

Figuras Espaciais

Matemática – 6º Ano do Ensino Fundamental

Sólidos geométricos, poliedros, corpos redondos, faces, arestas, vértices e planificações

Sumário

1	Introdução	1
2	Figuras planas e figuras espaciais	1
3	Sólidos geométricos	2
4	Poliedros e corpos redondos	3
5	Elementos de um poliedro	4
6	Cubo	4
7	Paralelepípedo	5
8	Prismas	5
9	Pirâmides	7
10	Corpos redondos	8
11	Cilindro	8
12	Cone	9
13	Esfera	9
14	Planificação de sólidos	10
15	Relação de Euler	11
16	Vistas de uma figura espacial	12
17	Volume intuitivo por cubinhos	13

18 Erros frequentes	13
19 Atividades	14
20 Gabarito comentado	17
21 Resumo final	21

1 Introdução

As **figuras espaciais** aparecem em muitos objetos do cotidiano.

Por exemplo:

- uma caixa pode lembrar um paralelepípedo;
- uma lata pode lembrar um cilindro;
- uma bola pode lembrar uma esfera;
- uma casquinha de sorvete pode lembrar um cone;
- uma pirâmide do Egito pode lembrar uma pirâmide geométrica.

Diferentemente das figuras planas, que possuem apenas duas dimensões, as figuras espaciais ocupam lugar no espaço.

Objetivos da aula

Ao final desta aula, o estudante deverá ser capaz de:

- diferenciar figuras planas e figuras espaciais;
- reconhecer sólidos geométricos em objetos do cotidiano;
- identificar poliedros e corpos redondos;
- reconhecer faces, arestas e vértices de um poliedro;
- identificar prismas, pirâmides, cubos e paralelepípedos;
- reconhecer cilindros, cones e esferas;
- relacionar sólidos geométricos às suas planificações;
- contar faces, arestas e vértices de sólidos simples;
- utilizar a relação de Euler em poliedros convexos simples;
- interpretar vistas de figuras espaciais;
- resolver problemas envolvendo figuras espaciais.

2 Figuras planas e figuras espaciais

Definição 2.1: Figura plana

Uma **figura plana** é uma figura que está contida em um plano e possui duas dimensões principais: comprimento e largura.

Exemplos de figuras planas

São figuras planas:

triângulo, quadrado, retângulo, círculo.

Definição 2.2: Figura espacial

Uma **figura espacial** é uma figura que ocupa lugar no espaço e possui três dimensões principais: comprimento, largura e altura.

Exemplos de figuras espaciais

São figuras espaciais:

cubo, paralelepípedo, cilindro, cone, esfera.

Observação – Duas dimensões e três dimensões

Figuras planas são bidimensionais, isto é, possuem duas dimensões.

Figuras espaciais são tridimensionais, isto é, possuem três dimensões.



Figura plana

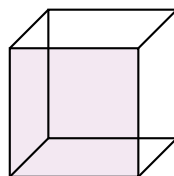


Figura espacial

3 Sólidos geométricos

Definição 3.1: Sólido geométrico

Um **sólido geométrico** é uma figura espacial limitada por superfícies.

Exemplo – Objetos e sólidos

Alguns objetos do cotidiano podem ser associados a sólidos geométricos:

Objeto	Sólido geométrico aproximado
Dado	Cubo
Caixa de sapato	Paralelepípedo
Lata de refrigerante	Cilindro
Bola de futebol	Esfera
Casquinha de sorvete	Cone
Pirâmide do Egito	Pirâmide

Observação – Modelos matemáticos

Na Matemática, usamos sólidos geométricos como modelos ideais. Uma lata real, por exemplo, pode ter pequenas deformações, bordas e espessura, mas seu formato geral pode ser estudado como um cilindro.

4 Poliedros e corpos redondos

Os sólidos geométricos podem ser classificados em dois grandes grupos:

poliedros e corpos redondos.

Definição 4.1: Poliedro

Um **poliedro** é um sólido geométrico limitado apenas por faces planas.

Exemplos de poliedros

São poliedros:

cubo, paralelepípedo, prisma, pirâmide.

Definição 4.2: Corpo redondo

Um **corpo redondo** é um sólido geométrico que possui pelo menos uma superfície curva.

Exemplos de corpos redondos

São corpos redondos:

cilindro, cone, esfera.

Atenção – Nem todo sólido é poliedro

Um cilindro não é poliedro, pois possui superfície curva.
Uma esfera também não é poliedro, pois sua superfície é totalmente curva.

5 Elementos de um poliedro

Os principais elementos de um poliedro são:

faces, arestas, vértices.

Definição 5.1: Face

Uma **face** é uma superfície plana que limita um poliedro.

Definição 5.2: Aresta

Uma **aresta** é o segmento de reta formado pelo encontro de duas faces.

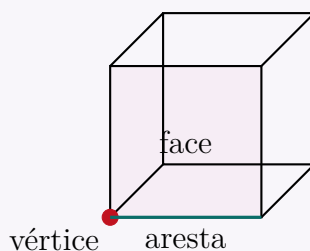
Definição 5.3: Vértice

Um **vértice** é o ponto de encontro de três ou mais arestas.

Exemplo – Elementos do cubo

Um cubo possui:

6 faces, 12 arestas, 8 vértices.



Observação – Faces são figuras planas

As faces dos poliedros são figuras planas.

Por exemplo, as faces de um cubo são quadrados.

As faces de um paralelepípedo retângulo são retângulos.

6 Cubo

Definição 6.1: Cubo

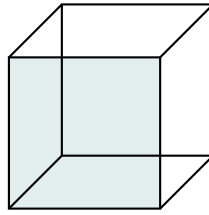
Um **cubo** é um poliedro formado por 6 faces quadradas congruentes.

Exemplo – Cubo

Um dado comum tem formato aproximado de cubo.

O cubo possui:

6 faces, 12 arestas, 8 vértices.



Cubo

Observação – Todas as arestas do cubo são iguais

No cubo, todas as arestas possuem a mesma medida.

7 Paralelepípedo

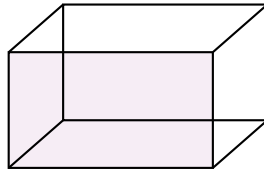
Definição 7.1: Paralelepípedo

Um **paralelepípedo** é um poliedro com 6 faces, em que as faces opostas são paralelas e congruentes.

Exemplo – Paralelepípedo retângulo

Uma caixa de sapato lembra um paralelepípedo retângulo.
Ele possui:

6 faces, 12 arestas, 8 vértices.



Paralelepípedo

Observação – Cubo como caso especial

Todo cubo é um paralelepípedo especial, pois possui 6 faces quadradas.
Mas nem todo paralelepípedo é cubo.

8 Prismas

Definição 8.1: Prisma

Um **prisma** é um poliedro que possui duas bases paralelas e congruentes, e faces laterais em forma de paralelogramos.

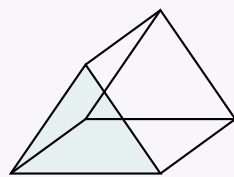
Observação – Bases de um prisma

O nome do prisma depende do formato de suas bases.
Por exemplo:

- base triangular: prisma triangular;
- base quadrangular: prisma quadrangular;
- base pentagonal: prisma pentagonal;
- base hexagonal: prisma hexagonal.

Exemplo – Prisma triangular

Um prisma triangular possui duas bases triangulares.



Prisma triangular

Teorema 8.1: Elementos de um prisma de base n -gonal

Um prisma cuja base possui n lados tem:

$$F = n + 2,$$

$$A = 3n,$$

$$V = 2n.$$

Em que:

- F é o número de faces;
- A é o número de arestas;
- V é o número de vértices.

Exemplo – Prisma triangular

No prisma triangular, a base possui:

$$n = 3$$

lados.

Então:

$$F = n + 2 = 3 + 2 = 5,$$

$$A = 3n = 3 \cdot 3 = 9,$$

$$V = 2n = 2 \cdot 3 = 6.$$

Logo, o prisma triangular possui 5 faces, 9 arestas e 6 vértices.

9 Pirâmides

Definição 9.1: Pirâmide

Uma **pirâmide** é um poliedro que possui uma base poligonal e faces laterais triangulares que se encontram em um único vértice.

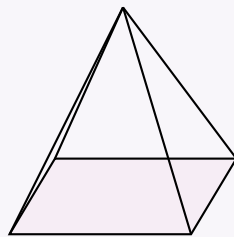
Observação – Nome da pirâmide

O nome de uma pirâmide depende do formato de sua base.
Por exemplo:

- base triangular: pirâmide triangular;
- base quadrangular: pirâmide quadrangular;
- base pentagonal: pirâmide pentagonal.

Exemplo – Pirâmide quadrangular

Uma pirâmide de base quadrangular possui uma base em forma de quadrado e quatro faces laterais triangulares.



Pirâmide quadrangular

Teorema 9.1: Elementos de uma pirâmide de base n -gonal

Uma pirâmide cuja base possui n lados tem:

$$F = n + 1,$$

$$A = 2n,$$

$$V = n + 1.$$

Em que:

- F é o número de faces;
- A é o número de arestas;
- V é o número de vértices.

Exemplo – Pirâmide quadrangular

Na pirâmide quadrangular, a base possui:

$$n = 4$$

lados.

Então:

$$F = n + 1 = 4 + 1 = 5,$$

$$A = 2n = 2 \cdot 4 = 8,$$

$$V = n + 1 = 4 + 1 = 5.$$

Logo, a pirâmide quadrangular possui 5 faces, 8 arestas e 5 vértices.

10 Corpos redondos

Corpos redondos são sólidos que possuem superfícies curvas.

Os principais corpos redondos estudados no 6º ano são:

cilindro, cone, esfera.

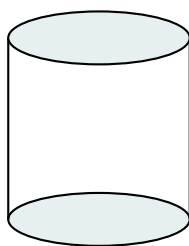
11 Cilindro

Definição 11.1: Cilindro

Um **cilindro** é um corpo redondo que possui duas bases circulares paralelas e uma superfície lateral curva.

Exemplo – Cilindro no cotidiano

Uma lata de refrigerante tem formato aproximado de cilindro.



Cilindro

Observação – Cilindro não é poliedro

O cilindro não é poliedro porque possui superfície lateral curva.

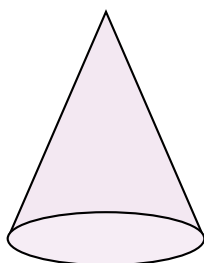
12 Cone

Definição 12.1: Cone

Um **cone** é um corpo redondo que possui uma base circular e uma superfície lateral curva que se encontra em um vértice.

Exemplo – Cone no cotidiano

Uma casquinha de sorvete lembra o formato de um cone.



Cone

Observação – Vértice do cone

O cone possui um vértice, mas não é poliedro, pois sua superfície lateral é curva.

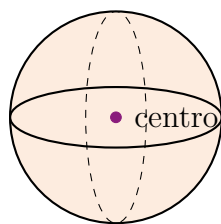
13 Esfera

Definição 13.1: Esfera

Uma **esfera** é um corpo redondo em que todos os pontos da superfície estão à mesma distância de um ponto central chamado centro.

Exemplo – Esfera no cotidiano

Uma bola de futebol tem formato aproximado de esfera.



Esfera

Observação – Esfera não possui faces planas

A esfera não possui faces, arestas ou vértices.
Ela possui uma única superfície curva.

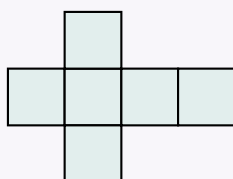
14 Planificação de sólidos

Definição 14.1: Planificação

A **planificação** de um sólido geométrico é a representação de suas superfícies em um plano, como se o sólido fosse aberto e desmontado.

Exemplo – Planificação do cubo

Uma planificação possível do cubo é formada por 6 quadrados.



Planificação de um cubo

Exemplo – Planificação do paralelepípedo

Uma planificação de um paralelepípedo retângulo é formada por 6 retângulos.



Planificação de um paralelepípedo

Exemplo – Planificação do cilindro

A planificação de um cilindro é formada por:

- dois círculos;
- um retângulo.



Planificação de um cilindro

Atenção – Nem toda junção de figuras planas forma um sólido

Para ser uma planificação correta, as faces precisam se encaixar de modo que seja possível montar o sólido sem sobras ou sobreposições.

15 Relação de Euler

Para muitos poliedros convexos, existe uma relação importante entre número de vértices, arestas e faces.

Teorema 15.1: Relação de Euler

Em todo poliedro convexo, vale a relação:

$$V - A + F = 2.$$

Em que:

- V é o número de vértices;
- A é o número de arestas;
- F é o número de faces.

Exemplo – Relação de Euler no cubo

O cubo possui:

$$V = 8, \quad A = 12, \quad F = 6.$$

Então:

$$V - A + F = 8 - 12 + 6 = 2.$$

Logo, a relação de Euler é satisfeita.

Exemplo – Relação de Euler na pirâmide quadrangular

A pirâmide quadrangular possui:

$$V = 5, \quad A = 8, \quad F = 5.$$

Então:

$$V - A + F = 5 - 8 + 5 = 2.$$

Logo, a relação de Euler é satisfeita.

Observação – Uso da relação de Euler

A relação de Euler pode ser usada para verificar contagens de faces, arestas e vértices. Se a contagem não satisfaz:

$$V - A + F = 2,$$

provavelmente houve erro na contagem ou o sólido não se encaixa nas condições estudadas.

16 Vistas de uma figura espacial

Definição 16.1: Vista de um sólido

Uma **vista** de um sólido é a representação plana obtida ao observar o sólido de uma determinada direção.

As vistas mais comuns são:

- vista frontal;
- vista superior;
- vista lateral.

Exemplo – Vistas de um cubo

Ao observar um cubo de frente, de cima ou de lado, podemos ver um quadrado.

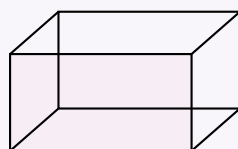
vista frontal: quadrado

vista superior: quadrado

vista lateral: quadrado

Exemplo – Vistas de um paralelepípedo

Um paralelepípedo retângulo pode apresentar vistas retangulares.



Sólido



Vista frontal

Observação – Vistas ajudam a interpretar sólidos

As vistas são úteis para representar objetos tridimensionais em desenhos bidimensionais.

17 Volume intuitivo por cubinhos

Definição 17.1: Volume

O **volume** é a medida do espaço ocupado por um sólido.

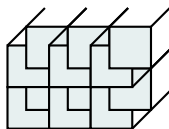
No 6º ano, podemos compreender volume contando cubinhos unitários.

Exemplo – Contagem de cubinhos

Considere um bloco formado por 3 cubinhos no comprimento, 2 na largura e 2 na altura. A quantidade total de cubinhos é:

$$3 \cdot 2 \cdot 2 = 12.$$

Logo, o volume do bloco é de 12 cubinhos unitários.



Bloco com 12 cubinhos

Observação – Ideia inicial de volume

A fórmula do volume do paralelepípedo retângulo será estudada com mais detalhes em grandezas e medidas.

Aqui, o objetivo é compreender a ideia de espaço ocupado.

18 Erros frequentes

Atenção – Confundir figura plana com figura espacial

Um quadrado é uma figura plana.

Um cubo é uma figura espacial.

Embora as faces do cubo sejam quadrados, o cubo não é um quadrado.

Atenção – Chamar esfera de círculo

Círculo é uma figura plana.

Esfera é uma figura espacial.

Uma bola lembra uma esfera, não um círculo.

Atenção – Confundir face com aresta

Face é uma superfície plana.

Aresta é o segmento onde duas faces se encontram.

Vértice é o ponto onde arestas se encontram.

Atenção – Dizer que cilindro é poliedro

O cilindro não é poliedro, pois possui superfície curva.

Atenção – Esquecer faces escondidas

Em desenhos em perspectiva, algumas faces, arestas ou vértices podem não estar visíveis. Mesmo assim, elas fazem parte do sólido.

19 Atividades

Atividade 1 – Conceitos fundamentais

Responda.

- a) O que é uma figura plana?
- b) O que é uma figura espacial?
- c) O que é um sólido geométrico?
- d) O que é um poliedro?
- e) O que é um corpo redondo?

Atividade 2 – Classificação

Classifique cada sólido como poliedro ou corpo redondo.

- | | |
|-------------|----------------------|
| a) Cubo | e) Paralelepípedo |
| b) Cilindro | f) Esfera |
| c) Cone | g) Prisma triangular |
| d) Pirâmide | h) Prisma pentagonal |

Atividade 3 – Objetos do cotidiano

Associe cada objeto ao sólido geométrico mais parecido.

- a) Dado.
- b) Lata de refrigerante.
- c) Bola de futebol.
- d) Caixa de sapato.
- e) Casquinha de sorvete.
- f) Pirâmide do Egito.

Atividade 4 – Faces, arestas e vértices

Complete a tabela.

Sólido	Faces	Arestas	Vértices
Cubo			
Paralelepípedo			
Prisma triangular			
Pirâmide quadrangular			
Pirâmide triangular			

Atividade 5 – Prismas

Responda.

- a) O que caracteriza um prisma?
- b) Como o prisma recebe seu nome?
- c) Quantas bases possui um prisma?
- d) Um prisma triangular possui quantas faces?
- e) Um prisma pentagonal possui quantos vértices?

Atividade 6 – Pirâmides

Responda.

- a) O que caracteriza uma pirâmide?
- b) Como a pirâmide recebe seu nome?
- c) Quantas bases possui uma pirâmide?
- d) Uma pirâmide quadrangular possui quantas faces?
- e) Uma pirâmide pentagonal possui quantas arestas?

Atividade 7 – Planificações

Responda.

- a) O que é a planificação de um sólido?
- b) Quantos quadrados formam uma planificação do cubo?
- c) Quais figuras formam a planificação de um cilindro?
- d) Uma planificação de uma pirâmide quadrangular possui quais figuras planas?

- e) Toda junção de figuras planas é uma planificação correta? Explique.

Atividade 8 – Relação de Euler

Verifique a relação de Euler $V - A + F = 2$.

- a) Cubo: $V = 8$, $A = 12$, $F = 6$.
- b) Prisma triangular: $V = 6$, $A = 9$, $F = 5$.
- c) Pirâmide quadrangular: $V = 5$, $A = 8$, $F = 5$.
- d) Pirâmide triangular: $V = 4$, $A = 6$, $F = 4$.

Atividade 9 – Descobrindo elementos com Euler

Use a relação de Euler para descobrir o valor desconhecido.

- a) Um poliedro possui $V = 10$ e $F = 7$. Quantas arestas possui?
- b) Um poliedro possui $A = 15$ e $F = 7$. Quantos vértices possui?
- c) Um poliedro possui $V = 12$ e $A = 18$. Quantas faces possui?

Atividade 10 – Volume por cubinhos

Calcule a quantidade de cubinhos unitários.

- a) Um bloco tem 4 cubinhos no comprimento, 2 na largura e 1 na altura.
- b) Um bloco tem 3 cubinhos no comprimento, 3 na largura e 2 na altura.
- c) Um bloco tem 5 cubinhos no comprimento, 2 na largura e 3 na altura.

Atividade 11 – Problemas contextualizados

Resolva.

- a) Uma caixa tem formato de paralelepípedo. Quantas faces ela possui?
- b) Um dado comum tem formato de cubo. Quantas arestas ele possui?
- c) Um prisma possui base hexagonal. Quantas faces ele tem?
- d) Uma pirâmide possui base pentagonal. Quantos vértices ela tem?
- e) Uma embalagem tem duas bases circulares e uma superfície lateral curva. Que sólido ela lembra?
- f) Um sólido possui apenas uma superfície curva e não possui faces planas, arestas ou vértices. Que sólido é esse?

20 Gabarito comentado

Resolução 1 – Atividade 1

- a) Figura plana é uma figura bidimensional, com comprimento e largura.
- b) Figura espacial é uma figura tridimensional, com comprimento, largura e altura.
- c) Sólido geométrico é uma figura espacial limitada por superfícies.
- d) Poliedro é um sólido limitado apenas por faces planas.
- e) Corpo redondo é um sólido que possui pelo menos uma superfície curva.

Resolução 2 – Atividade 2

- a) Cubo: poliedro.
- b) Cilindro: corpo redondo.
- c) Cone: corpo redondo.
- d) Pirâmide: poliedro.
- e) Paralelepípedo: poliedro.
- f) Esfera: corpo redondo.
- g) Prisma triangular: poliedro.
- h) Prisma pentagonal: poliedro.

Resolução 3 – Atividade 3

- a) Dado: cubo.
- b) Lata de refrigerante: cilindro.
- c) Bola de futebol: esfera.
- d) Caixa de sapato: paralelepípedo.
- e) Casquinha de sorvete: cone.
- f) Pirâmide do Egito: pirâmide.

Resolução 4 – Atividade 4

Sólido	Faces	Arestas	Vértices
Cubo	6	12	8
Paralelepípedo	6	12	8
Prisma triangular	5	9	6
Pirâmide quadrangular	5	8	5
Pirâmide triangular	4	6	4

Resolução 5 – Atividade 5

- a) Um prisma possui duas bases paralelas e congruentes.
- b) O prisma recebe seu nome de acordo com o formato da base.
- c) Um prisma possui duas bases.
- d) Prisma triangular: $n = 3$. Então:

$$F = n + 2 = 3 + 2 = 5.$$

Possui 5 faces.

- e) Prisma pentagonal: $n = 5$. Então:

$$V = 2n = 2 \cdot 5 = 10.$$

Possui 10 vértices.

Resolução 6 – Atividade 6

- a) Uma pirâmide possui uma base poligonal e faces laterais triangulares que se encontram em um vértice.
- b) A pirâmide recebe seu nome de acordo com o formato da base.
- c) Uma pirâmide possui uma base.
- d) Pirâmide quadrangular: $n = 4$. Então:

$$F = n + 1 = 4 + 1 = 5.$$

Possui 5 faces.

- e) Pirâmide pentagonal: $n = 5$. Então:

$$A = 2n = 2 \cdot 5 = 10.$$

Possui 10 arestas.

Resolução 7 – Atividade 7

- a) Planificação é a representação das superfícies de um sólido em um plano.
- b) Uma planificação do cubo é formada por 6 quadrados.
- c) A planificação de um cilindro é formada por 2 círculos e 1 retângulo.
- d) Uma pirâmide quadrangular possui uma base quadrada e 4 faces triangulares.
- e) Não. As figuras precisam se encaixar corretamente para formar o sólido, sem sobras ou sobreposições.

Resolução 8 – Atividade 8

a) Cubo:

$$V - A + F = 8 - 12 + 6 = 2.$$

b) Prisma triangular:

$$V - A + F = 6 - 9 + 5 = 2.$$

c) Pirâmide quadrangular:

$$V - A + F = 5 - 8 + 5 = 2.$$

d) Pirâmide triangular:

$$V - A + F = 4 - 6 + 4 = 2.$$

Resolução 9 – Atividade 9

a) Pela relação de Euler:

$$V - A + F = 2.$$

Substituindo:

$$10 - A + 7 = 2.$$

Então:

$$17 - A = 2.$$

Logo:

$$A = 15.$$

b) Pela relação de Euler:

$$V - A + F = 2.$$

Substituindo:

$$V - 15 + 7 = 2.$$

Então:

$$V - 8 = 2.$$

Logo:

$$V = 10.$$

c) Pela relação de Euler:

$$V - A + F = 2.$$

Substituindo:

$$12 - 18 + F = 2.$$

Então:

$$-6 + F = 2.$$

Logo:

$$F = 8.$$

Resolução 10 – Atividade 10

a)

$$4 \cdot 2 \cdot 1 = 8.$$

O bloco possui 8 cubinhos.

b)

$$3 \cdot 3 \cdot 2 = 18.$$

O bloco possui 18 cubinhos.

c)

$$5 \cdot 2 \cdot 3 = 30.$$

O bloco possui 30 cubinhos.

Resolução 11 – Atividade 11

a) Um paralelepípedo possui 6 faces.

b) Um cubo possui 12 arestas.

c) Prisma de base hexagonal: $n = 6$.

$$F = n + 2 = 6 + 2 = 8.$$

Portanto, possui 8 faces.

d) Pirâmide de base pentagonal: $n = 5$.

$$V = n + 1 = 5 + 1 = 6.$$

Portanto, possui 6 vértices.

e) O sólido é um cilindro.

f) O sólido é uma esfera.

21 Resumo final

Resumo essencial

- Figuras planas possuem duas dimensões: comprimento e largura.
- Figuras espaciais possuem três dimensões: comprimento, largura e altura.
- Um sólido geométrico é uma figura espacial limitada por superfícies.
- Poliedros são sólidos limitados apenas por faces planas.
- Corpos redondos possuem pelo menos uma superfície curva.
- Os principais elementos de um poliedro são faces, arestas e vértices.
- Face é uma superfície plana.
- Aresta é o encontro de duas faces.
- Vértice é o encontro de três ou mais arestas.
- O cubo possui 6 faces, 12 arestas e 8 vértices.
- O paralelepípedo possui 6 faces, 12 arestas e 8 vértices.
- Prismas possuem duas bases paralelas e congruentes.
- Pirâmides possuem uma base e faces laterais triangulares.
- Cilindro, cone e esfera são corpos redondos.
- Planificação é a representação das superfícies de um sólido em um plano.
- Em poliedros convexos, vale a relação de Euler:

$$V - A + F = 2.$$

- Volume é a medida do espaço ocupado por um sólido.

Figuras espaciais são formas tridimensionais que ocupam lugar no espaço.