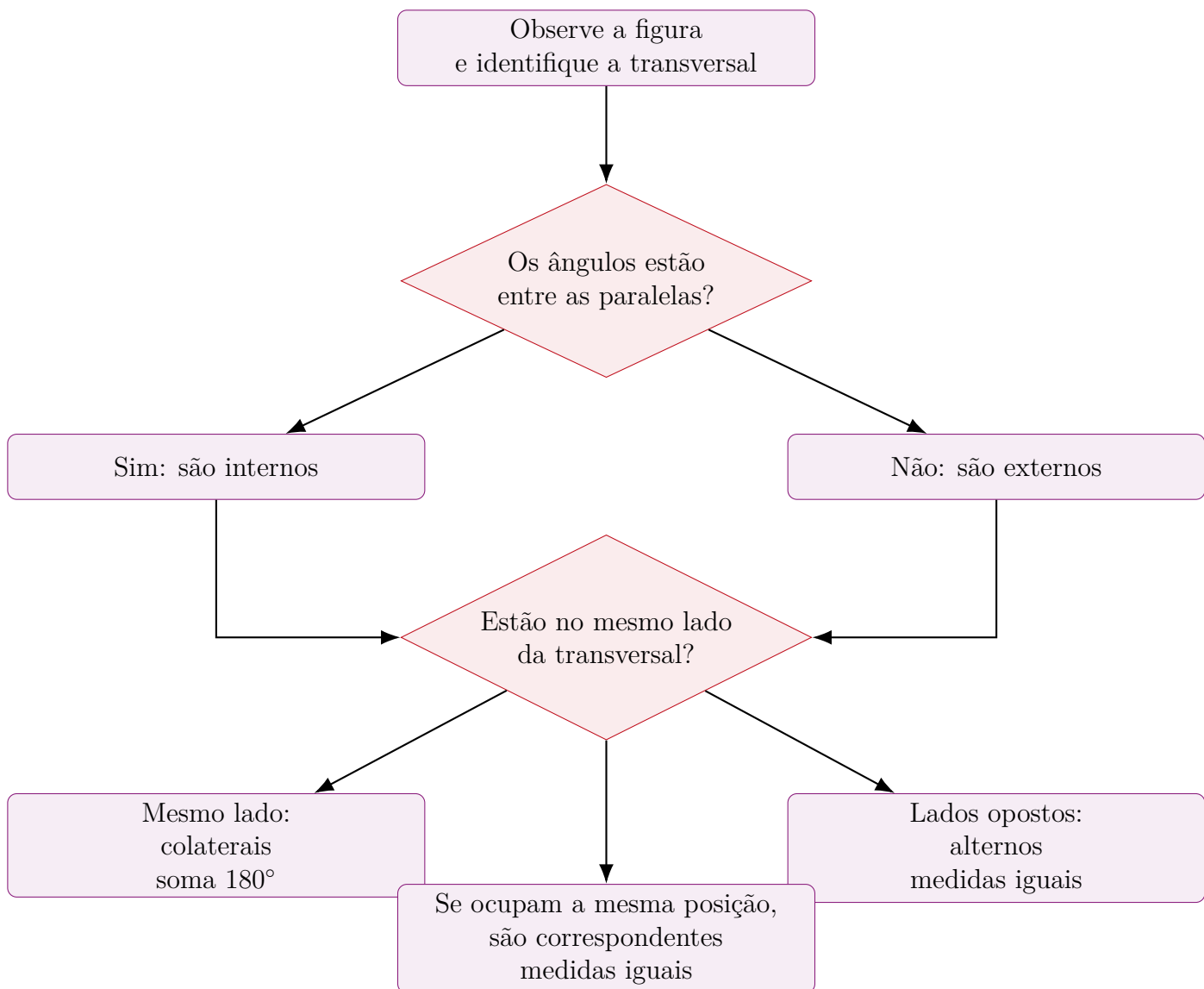
Exemplo

Se dois ângulos colaterais internos medem 115° e 65° , então:

$$115^\circ + 65^\circ = 180^\circ.$$

Logo, as retas são paralelas.

14 Fluxograma de identificação



15 Erros comuns

Atenção

Erro 1: Achar que todos os ângulos são iguais.

Nem todos os 8 ângulos formados são iguais. Alguns são congruentes, outros são suplementares.

Atenção

Erro 2: Confundir alternos internos com colaterais internos.

Alternos internos ficam em lados opostos da transversal e são congruentes.

Colaterais internos ficam no mesmo lado da transversal e são suplementares.

Atenção

Erro 3: Esquecer que colaterais somam 180° .

Se dois ângulos colaterais internos medem x e 120° , então:

$$x + 120^\circ = 180^\circ.$$

Logo:

$$x = 60^\circ.$$

Atenção

Erro 4: Usar as propriedades sem saber se as retas são paralelas.

As propriedades de correspondentes, alternos e colaterais dependem da condição:

$$r \parallel s.$$

Atenção

Erro 5: Confundir ângulos opostos pelo vértice com alternos.

Ângulos opostos pelo vértice aparecem no mesmo ponto de interseção.

Ângulos alternos aparecem em interseções diferentes.

16 Exercícios de fixação

Exercício 1

Defina reta transversal.

Exercício 2

Explique a diferença entre ângulos internos e ângulos externos em duas retas cortadas por uma transversal.

Exercício 3

Complete:

- a) Ângulos correspondentes em retas paralelas são _____.
- b) Ângulos alternos internos em retas paralelas são _____.
- c) Ângulos colaterais internos em retas paralelas são _____.

Exercício 4

Se dois ângulos correspondentes medem x e 75° , determine x .

Exercício 5

Se dois ângulos alternos internos medem $2x + 10^\circ$ e 90° , determine x .

Exercício 6

Se dois ângulos colaterais internos medem x e 115° , determine x .

Exercício 7

Se dois ângulos colaterais externos medem $3x$ e 60° , determine x .

Exercício 8

Dois ângulos alternos externos medem $5x - 20^\circ$ e $2x + 40^\circ$. Determine x .

Exercício 9

Dois ângulos colaterais internos medem $4x + 10^\circ$ e $2x + 50^\circ$. Determine x .

Exercício 10

Duas retas cortadas por uma transversal formam ângulos correspondentes de 68° e 68° .
O que podemos concluir sobre as retas?

17 Correção comentada

Correção comentada

Exercício 1.

Uma reta transversal é uma reta que intersecta duas ou mais retas em pontos distintos. No caso estudado neste módulo, a transversal corta duas retas paralelas e forma 8 ângulos.

Correção comentada

Exercício 2.

Os ângulos internos são aqueles que ficam entre as duas retas.

Os ângulos externos são aqueles que ficam fora da região entre as duas retas.

Assim, se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal:

- internos ficam na região entre as paralelas;
- externos ficam acima da reta superior ou abaixo da reta inferior.

Correção comentada

Exercício 3.

- Ângulos correspondentes em retas paralelas são **congruentes**.
- Ângulos alternos internos em retas paralelas são **congruentes**.
- Ângulos colaterais internos em retas paralelas são **suplementares**.

Correção comentada

Exercício 4.

Ângulos correspondentes em retas paralelas são congruentes.

Logo:

$$x = 75^\circ.$$

Portanto:

$$x = 75^\circ.$$

Correção comentada

Exercício 5.

Ângulos alternos internos em retas paralelas são congruentes.

Então:

$$2x + 10 = 90.$$

Subtraindo 10:

$$2x = 80.$$

Dividindo por 2:

$$x = 40.$$

Logo:

$$x = 40.$$

Correção comentada

Exercício 6.

Ângulos colaterais internos são suplementares.

Logo:

$$x + 115 = 180.$$

Subtraindo 115:

$$x = 65.$$

Portanto:

$$\boxed{x = 65^\circ.}$$

Correção comentada

Exercício 7.

Ângulos colaterais externos são suplementares.

Então:

$$3x + 60 = 180.$$

Subtraindo 60:

$$3x = 120.$$

Dividindo por 3:

$$x = 40.$$

Logo:

$$\boxed{x = 40.}$$

Correção comentada

Exercício 8.

Ângulos alternos externos são congruentes.

Então:

$$5x - 20 = 2x + 40.$$

Subtraindo $2x$:

$$3x - 20 = 40.$$

Somando 20:

$$3x = 60.$$

Dividindo por 3:

$$x = 20.$$

Logo:

$$x = 20.$$

Correção comentada

Exercício 9.

Ângulos colaterais internos são suplementares.

Então:

$$(4x + 10) + (2x + 50) = 180.$$

Reduzindo:

$$6x + 60 = 180.$$

Subtraindo 60:

$$6x = 120.$$

Dividindo por 6:

$$x = 20.$$

Logo:

$$x = 20.$$

Correção comentada

Exercício 10.

Se duas retas cortadas por uma transversal formam ângulos correspondentes congruentes, então as retas são paralelas.

Como os ângulos correspondentes medem:

$$68^\circ \text{ e } 68^\circ,$$

eles são congruentes.

Portanto, podemos concluir que:

$$\boxed{\text{as retas são paralelas.}}$$

18 Lista extra de treino

Exercício 11

Dois ângulos correspondentes medem $3x + 5^\circ$ e 80° . Determine x .

Exercício 12

Dois ângulos alternos internos medem $4x - 12^\circ$ e $2x + 30^\circ$. Determine x .

Exercício 13

Dois ângulos colaterais internos medem $x + 35^\circ$ e $2x + 25^\circ$. Determine x .

Exercício 14

Dois ângulos colaterais externos medem $5x$ e $2x + 40^\circ$. Determine x .

Exercício 15

Um ângulo mede 72° . Determine a medida de seu oposto pelo vértice.

Exercício 16

Dois ângulos adjacentes sobre uma reta medem x e 128° . Determine x .

Exercício 17

Se dois ângulos alternos internos medem 50° e 50° , o que podemos concluir sobre as retas cortadas pela transversal?

Exercício 18

Se dois ângulos colaterais internos medem 110° e 70° , o que podemos concluir sobre as retas cortadas pela transversal?

Exercício 19

Explique a diferença entre ângulos alternos internos e ângulos alternos externos.

Exercício 20

Explique a diferença entre ângulos correspondentes e ângulos opostos pelo vértice.

19 Síntese final

Resumo essencial

1. Retas paralelas

$$r \parallel s.$$

São retas coplanares que não se intersectam.

2. Transversal

É uma reta que corta duas ou mais retas.

3. Ângulos internos

Ficam entre as duas retas.

4. Ângulos externos

Ficam fora da região entre as duas retas.

5. Correspondentes

Ocupam a mesma posição relativa.

correspondentes $\Rightarrow$ congruentes.

6. Alternos internos

Ficam entre as retas e em lados opostos da transversal.

alternos internos $\Rightarrow$ congruentes.

7. Alternos externos

Ficam fora das retas e em lados opostos da transversal.

alternos externos $\Rightarrow$ congruentes.

8. Colaterais internos

Ficam entre as retas e no mesmo lado da transversal.

colaterais internos $\Rightarrow$ suplementares.

9. Colaterais externos

Ficam fora das retas e no mesmo lado da transversal.

colaterais externos $\Rightarrow$ suplementares.

10. Opostos pelo vértice

São sempre congruentes.

11. Ângulos suplementares

Somam:

180° .

12. Ideia fundamental

Quando duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, os ângulos formados obedecem a relações fixas de igualdade ou soma 180° .

Fim do módulo

Ângulos em Retas Paralelas Cortadas por Transversal