

# Proporcionalidade Direta e Inversa

Curso de Matemática – 7º Ano

## Objetivos da aula

Ao final deste módulo, o estudante deverá ser capaz de:

- 1) compreender o conceito de grandeza;
- 2) compreender razão e proporção;
- 3) reconhecer situações de proporcionalidade direta;
- 4) reconhecer situações de proporcionalidade inversa;
- 5) identificar a constante de proporcionalidade;
- 6) completar tabelas proporcionais;
- 7) resolver problemas por multiplicação, divisão e regra de três;
- 8) diferenciar problemas diretamente proporcionais de problemas inversamente proporcionais;
- 9) interpretar proporcionalidade em escalas, preços, velocidades, tempo, produção e consumo;
- 10) construir sentenças algébricas simples para representar relações proporcionais.

## Sumário

|          |                                                 |           |
|----------|-------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Ideia central do capítulo</b>                | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Grandezas</b>                                | <b>3</b>  |
| <b>3</b> | <b>Razão</b>                                    | <b>4</b>  |
| <b>4</b> | <b>Proporção</b>                                | <b>5</b>  |
| <b>5</b> | <b>Proporcionalidade direta</b>                 | <b>7</b>  |
| <b>6</b> | <b>Como reconhecer proporcionalidade direta</b> | <b>9</b>  |
| <b>7</b> | <b>Regra de três simples direta</b>             | <b>11</b> |
| <b>8</b> | <b>Proporcionalidade inversa</b>                | <b>12</b> |

|           |                                                  |           |
|-----------|--------------------------------------------------|-----------|
| <b>9</b>  | <b>Como reconhecer proporcionalidade inversa</b> | <b>14</b> |
| <b>10</b> | <b>Regra de três simples inversa</b>             | <b>15</b> |
| <b>11</b> | <b>Direta ou inversa? Como decidir</b>           | <b>17</b> |
| <b>12</b> | <b>Escalas e proporcionalidade</b>               | <b>18</b> |
| <b>13</b> | <b>Gráficos e proporcionalidade</b>              | <b>19</b> |
| <b>14</b> | <b>Problemas contextualizados</b>                | <b>21</b> |
| 14.1      | Preço e quantidade . . . . .                     | 21        |
| 14.2      | Receitas . . . . .                               | 21        |
| 14.3      | Trabalho e tempo . . . . .                       | 22        |
| 14.4      | Velocidade e tempo . . . . .                     | 22        |
| <b>15</b> | <b>Fluxograma de decisão</b>                     | <b>23</b> |
| <b>16</b> | <b>Erros comuns</b>                              | <b>23</b> |
| <b>17</b> | <b>Exercícios de fixação</b>                     | <b>24</b> |
| <b>18</b> | <b>Correção comentada</b>                        | <b>26</b> |
| <b>19</b> | <b>Lista extra de treino</b>                     | <b>31</b> |
| <b>20</b> | <b>Síntese final</b>                             | <b>32</b> |

# 1 Ideia central do capítulo

Muitas situações do cotidiano envolvem quantidades que se relacionam.

Por exemplo:

- quanto mais cadernos compramos, maior é o preço total;
- quanto mais trabalhadores realizam uma tarefa, menor pode ser o tempo necessário;
- quanto maior a velocidade média, menor o tempo para percorrer a mesma distância;
- quanto maior a escala de ampliação, maior fica uma figura;
- quanto mais ingredientes usamos, maior será a quantidade de porções.

Essas relações podem ser estudadas com a ideia de proporcionalidade.

## Resumo essencial

A pergunta principal deste módulo é:

Quando duas grandezas variam de maneira proporcional?

Existem dois tipos fundamentais que estudaremos:

proporcionalidade direta

e

proporcionalidade inversa.

# 2 Grandezas

## Definição 2.1: Grandeza

Uma grandeza é tudo aquilo que pode ser medido, contado ou comparado numericamente.

## Exemplo

São exemplos de grandezas:

- tempo;
- distância;
- massa;
- preço;
- quantidade de produtos;
- velocidade;

- área;
- volume;
- número de pessoas;
- quantidade de alimento.

### Definição 2.2: Grandezas relacionadas

Duas grandezas estão relacionadas quando a mudança em uma delas influencia ou acompanha a mudança na outra.

#### Exemplo

Se cada pão custa R\$ 2,00, então o preço total depende da quantidade de pães comprados. As grandezas relacionadas são:

quantidade de pães

e

preço total.

#### Observação

Nem toda relação entre grandezas é proporcional. Para haver proporcionalidade, a relação precisa seguir um padrão multiplicativo constante.

## 3 Razão

### Definição 3.1: Razão

Uma razão é uma comparação entre duas grandezas por meio de uma divisão. Se temos duas quantidades  $a$  e  $b$ , com  $b \neq 0$ , a razão entre  $a$  e  $b$  é:

$$\frac{a}{b}.$$

#### Exemplo

Em uma sala há 12 meninas e 18 meninos.

A razão entre o número de meninas e o número de meninos é:

$$\frac{12}{18}.$$

Simplificando:

$$\frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

Isso significa que a razão entre meninas e meninos é:

$$2 : 3.$$

### Notação

A razão entre  $a$  e  $b$  pode ser escrita de duas formas:

$$\frac{a}{b}$$

ou

$$a : b.$$

Lemos:

“ $a$  para  $b$ ”.

### Exemplo

A razão:

$$3 : 5$$

pode ser escrita como:

$$\frac{3}{5}.$$

### Atenção

A ordem em uma razão é importante.

A razão entre 2 e 5 é:

$$\frac{2}{5}.$$

A razão entre 5 e 2 é:

$$\frac{5}{2}.$$

Essas razões são diferentes.

## 4 Proporção

### Definição 4.1: Proporção

Uma proporção é uma igualdade entre duas razões.

Ou seja:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

com  $b \neq 0$  e  $d \neq 0$ .

### Exemplo

A igualdade:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

é uma proporção, pois as duas frações são equivalentes.

### Teorema 4.1: Propriedade fundamental das proporções

Se:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

com  $b \neq 0$  e  $d \neq 0$ , então:

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

### Demonstração.

Partimos da proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Multiplicando os dois lados por  $bd$ , temos:

$$bd \cdot \frac{a}{b} = bd \cdot \frac{c}{d}.$$

Simplificando:

$$ad = bc.$$

Logo:

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

□

### Exemplo

Verifique se:

$$\frac{3}{5} \text{ e } \frac{9}{15}$$

formam uma proporção.

Fazemos os produtos cruzados:

$$3 \cdot 15 = 45.$$

$$5 \cdot 9 = 45.$$

Como os produtos são iguais:

$$\frac{3}{5} = \frac{9}{15}.$$

Logo, formam uma proporção.

### Exemplo

Verifique se:

$$\frac{4}{7} \text{ e } \frac{8}{15}$$

formam uma proporção.

Produtos cruzados:

$$4 \cdot 15 = 60.$$

$$7 \cdot 8 = 56.$$

Como:

$$60 \neq 56,$$

as razões não formam uma proporção.

## 5 Proporcionalidade direta

### Definição 5.1: Grandezas diretamente proporcionais

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando aumentam ou diminuem na mesma razão.

Ou seja, se uma grandeza é multiplicada por um número, a outra também é multiplicada pelo mesmo número.

### Exemplo

Se 1 caderno custa R\$ 8,00, então:

| Quantidade de cadernos | Preço total |
|------------------------|-------------|
| 1                      | R\$ 8,00    |
| 2                      | R\$ 16,00   |
| 3                      | R\$ 24,00   |
| 4                      | R\$ 32,00   |
| 5                      | R\$ 40,00   |

Quando a quantidade de cadernos dobra, o preço também dobra.

Quando a quantidade triplica, o preço também triplica.

Logo, as grandezas são diretamente proporcionais.

### Definição 5.2: Constante de proporcionalidade direta

Em uma relação de proporcionalidade direta entre duas grandezas  $x$  e  $y$ , a razão:

$$\frac{y}{x}$$

permanece constante.

Essa constante é chamada de constante de proporcionalidade.

### Teorema 5.1: Modelo da proporcionalidade direta

Se  $y$  é diretamente proporcional a  $x$ , então existe uma constante  $k$  tal que:

$$y = kx.$$

Nesse caso:

$$k = \frac{y}{x}.$$

### Exemplo

Na tabela dos cadernos, temos:

$$\frac{8}{1} = 8,$$

$$\frac{16}{2} = 8,$$

$$\frac{24}{3} = 8,$$

$$\frac{32}{4} = 8.$$

A razão preço dividido pela quantidade é sempre 8.

Logo, a constante de proporcionalidade é:

$$k = 8.$$

A fórmula é:

$$P = 8q,$$

em que:

- $P$  é o preço total;
- $q$  é a quantidade de cadernos.

### Resumo essencial

Na proporcionalidade direta:



$$\frac{y}{x} = k$$

e

$$y = kx.$$

Se  $x$  dobra,  $y$  dobra.

Se  $x$  triplica,  $y$  triplica.

Se  $x$  cai pela metade,  $y$  também cai pela metade.

## 6 Como reconhecer proporcionalidade direta

### Método

Para verificar se duas grandezas são diretamente proporcionais em uma tabela:

- 1) divida os valores da segunda grandeza pelos valores correspondentes da primeira;
- 2) observe se todas as razões são iguais;
- 3) se forem iguais, há proporcionalidade direta;
- 4) se não forem iguais, não há proporcionalidade direta.

### Exemplo

Verifique se a tabela representa proporcionalidade direta.

| $x$ | $y$ |
|-----|-----|
| 2   | 6   |
| 4   | 12  |
| 5   | 15  |
| 8   | 24  |

Calculamos:

$$\frac{6}{2} = 3,$$

$$\frac{12}{4} = 3,$$

$$\frac{15}{5} = 3,$$

$$\frac{24}{8} = 3.$$

Como todas as razões são iguais, as grandezas são diretamente proporcionais.

A constante é:

$$k = 3.$$

Logo:

$$y = 3x.$$

### Exemplo

Verifique se a tabela representa proporcionalidade direta.

| $x$ | $y$ |
|-----|-----|
| 1   | 3   |
| 2   | 7   |
| 3   | 11  |
| 4   | 15  |

Calculamos:

$$\frac{3}{1} = 3,$$

$$\frac{7}{2} = 3,5.$$

Como as razões já são diferentes, não há proporcionalidade direta.

### Atenção

Nem toda tabela que aumenta é proporcional.

Na tabela:

1, 2, 3, 4

e

3, 7, 11, 15,

a segunda grandeza aumenta sempre de 4, mas não é diretamente proporcional à primeira, pois a razão  $\frac{y}{x}$  não é constante.

## 7 Regra de três simples direta

### Definição 7.1: Regra de três simples direta

A regra de três simples direta é um método usado para resolver problemas envolvendo duas grandezas diretamente proporcionais.

### Método

Para resolver uma regra de três direta:

- 1) organize as grandezas em uma tabela;
- 2) verifique se são diretamente proporcionais;
- 3) monte uma proporção;
- 4) use produtos cruzados;
- 5) resolva a equação.

### Exemplo

Se 3 metros de tecido custam R\$ 45,00, quanto custam 7 metros do mesmo tecido?  
As grandezas são:

metros de tecido e preço.

Quanto mais tecido, maior o preço. Logo, são diretamente proporcionais.  
Montamos a tabela:

| metros | preço |
|--------|-------|
| 3      | 45    |
| 7      | $x$   |

Montamos a proporção:

$$\frac{3}{7} = \frac{45}{x}.$$

Produtos cruzados:

$$3x = 7 \cdot 45.$$

$$3x = 315.$$

$$x = 105.$$

Logo, 7 metros custam:

R\$ 105,00.

### Exemplo

Uma máquina produz 120 peças em 4 horas. Mantendo o mesmo ritmo, quantas peças produzirá em 9 horas?

Mais tempo implica mais peças. As grandezas são diretamente proporcionais.

| horas | peças |
|-------|-------|
| 4     | 120   |
| 9     | $x$   |

Proporção:

$$\frac{4}{9} = \frac{120}{x}.$$

Produtos cruzados:

$$4x = 9 \cdot 120.$$

$$4x = 1080.$$

$$x = 270.$$

Logo, a máquina produzirá:

270 peças.

### Observação

Também poderíamos resolver o problema anterior encontrando a produção por hora:

$$120 \div 4 = 30.$$

A máquina produz 30 peças por hora.

Em 9 horas:

$$30 \cdot 9 = 270.$$

## 8 Proporcionalidade inversa

### Definição 8.1: Grandezas inversamente proporcionais

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando uma aumenta enquanto a outra diminui na mesma razão.

Mais precisamente, se uma grandeza é multiplicada por um número, a outra é dividida por esse mesmo número.

### Exemplo

Uma viagem tem distância fixa de 120 km.  
Se a velocidade média aumenta, o tempo diminui.

| Velocidade média | Tempo |
|------------------|-------|
| 30 km/h          | 4 h   |
| 60 km/h          | 2 h   |
| 120 km/h         | 1 h   |

Quando a velocidade dobra de 30 para 60, o tempo cai pela metade, de 4 para 2.  
Logo, velocidade e tempo, para uma distância fixa, são grandezas inversamente proporcionais.

### Definição 8.2: Constante de proporcionalidade inversa

Em uma relação de proporcionalidade inversa entre duas grandezas  $x$  e  $y$ , o produto:

$$x \cdot y$$

permanece constante.

### Teorema 8.1: Modelo da proporcionalidade inversa

Se  $y$  é inversamente proporcional a  $x$ , então existe uma constante  $k$  tal que:

$$x \cdot y = k.$$

Também podemos escrever:

$$y = \frac{k}{x}.$$

### Exemplo

Na tabela da viagem:

$$30 \cdot 4 = 120,$$

$$60 \cdot 2 = 120,$$

$$120 \cdot 1 = 120.$$

O produto velocidade  $\cdot$  tempo é sempre 120.  
Logo:

$$v \cdot t = 120.$$

Essa constante representa a distância da viagem.

## Resumo essencial

Na proporcionalidade inversa:

$$x \cdot y = k$$

e

$$y = \frac{k}{x}.$$

Se  $x$  dobra,  $y$  cai pela metade.

Se  $x$  triplica,  $y$  cai para a terça parte.

Se  $x$  cai pela metade,  $y$  dobra.

## 9 Como reconhecer proporcionalidade inversa

### Método

Para verificar se duas grandezas são inversamente proporcionais em uma tabela:

- 1) multiplique os valores correspondentes das duas grandezas;
- 2) observe se todos os produtos são iguais;
- 3) se forem iguais, há proporcionalidade inversa;
- 4) se não forem iguais, não há proporcionalidade inversa.

### Exemplo

Verifique se a tabela representa proporcionalidade inversa.

| $x$ | $y$ |
|-----|-----|
| 2   | 30  |
| 3   | 20  |
| 5   | 12  |
| 6   | 10  |

Calculamos os produtos:

$$2 \cdot 30 = 60,$$

$$3 \cdot 20 = 60,$$

$$5 \cdot 12 = 60,$$

$$6 \cdot 10 = 60.$$

Como todos os produtos são iguais, as grandezas são inversamente proporcionais.  
A constante é:

$$k = 60.$$

Logo:

$$xy = 60.$$

### Exemplo

Verifique se a tabela representa proporcionalidade inversa.

| $x$ | $y$ |
|-----|-----|
| 1   | 12  |
| 2   | 8   |
| 3   | 6   |
| 4   | 5   |

Produtos:

$$1 \cdot 12 = 12,$$

$$2 \cdot 8 = 16.$$

Como os produtos são diferentes, não há proporcionalidade inversa.

## 10 Regra de três simples inversa

### Definição 10.1: Regra de três simples inversa

A regra de três simples inversa é usada para resolver problemas envolvendo duas grandezas inversamente proporcionais.

### Método

Para resolver uma regra de três inversa:

- 1) organize as grandezas em uma tabela;
- 2) verifique se são inversamente proporcionais;
- 3) monte a relação usando produto constante;
- 4) iguale os produtos correspondentes;
- 5) resolva a equação.

### Exemplo

Quatro trabalhadores constroem um muro em 12 dias. Mantendo o mesmo ritmo, em quantos dias 6 trabalhadores construiriam o mesmo muro?

As grandezas são:

número de trabalhadores

e

tempo.

Mais trabalhadores implicam menos tempo. Logo, são inversamente proporcionais.

| trabalhadores | dias |
|---------------|------|
| 4             | 12   |
| 6             | $x$  |

Como o produto é constante:

$$4 \cdot 12 = 6 \cdot x.$$

$$48 = 6x.$$

$$x = 8.$$

Logo, 6 trabalhadores fariam o muro em:

8 dias.

### Exemplo

Um carro percorre certo trajeto em 5 horas a 80 km/h. Se fizer o mesmo trajeto a 100 km/h, quanto tempo levará?

A distância é a mesma. Velocidade e tempo são inversamente proporcionais.

| velocidade | tempo |
|------------|-------|
| 80         | 5     |
| 100        | $x$   |

Produto constante:

$$80 \cdot 5 = 100 \cdot x.$$

$$400 = 100x.$$

$$x = 4.$$

Logo, levará:

4 horas.



### Atenção

Em regra de três inversa, não montamos a proporção da mesma forma da regra de três direta.

Na inversa, usamos o produto constante:

$$x_1 y_1 = x_2 y_2.$$

## 11 Direta ou inversa? Como decidir

### Método

Para decidir se uma situação é direta ou inversa, pergunte:

Se uma grandeza aumenta, o que acontece com a outra?

- Se a outra também aumenta na mesma razão, é proporcionalidade direta.
- Se a outra diminui na mesma razão, é proporcionalidade inversa.

| Proporcionalidade direta                         | Proporcionalidade inversa                       |
|--------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| Mais produtos, maior preço.                      | Mais trabalhadores, menor tempo.                |
| Mais horas, maior salário.                       | Maior velocidade, menor tempo.                  |
| Mais ingredientes, mais porções.                 | Mais torneiras, menor tempo para encher.        |
| Mais distância, maior tempo com velocidade fixa. | Menos pessoas, mais tempo para concluir tarefa. |
| $\frac{y}{x} = k$                                | $x \cdot y = k$                                 |
| $y = kx$                                         | $y = \frac{k}{x}$                               |

### Exemplo

Um pacote de arroz custa R\$ 25,00. Quanto custam 4 pacotes?  
Quanto mais pacotes, maior o preço.  
Logo, é uma proporcionalidade direta.

### Exemplo

Dois pintores pintam uma parede em 6 horas. Quatro pintores pintariam a mesma parede em quanto tempo?  
Quanto mais pintores, menor o tempo.  
Logo, é uma proporcionalidade inversa.

### Atenção

Não basta dizer que uma grandeza aumenta e a outra diminui para concluir que são inversamente proporcionais. É necessário que o produto entre os valores correspondentes permaneça constante.

## 12 Escalas e proporcionalidade

### Definição 12.1: Escala

Escala é uma razão entre uma medida representada em um desenho, mapa ou planta e a medida real correspondente.

Geralmente escrevemos:

$$\text{escala} = \frac{\text{medida no desenho}}{\text{medida real}}.$$

### Exemplo

Uma escala 1 : 100 significa que:

1 cm no desenho

representa:

100 cm na realidade.

Como 100 cm correspondem a 1 metro, temos:

1 cm no desenho  $\Rightarrow$  1 m na realidade.

### Exemplo

Em uma planta com escala 1 : 50, uma parede mede 6 cm no desenho. Qual é o comprimento real da parede?

A escala diz:

1 cm no desenho  $\Rightarrow$  50 cm reais.

Então:

6 cm no desenho  $\Rightarrow 6 \cdot 50 = 300$  cm reais.

Como:

300 cm = 3 m,

a parede mede:

3 m.

### Exemplo

Em um mapa, 2 cm representam 10 km. Quantos quilômetros são representados por 7 cm?

As grandezas são diretamente proporcionais.

| cm no mapa | km reais |
|------------|----------|
| 2          | 10       |
| 7          | $x$      |

Proporção:

$$\frac{2}{7} = \frac{10}{x}.$$

Produtos cruzados:

$$2x = 70.$$

$$x = 35.$$

Logo:

|                         |
|-------------------------|
| 7 cm representam 35 km. |
|-------------------------|

## 13 Gráficos e proporcionalidade

### Observação

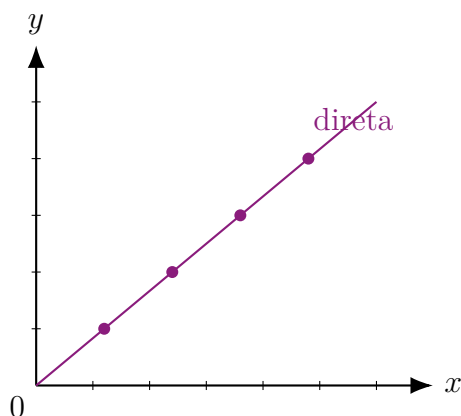
No 7º ano, o mais importante é interpretar tabelas e relações. Ainda assim, é útil observar a forma dos gráficos.

### Definição 13.1: Gráfico de proporcionalidade direta

Em uma proporcionalidade direta do tipo:

$$y = kx,$$

o gráfico é formado por pontos alinhados que passam pela origem  $(0, 0)$ .



### Observação

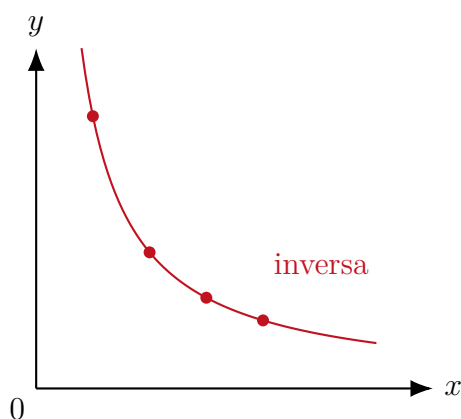
Na proporcionalidade direta, quando  $x = 0$ , normalmente  $y = 0$ . Por exemplo: se compramos 0 cadernos, pagamos R\$ 0,00.

### Definição 13.2: Gráfico de proporcionalidade inversa

Em uma proporcionalidade inversa do tipo:

$$y = \frac{k}{x},$$

quando  $x$  aumenta,  $y$  diminui. O gráfico não é uma reta.



### Atenção

O gráfico da proporcionalidade inversa não passa pela origem, pois  $x = 0$  não pode aparecer em:

$$y = \frac{k}{x}.$$

Não existe divisão por zero.

## 14 Problemas contextualizados

### 14.1 Preço e quantidade

#### Exemplo

Uma dúzia de ovos custa R\$ 18,00. Quanto custam 30 ovos?

Uma dúzia tem 12 ovos.

As grandezas são diretamente proporcionais.

| ovos | preço |
|------|-------|
| 12   | 18    |
| 30   | $x$   |

Proporção:

$$\frac{12}{30} = \frac{18}{x}.$$

Produtos cruzados:

$$12x = 30 \cdot 18.$$

$$12x = 540.$$

$$x = 45.$$

Logo:

|                           |
|---------------------------|
| 30 ovos custam R\$ 45,00. |
|---------------------------|

### 14.2 Receitas

#### Exemplo

Uma receita para 4 pessoas usa 300 g de farinha. Para 10 pessoas, quantos gramas de farinha serão necessários?

Mais pessoas exigem mais farinha. Proporcionalidade direta.

| pessoas                         | farinha |
|---------------------------------|---------|
| 4                               | 300     |
| 10                              | $x$     |
| $\frac{4}{10} = \frac{300}{x}.$ |         |

$$4x = 3000.$$

$$x = 750.$$

Logo, serão necessários:

750 g de farinha.

### 14.3 Trabalho e tempo

#### Exemplo

Cinco máquinas produzem uma encomenda em 12 horas. Mantendo o mesmo ritmo, em quantas horas 10 máquinas fariam a mesma encomenda?

Mais máquinas, menos tempo. Proporcionalidade inversa.

| máquinas | horas |
|----------|-------|
| 5        | 12    |
| 10       | $x$   |

Produto constante:

$$5 \cdot 12 = 10 \cdot x.$$

$$60 = 10x.$$

$$x = 6.$$

Logo:

10 máquinas fariam a encomenda em 6 horas.

### 14.4 Velocidade e tempo

#### Exemplo

Um ciclista percorre um trajeto em 3 horas a 20 km/h. Se aumentar a velocidade média para 30 km/h, em quanto tempo fará o mesmo trajeto?

A distância é a mesma. Velocidade e tempo são inversamente proporcionais.

| velocidade | tempo |
|------------|-------|
| 20         | 3     |
| 30         | $x$   |

Produto constante:

$$20 \cdot 3 = 30x.$$

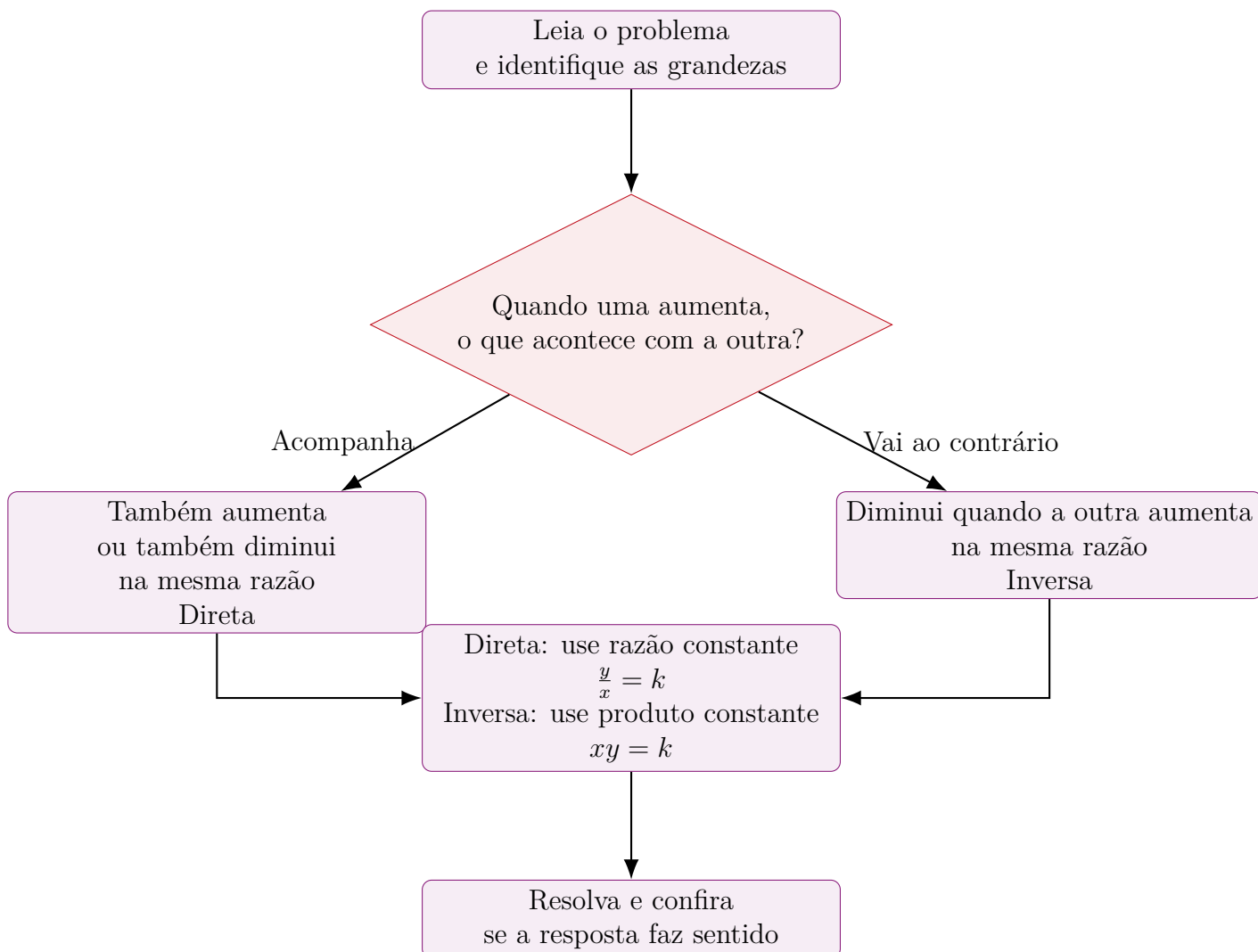
$$60 = 30x.$$

Logo:

$$x = 2.$$

2 horas.

## 15 Fluxograma de decisão



## 16 Erros comuns

### Atenção

**Erro 1: achar que toda relação crescente é proporcional.**

Uma relação pode crescer sem ser proporcional.

Para ser proporcionalidade direta, a razão  $\frac{y}{x}$  precisa ser constante.

### Atenção

**Erro 2: usar regra de três direta em situação inversa.**

Se mais trabalhadores diminuem o tempo de trabalho, a relação é inversa.

Nesse caso, devemos usar:

$$x_1y_1 = x_2y_2.$$

### Atenção

**Erro 3: esquecer de verificar o sentido da resposta.**

Se mais máquinas fazem o mesmo trabalho, o tempo deve diminuir.

Se o cálculo der um tempo maior, provavelmente a relação foi montada incorretamente.

### Atenção

**Erro 4: confundir razão constante com produto constante.**

Na proporcionalidade direta:

$$\frac{y}{x} = k.$$

Na proporcionalidade inversa:

$$xy = k.$$

### Atenção

**Erro 5: montar a razão em ordem diferente.**

Se a razão foi montada como:

$$\frac{\text{preço}}{\text{quantidade}},$$

mantenha essa mesma ordem em toda a proporção.

## 17 Exercícios de fixação

### Exercício 1

Calcule as razões e simplifique.

- a) 12 para 18
- b) 20 para 50
- c) 45 para 15
- d) 8 para 32



### Exercício 2

Verifique se as razões formam proporção.

a)  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{8}{12}$

b)  $\frac{5}{7}$  e  $\frac{10}{21}$

c)  $\frac{4}{9}$  e  $\frac{12}{27}$

### Exercício 3

Verifique se a tabela representa proporcionalidade direta.

| $x$ | $y$ |
|-----|-----|
| 2   | 10  |
| 3   | 15  |
| 5   | 25  |
| 8   | 40  |

### Exercício 4

Verifique se a tabela representa proporcionalidade inversa.

| $x$ | $y$ |
|-----|-----|
| 2   | 36  |
| 3   | 24  |
| 4   | 18  |
| 6   | 12  |

### Exercício 5

Se 5 kg de arroz custam R\$ 32,00, quanto custam 8 kg do mesmo arroz?

### Exercício 6

Uma torneira enche uma caixa em 6 horas. Duas torneiras iguais, juntas, encheriam a mesma caixa em quantas horas?

### Exercício 7

Um carro percorre 240 km em 3 horas. Mantendo a mesma velocidade, quantos quilômetros percorrerá em 5 horas?

### Exercício 8

Se 4 operários fazem um serviço em 15 dias, em quantos dias 10 operários fariam o mesmo serviço, mantendo o mesmo ritmo?

### Exercício 9

Em uma escala 1 : 200, uma medida no desenho é 8 cm. Qual é a medida real em metros?

### Exercício 10

Explique com suas palavras a diferença entre proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa.

## 18 Correção comentada

### Correção comentada

#### Exercício 1.

a) A razão de 12 para 18 é:

$$\frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

b) A razão de 20 para 50 é:

$$\frac{20}{50} = \frac{2}{5}.$$

c) A razão de 45 para 15 é:

$$\frac{45}{15} = 3.$$

d) A razão de 8 para 32 é:

$$\frac{8}{32} = \frac{1}{4}.$$

### Correção comentada

#### Exercício 2.

a)

$$\frac{2}{3} \text{ e } \frac{8}{12}.$$

Produtos cruzados:

$$2 \cdot 12 = 24.$$

$$3 \cdot 8 = 24.$$

Como são iguais, formam proporção.

b)

$$\frac{5}{7} \text{ e } \frac{10}{21}.$$

Produtos cruzados:

$$5 \cdot 21 = 105.$$

$$7 \cdot 10 = 70.$$

Como são diferentes, não formam proporção.

c)

$$\frac{4}{9} \text{ e } \frac{12}{27}.$$

Produtos cruzados:

$$4 \cdot 27 = 108.$$

$$9 \cdot 12 = 108.$$

Como são iguais, formam proporção.

### Correção comentada

#### Exercício 3.

Calculamos as razões  $\frac{y}{x}$ :

$$\frac{10}{2} = 5.$$

$$\frac{15}{3} = 5.$$

$$\frac{25}{5} = 5.$$

$$\frac{40}{8} = 5.$$

Como todas as razões são iguais, há proporcionalidade direta.  
A constante é:

$$k = 5.$$

Logo:

$$y = 5x.$$

### Correção comentada

#### Exercício 4.

Calculamos os produtos:

$$2 \cdot 36 = 72.$$

$$3 \cdot 24 = 72.$$

$$4 \cdot 18 = 72.$$

$$6 \cdot 12 = 72.$$

Como todos os produtos são iguais, há proporcionalidade inversa.  
A constante é:

$$k = 72.$$

Logo:

$$xy = 72.$$

### Correção comentada

#### Exercício 5.

Mais arroz implica maior preço. Portanto, é proporcionalidade direta.

| kg | preço |
|----|-------|
| 5  | 32    |
| 8  | $x$   |

Montamos a proporção:

$$\frac{5}{8} = \frac{32}{x}.$$

Produtos cruzados:

$$5x = 8 \cdot 32.$$

$$5x = 256.$$

$$x = 51,2.$$

Logo:

$$8 \text{ kg custam R\$ } 51,20.$$

### Correção comentada

#### Exercício 6.

Mais torneiras implicam menor tempo. Portanto, é proporcionalidade inversa.

| torneiras | horas |
|-----------|-------|
| 1         | 6     |
| 2         | $x$   |

Produto constante:

$$1 \cdot 6 = 2 \cdot x.$$

$$6 = 2x.$$

$$x = 3.$$

Logo:

2 torneiras enchem a caixa em 3 horas.

### Correção comentada

#### Exercício 7.

Mantendo a mesma velocidade, mais tempo implica maior distância. Portanto, é proporcionalidade direta.

| horas | distância |
|-------|-----------|
| 3     | 240       |
| 5     | $x$       |

$$\frac{3}{5} = \frac{240}{x}.$$

$$3x = 5 \cdot 240.$$

$$3x = 1200.$$

$$x = 400.$$

Logo:

400 km.

### Correção comentada

#### Exercício 8.

Mais operários implicam menos dias. Portanto, é proporcionalidade inversa.

| operários | dias |
|-----------|------|
| 4         | 15   |
| 10        | $x$  |

Produto constante:

$$4 \cdot 15 = 10x.$$

$$60 = 10x.$$

$$x = 6.$$

Logo:

10 operários fariam o serviço em 6 dias.

### Correção comentada

#### Exercício 9.

A escala 1 : 200 significa:

$$1 \text{ cm no desenho} \Rightarrow 200 \text{ cm reais.}$$

Para 8 cm:

$$8 \cdot 200 = 1600 \text{ cm.}$$

Como:

$$100 \text{ cm} = 1 \text{ m,}$$

temos:

$$1600 \text{ cm} = 16 \text{ m.}$$

Logo:

16 m.

### Correção comentada

#### Exercício 10.

Na proporcionalidade direta, as grandezas variam no mesmo sentido. Se uma aumenta, a outra também aumenta na mesma razão. Se uma diminui, a outra também diminui na mesma razão.

Exemplo:

quantidade de produtos e preço total.

Na proporcionalidade inversa, as grandezas variam em sentidos contrários. Se uma aumenta, a outra diminui na mesma razão.

Exemplo:

número de trabalhadores e tempo para realizar uma tarefa.

## 19 Lista extra de treino

### Exercício 11

Complete a tabela sabendo que  $y$  é diretamente proporcional a  $x$ .

| $x$ | $y$ |
|-----|-----|
| 2   | 14  |
| 4   |     |
| 6   |     |
| 10  |     |

### Exercício 12

Complete a tabela sabendo que  $x$  e  $y$  são inversamente proporcionais.

| $x$ | $y$ |
|-----|-----|
| 3   | 20  |
| 4   |     |
| 5   |     |
| 10  |     |

### Exercício 13

Se 12 laranjas custam R\$ 9,00, quanto custam 20 laranjas?

### Exercício 14

Uma impressora imprime 80 páginas em 4 minutos. Quantas páginas imprime em 9 minutos, mantendo o mesmo ritmo?

### Exercício 15

Três pessoas montam uma barraca em 18 minutos. Seis pessoas, trabalhando no mesmo ritmo, montariam a mesma barraca em quantos minutos?

### Exercício 16

Um carro faz uma viagem em 6 horas a 70 km/h. Se fizer a mesma viagem a 105 km/h, quanto tempo levará?

### Exercício 17

Em um mapa, 5 cm representam 25 km. Quantos quilômetros são representados por 12 cm?

### Exercício 18

Uma receita para 6 pessoas usa 450 g de arroz. Quanto arroz será usado para 14 pessoas?

### Exercício 19

Uma equipe de 8 trabalhadores realiza uma tarefa em 9 dias. Quantos dias seriam necessários para 12 trabalhadores realizarem a mesma tarefa?

### Exercício 20

Crie um exemplo de proporcionalidade direta e um exemplo de proporcionalidade inversa.

## 20 Síntese final

### Resumo essencial

#### 1. Grandeza

É tudo aquilo que pode ser medido, contado ou comparado numericamente.

#### 2. Razão

$$\frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

É uma comparação por divisão.

#### 3. Proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

É uma igualdade entre razões.

#### 4. Produto cruzado

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \implies ad = bc.$$

#### 5. Proporcionalidade direta

As grandezas variam no mesmo sentido e na mesma razão.

$$\frac{y}{x} = k.$$

$$y = kx.$$

#### 6. Proporcionalidade inversa

As grandezas variam em sentidos contrários e o produto permanece constante.

$$xy = k.$$

$$y = \frac{k}{x}.$$

#### 7. Regra de três direta

Usada quando as grandezas são diretamente proporcionais.

#### 8. Regra de três inversa

Usada quando as grandezas são inversamente proporcionais.

#### 9. Escala



$$\text{escala} = \frac{\text{medida no desenho}}{\text{medida real}}.$$

**10. Ideia fundamental**

Antes de calcular, é preciso decidir se a relação é direta ou inversa.

## Fim do módulo

Proporcionalidade Direta e Inversa